

Vorkurs Physik

Jan Kierfeld

Version 17. November 2021

Vorbemerkungen

Das Skript orientiert sich an den Vorkursen aus den Wintersemestern 2009/10 und 2011/12 an der TU Dortmund. Es kann und wird Fehler enthalten.

Das Skript ersetzt natürlich nicht den Besuch des Vorkurses.

E-mail jan.kierfeld@tu-dortmund.de

Homepage <http://t1.physik.tu-dortmund.de/kierfeld/>

Jan Kierfeld

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Literatur	7
2	Lineare Algebra	8
2.1	Vektoren und Skalare	9
2.1.1	Skalare	9
2.1.2	Vektoren	9
2.1.3	Vektoraddition	10
2.1.4	Skalarmultiplikation	11
2.2	Vektorraum	13
2.3	Gerade, Ebene, Basis	14
2.3.1	Gerade	14
2.3.2	Ebene	14
2.3.3	Lineare (Un-)Abhängigkeit	15
2.3.4	Basis	16
2.4	Längen und Skalarprodukte von Vektoren	17
2.4.1	Länge	17
2.4.2	Skalarprodukt	17
2.4.3	Skalarprodukt und Ebenen	19
2.5	Vektorprodukt	21
2.6	Kombinierte Produkte	23
2.6.1	Spatprodukt	23
2.6.2	ε -Tensor	23
2.6.3	Doppeltes Kreuzprodukt	24
2.7	Matrizen	25
2.7.1	Definition	25
2.7.2	Transponierte	25
2.7.3	Matrixmultiplikation	25
2.8	Weitere Matrixoperationen	28
2.8.1	Transponierte	28
2.8.2	Matrixaddition	28
2.8.3	Skalarmultiplikation	28
2.9	Lineare Abbildungen	29
2.10	Spezielle quadratische Matrizen	31
2.11	Determinante	32
2.12	Übungen Kapitel 2	35
3	Analysis	38
3.1	Funktionen	39
3.2	Differenzieren	40
3.2.1	Grenzwerte, Stetigkeit	40
3.2.2	Differentiation	41
3.2.3	Ableitungsregeln	42
3.2.4	Höhere Ableitungen	44
3.2.5	Kurvendiskussion	44

3.3	Wichtige Funktionen und ihre Ableitungen	46
3.4	Integrieren	55
3.4.1	Bestimmtes Integral	55
3.4.2	Hauptsatz und Stammfunktionen	55
3.4.3	Integrationsregeln	57
3.4.4	Wichtige Funktionen und ihre Integrale	59
3.4.5	Uneigentliche Integrale	59
3.5	Folgen, Reihen, Potenzreihen und Taylorentwicklung	61
3.5.1	Folgen	61
3.5.2	Reihen	62
3.5.3	Potenzreihen	63
3.5.4	Taylorentwicklung	64
3.6	Übungen Kapitel 3	69
4	Mehrdimensionale Analysis (Differenzieren)	71
4.1	Vektorwertige Funktionen	72
4.1.1	Ableitung vektorwertiger Funktionen	72
4.1.2	Rechenregeln	74
4.1.3	Geometrie von Raumkurven*	74
4.2	Partielles Differenzieren	80
4.2.1	Felder	80
4.2.2	Definition der partiellen Ableitung	81
4.2.3	Höhere partielle Ableitungen, Satz von Schwarz	82
4.2.4	Totales Differential	83
4.3	Gradient, Divergenz, Rotation	83
4.3.1	Nabla-Operator	83
4.3.2	Richtungsableitung und Gradient	83
4.3.3	Divergenz*	87
4.3.4	Rotation*	88
4.3.5	Kombinationen von Gradient, Rotation und Divergenz*	90
4.4	Krummlinige Koordinaten*	92
4.4.1	Kartesische Koordinaten	92
4.4.2	Polarkoordinaten	92
4.4.3	Zylinderkoordinaten	95
4.4.4	Kugelkoordinaten	96
4.5	Übungen Kapitel 4	99
5	Komplexe Zahlen	101
5.1	Definition	102
5.2	Rechenregeln	104
5.2.1	Addition, Multiplikation	104
5.2.2	Konjugation, Betrag, Inverses	104
5.3	Polardarstellung	106
5.3.1	Definition	106
5.3.2	Euler-Formel	106
5.3.3	Multiplikation, Wurzeln	108
5.4	Übungen Kapitel 5	110

Mit einem Stern (*) gekennzeichnete Kapitel sind bereits weiterführend und nicht unbedingt Teil des Vorkurses.

1 Einleitung

Die ‘Sprache’, in der physikalische Gesetze formuliert werden, ist die Mathematik. Das beherrschende Thema im ersten Semester wird die Beschreibung von Bewegungen von einem oder mehreren punktförmigen oder ausgedehnten Körpern im dreidimensionalen Raum unter dem Einfluss von Kräften sein. Die wichtigsten betrachteten Kräfte werden die Gravitation und Federkräfte sein. Gravitationskräfte führen auf einfache Bewegungen wie den freien Fall oder den schiefen Wurf (wenn wir uns nicht ‘weit weg’ von der Erdoberfläche bewegen), aber auch auf die Planetenbewegung; Federkräfte führen auf Schwingungen. Diese Themen werden im Normalfall auch bereits im Schulunterricht behandelt worden sein, allerdings fehlen dort oft die eigentlich nötigen mathematischen Methoden für eine vollständige und saubere Herleitung aller Resultate ausgehend von den Newtonschen Axiomen. Dies wird im Rahmen der Physik1-Vorlesung geschehen: Wir werden alle mathematischen Werkzeuge bereitstellen, um die Bewegungen aus den Newtonschen Axiomen und der sich daraus ergebenden Bewegungsgleichung lückenlos ableiten zu können. Der Vorkurs soll den Teil der mathematischen Grundkenntnisse, die dabei verwendet werden und bereits Teil des Schulstoffs Mathematik waren oder direkt daran anknüpfen, in Erinnerung rufen.

Eine größere Hürde im ersten Semester stellt erfahrungsgemäß die konsequente mathematische Formulierung in drei Raumdimensionen und in Form von Differentialgleichungen dar:

- Differentialgleichungen sind notwendig, da der Zusammenhang zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung (und damit Kräften) immer durch Differentialoperationen (Ableiten, Integrieren) gegeben ist für beliebige Bewegungsformen. Hier versucht der Schulunterricht manchmal, ‘pädagogische’ Zugeständnisse (der Art ‘Geschwindigkeit ist Weg durch Zeit’) zu machen; dies ist bei einer physikalisch korrekten und allgemein gültigen Beschreibung einer Bewegung allerdings nicht mehr möglich.
- Außerdem spielen sich Bewegungen im uns umgebenden dreidimensionalen Raum ab. Auch hier macht der Schulunterricht typischerweise vereinfachende Zugeständnisse und betrachtet gerne spezielle Bewegungen, die nur entlang einer Geraden stattfinden. Auch dies ist bei einer physikalisch korrekten und allgemein gültigen Beschreibung der Bewegung nicht mehr möglich.

Deswegen müssen physikalische Vorgänge durch **Vektoren** und in Abhängigkeit von **drei Koordinaten** im **Differentialkalkül** mathematisch formuliert werden. Dies erfordert (i) Lineare Algebra und (ii) (mehrdimensionale) Analysis.

Die zu bewältigenden mathematischen Probleme werden sofort deutlich, wenn wir im Vorgriff auf die Physik1 die Newtonsche Bewegungsgleichung eines einzelnen Massepunktes in einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ betrachten:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (1.0.1)$$

Diese Gleichung folgt direkt aus den Newtonschen Axiomen und stellt den Ausgangspunkt dar, von dem aus wir die Bewegung $\vec{r}(t)$ des Massepunktes herleiten müssen. Auf der linken Seite steht die Beschleunigung $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ in drei Raumdimensionen, die wir als *zweifache Zeitableitung* des zeitabhängigen Ortsvektors $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (Punkte bedeuten üblicherweise Zeitableitungen in der Physik) schreiben müssen. Auf der rechten Seite steht das *Kraftfeld* $\vec{F}(\vec{r})$, also eine dreidimensionale Funktion für die Kraft als Funktion des dreidimensionalen Ortsvektors. Zusammengenommen haben wir eine Gleichung für die *Funktion* $\vec{r}(t)$, die man als *Differentialgleichung* bezeichnet, da in dieser Gleichung Zeitableitungen vorkommen. Die grundlegende Gleichung (1.0.1) zeigt also schon, was wir uns mathematisch erarbeiten müssen im Rahmen der Physik1. Darauf soll der Vorkurs vorbereiten und den Übergang von der Schule zur wissenschaftlichen Beschäftigung mit Physik erleichtern.

Entsprechend dem obengesagten wird es zwei größere Teile geben. einen Teil zur **linearen Algebra**, also der “Vektorrechnung” und einen Teil zur **Analysis**, also der “Differentialrechnung”. Bei der Differentialrechnung bleiben wir im Vorkurs noch größtenteils bei einer Raumdimension, also Funktionen einer Variablen wie in der Schule. Die notwendige Verallgemeinerung auf vektorwertige Funktionen, die auch von Vektoren abhängen können, wird auch Teil der Vorlesung Physik1 sein. Wir werden aber auch hier schon vektorwertige Funktionen und partielle Ableitungen (und den “Nabla-Operator”) einführen. Es schließt sich ein dritter Teil zu **komplexen Zahlen** an, die oft nicht Teil des Schulstoffs sind, aber für die Beschreibung von Schwingungsvorgängen ein wichtiges mathematisches Werkzeug sein werden, das hier schon einmal kurz eingeführt werden soll.

Alles weitere werden Sie dann in der Physik1 und den HöMa-Vorlesungen lernen, insbesondere auch, wie man systematisch Differentialgleichungen wie die Bewegungsgleichung (1.0.1) löst.

Mit einem Stern (*) gekennzeichnete Kapitel sind schon weiterführend und nicht unbedingt Teil des Vorkurses.

Sie sollten beim Lesen des Skripts beachten, dass im Vergleich zum Schulunterricht in einer Vorlesung der umfangreiche Stoff doch sehr viel zügiger durchgenommen wird; dies ist möglich, weil die Physik ab jetzt nicht mehr ein Schulfach unter vielen ist, sondern tatsächlich ihr “Beruf”. Dementsprechend intensiv sollten Sie sich mit der Nachbereitung auseinandersetzen. Außerdem steht bei der Vermittlung das “wissenschaftliche Gedankengebäude” im Vordergrund. Das soll heißen, dass Themen wie die Definition eines Vektorpfeils und die Definition eines Kreuzproduktes natürlich beides wichtige Bausteine der Vektorrechnung sind. Das Kreuzprodukt wird Ihnen beim ersten Kontakt aber ungleich schwieriger erscheinen als das Konzept eines einfachen Vektorpfeils, und Sie werden etwas länger brauchen, um das Kreuzprodukt zu verstehen und zu verinnerlichen (was allerdings nur daran liegt, dass Sie im Moment noch nicht an Kreuzprodukte gewöhnt sind; im zweiten Semester werden dann wieder die Kreuzprodukte in der Elektrodynamik ihr geringstes Problem sein ...). Trotzdem nehmen Vektorpfeile und Kreuzprodukte im Skript und in einer Vorlesung durchaus vergleichbaren Raum ein. Diese Ausrichtung an der Wissenschaft und nicht an der (subjektiv gefühlten) “Schwierigkeit” der Themen (die meist nur dadurch bestimmt ist, wie “neu” das Thema für Sie ist und nicht wie schwierig es wirklich ist) wird ein Hauptunterschied zum Schulunterricht sein. Das soll natürlich nicht heißen, dass wir hier nicht trotzdem bemüht sind, solche pädagogischen Aspekte soweit wie möglich zu berücksichtigen.

Außerdem gibt es aus diesem Grund die überaus wichtigen “Übungen” zu den jeweiligen Vorlesungen (und auch zum Vorkurs). Dort werden die Probleme dann eher an Schwierigkeit und weiterem praktischen Nutzen orientiert aktiv eingeübt. Die Betonung liegt hier auf “aktiv”: Die aktive Beherrschung des Stoffs, wie sie in den Übungen erarbeitet wird, unterscheidet sich noch einmal qualitativ von der passiven Aufnahme des Stoffes in der Vorlesung. Daher ist der Besuch der Vorlesung immer nur (höchstens) die Hälfte wert ohne den Besuch der entsprechenden Übungen. Dies gilt auch und insbesondere für den Vorkurs.

Schließlich sollten sie beachten, dass dieser Vorkurs auch eher einer kleinen Mathematik-Vorlesung als einer Physik-Vorlesung ähnelt: Wir werden hier kaum über Physik sprechen, geschweige denn, Experimente vorführen. Dies wird in den Grundvorlesungen Physik1 bis Physik4 ganz anders sein.

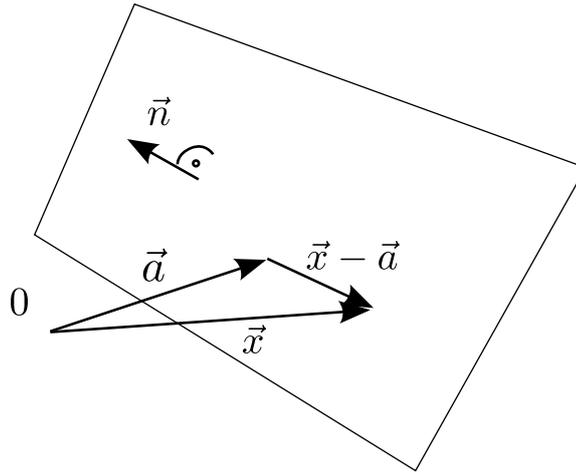
1.1 Literatur

Sie sollten sich daran gewöhnen, parallel zu einer Vorlesung nicht nur ein evtl. vorhandenes Skript nachzuarbeiten sondern auch in verschiedene Lehrbüchern zu schauen. In Lehrbüchern werden Sie oft noch detailliertere Darstellungen finden (in der Vorlesung muss man sich aus Zeitmangel oft auf das Wesentliche beschränken); außerdem gefallen einem alternative Darstellungen manchmal besser als die Darstellung aus der Vorlesung (Geschmäcker sind verschieden).

Für das im Vorkurs behandelte Material gibt es zahlreiche Lehrbücher. Hier einige Beispiele:

- H.J. Korsch, *Mathematik-Vorkurs*, Binomi-Verlag 2004.
- K. Hefft, *Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik*, Spektrum Akademischer Verlag 2006.
- H.J. Korsch, *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik*, Binomi-Verlag 2007. Geht über den Vorkurs hinaus, deckt die gesamte in den ersten 3-4 Semestern benötigte Mathematik ab.
- Siegfried Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, Vieweg+Teubner 2005. Ein "Klassiker", geht über den Vorkurs hinaus, deckt die gesamte in den ersten 3-4 Semestern benötigte Mathematik ab.
- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik*, Springer 2008. Hier entspricht das erste Kapitel (Mathematische Vorbereitungen) einem Vorkurs, weitere Kapitel decken dann bereits Teile der Vorlesung Physik 1 ab.
- C.B. Lang, N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*, Spektrum Verlag 2005. Geht über den Vorkurs hinaus, deckt die gesamte in den ersten 3-4 Semestern benötigte Mathematik ab. Behandelt auch numerische Techniken.
- K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence, *Mathematical methods for physics and engineering - A comprehensive guide*, Cambridge University Press 2006. Some people prefer the anglo-american style of writing and presentation. This book goes far beyond a "Vorkurs" and covers all the mathematics needed during the first two years.
- I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Muehlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch 2008. "Der Bronstein" ist das klassische Nachschlagewerk für mathematische Formeln aller Art. Mittlerweile angereichert mit etwas mehr Text. Wird Sie durch das gesamte Physikstudium begleiten.

2 Lineare Algebra



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.1 Vektoren und Skalare

In der Physik unterscheiden wir zwischen **Skalaren** und **Vektoren**, später werden auch noch **Tensoren** (Matrizen) hinzukommen.

2.1.1 Skalare

Ein **Skalar** ist eine **ungerichtete Größe** oder vereinfacht gesagt, eine physikalische Größe, die sich nur durch Angabe einer einfachen Zahl beschreiben lässt, die wir in der Physik dann natürlich auch noch mit einer Einheit versehen müssen.

Beispiele für Skalare in der Physik sind:

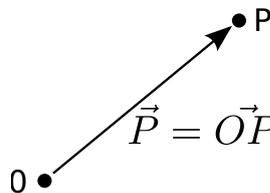
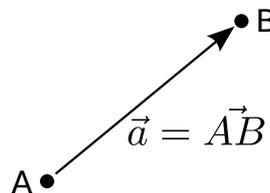
- die **Temperatur** T , die in Kelvin (K) oder Grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$) gemessen wird, z.B. $T = 273\text{ K} = 0^{\circ}\text{C}$,
- die **Masse** eines Körpers mit der Einheit Gramm (kg), z.B. $m = 1\text{ kg}$
- **Längen**, die in Metern (m) gemessen werden, z.B. $L = 1\text{ m}$
- die **Zeit**, die in Sekunden (s) gemessen wird, z.B. $t = 1\text{ s}$

2.1.2 Vektoren

Physik spielt in uns umgebenden dreidimensionalen Raum. Daher gibt es neben den skalaren Größen auch **Vektoren**. Dies sind **gerichtete Größen**, die man sich durch Pfeile veranschaulichen kann, und die durch Angabe ihres **Betrages** (Pfeillänge), der selbst wieder ein Skalar ist, *und* ihrer **Richtung** bestimmt sind. Vektoren werden in der Mathematik durch Buchstaben mit einem Pfeil darüber, also z.B. \vec{a} bezeichnet.

Wir führen zwei wichtige Vektoren ein:

- Den **Verschiebungsvektor** von Punkt A nach Punkt B, den wir mit \vec{AB} bezeichnen wollen. Der Vektor $\vec{a} = \vec{AB}$ zeigt von Punkt A nach Punkt B, seine Länge ist die Entfernung zwischen A und B.
- Den **Positionsvektor** \vec{P} eines Punktes P bezgl. eines Koordinatenursprungs O. Er ist definiert als der Verschiebungsvektor vom Ursprung O nach Punkt P, also $\vec{P} = \vec{OP}$.



Beispiele für vektorielle Größen in der Physik sind:

- die **Position** \vec{r} eines Teilchens/Massepunktes
- die **Geschwindigkeit** \vec{v} des Massepunktes
- die **Beschleunigung** \vec{a} des Massepunktes
- die **Kraft** \vec{F} auf einen Massepunkt

Physik spielt im 3-dimensionalen Raum \mathbb{R}^3 , Vektoren werden dann durch **3 (kartesische) Koordinaten** x, y und z in einem **rechtshändigen rechtwinkligen (kartesischem) Koordinatensystem** angegeben,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.1.1)$$

die man in einem **Spaltenvektor** zusammenfasst. Jede Koordinate ist eine reelle Zahl, also $x, y, z \in \mathbb{R}$. Der Koordinatenursprung 0 liegt im Koordinatenkreuz $x = y = z = 0$ und der Vektorpfeil \vec{r} zeigt vom Koordinatenursprung zum Punkt mit den Koordinaten x, y und z .

Manchmal betrachten wir auch Physik oder Bewegungen in einer 2-dimensionalen Ebene \mathbb{R}^2 . Dann verwenden wir entsprechend nur 2 Koordinaten x und y :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.1.2)$$

Ganz allgemein können wir auch den \mathbb{R}^n betrachten. Dann ist ein Vektor durch Angabe von n Koordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

bestimmt.

2.1.3 Vektoraddition

Vektoraddition erfolgt einfach und anschaulich, indem entsprechende Pfeile “aneinandergehängt” werden. Mathematisch bedeutet das, dass die kartesischen Koordinaten jeweils addiert werden:¹

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} + \vec{b} \equiv \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

Diese koordinatenweise Addition lässt sich sofort auf Vektoren \vec{a} und \vec{b} aus dem \mathbb{R}^n mit n Koordinaten a_i und b_i verallgemeinern:

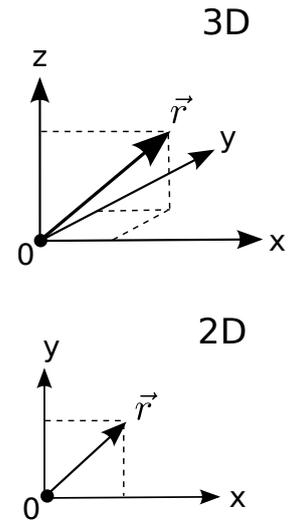
$$(\vec{a} + \vec{b})_i = a_i + b_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n \quad (2.1.5)$$

Um **Vektordifferenzen** zu bilden, definieren wir zuerst einen **inversen Vektor** durch Pfeilumkehr, bzw. durch Vorzeicheninversion aller Komponenten:

$$-\vec{b} \equiv \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Der inverse Vektor hat offensichtlich die Eigenschaft, dass $\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0}$ ergibt, wobei $\vec{0}$ der **Nullvektor**, also ein Vektor mit Länge Null ist.

¹Das Symbol “ \equiv ” bezeichnet ein definierendes Gleichheitszeichen.



Eine **Vektordifferenz** können wir nun als Addition des inversen Vektors definieren: Vorzeicheninversion aller Komponenten:

$$\vec{a} - \vec{b} \equiv \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (2.1.7)$$

Anschaulich bedeutet Subtraktion also Addition des umgekehrten Pfeils.

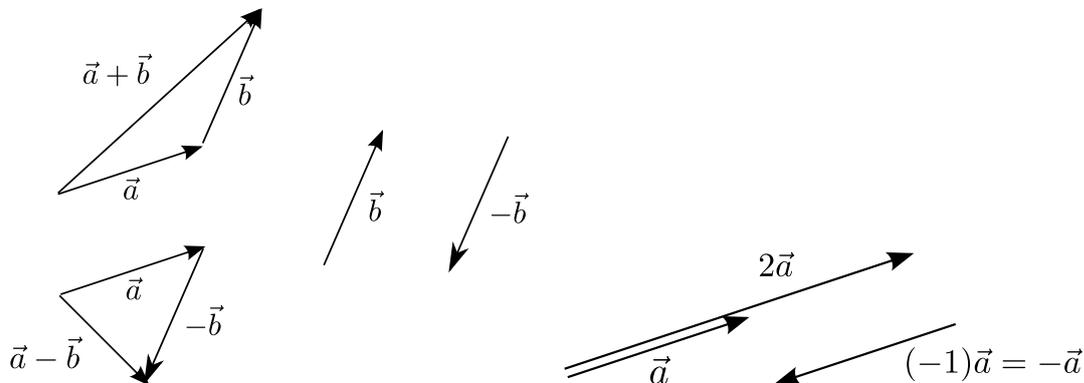


Abbildung 2.1: Links: Vektoraddition und Vektorsubtraktion. Rechts: Skalarmultiplikation.

So ist der **Verbindungsvektor** \vec{AB} zwischen zwei Punkten A und B mit Koordinaten

$$\vec{0A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{0B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{b} \quad (2.1.8)$$

durch die Differenz

$$\vec{AB} = \vec{0B} - \vec{0A} = \vec{b} - \vec{a} \quad (2.1.9)$$

gegeben, siehe Zeichnung.

2.1.4 Skalarmultiplikation

Eine weitere wichtige Operation mit Vektoren ist die **Skalarmultiplikation** eines Vektors mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, die einer Streckung oder Stauchung der Pfeillänge um den Faktor α entspricht bei gleicher Richtung:

$$\alpha \vec{a} \equiv \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

Diese koordinatenweise Skalarmultiplikation lässt sich auch sofort auf Vektoren \vec{a} aus dem \mathbb{R}^n mit n Koordinaten a_i verallgemeinern:

$$(\alpha \vec{a})_i = \alpha a_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n \quad (2.1.11)$$

Wenn $\alpha < 0$ kehrt sich die Pfeilrichtung um, daher kann man den inversen Vektor $-\vec{a}$ auch als $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ schreiben.

Die Koordinatendarstellung (2.1.1) kann man dann mittels der **kartesischen Einheitsvektoren**

$$\vec{e}_x \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.12)$$

und Vektoraddition und Skalarmultiplikation auch als

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

schreiben (oft benutzt man auch die Bezeichnungen \vec{e}_1 , \vec{e}_2 und \vec{e}_3 statt \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z).

Wir sehen, dass Vektoren, Vektoraddition und Skalarmultiplikation im \mathbb{R}^3 anschaulich klare Konzepte sind. Was ist aber die mathematische “Essenz” dieser Begriffe? Dazu führen wir im nächsten Abschnitt den Begriff des Vektorraumes ein.

2.2 Vektorraum

In der Mathematik werden Vektoren als Elemente eines **Vektorraumes** eingeführt, der durch einige **Vektoraxiome** definiert wird (die für Vektorpfeile im \mathbb{R}^3 die mathematische Abstraktion unserer anschaulichen Definitionen aus dem vorherigen Abschnitt darstellen). Dieses abstrakte Konzept ist dann auch übertragbar auf andere Vektorräume als den \mathbb{R}^3 .

Ein Vektorraum ist eine Menge V von Vektoren, für die eine **Verknüpfung** “+” (die **Vektoraddition**) definiert ist, also eine Vorschrift um “ $\vec{a} + \vec{b}$ ” zu bilden für $\vec{a}, \vec{b} \in V$, wobei diese Verknüpfung folgende Vektoraxiome erfüllen muss:

(i) das **Assoziativgesetz**

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (2.2.1)$$

(ii) Es gibt ein **neutrales Element** $\vec{0}$ bezgl. der Vektoraddition mit

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad \text{für alle } \vec{a} \quad (2.2.2)$$

(iii) Zu jedem $\vec{a} \in V$ existiert ein **Inverses** $-\vec{a}$ mit

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0} \quad (2.2.3)$$

(iv) das **Kommutativgesetz**

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (2.2.4)$$

Die Eigenschaften (i)–(iii) definieren eine **Gruppe** bezgl. der Verknüpfung “+”; die zusätzliche Kommutativität (iv) eine **abelsche Gruppe**.

Neben der Verknüpfung (Addition) “+” ist in einem Vektorraum auch eine Skalarmultiplikation $\alpha \cdot \vec{a}$ oder einfacher $\alpha \vec{a}$ definiert mit

(v) einem **Distributivgesetz**, das die Verträglichkeit von Vektoraddition und Skalarmultiplikation sichert

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\vec{a} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \\ \alpha(\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

(vi) einem **Assoziativgesetz**

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} \quad (2.2.6)$$

(vii)

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \quad (2.2.7)$$

Die Vektorraumaxiome (i)–(vii) definieren einen \mathbb{R} -**Vektorraum** V . Weitere Eigenschaften folgen aus den Axiomen, z.B.

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0} \quad (2.2.8)$$

Der wichtigste \mathbb{R} -Vektorraum in der Physik ist der \mathbb{R}^3 , der dreidimensionale Raum mit der Vektoraddition (2.1.4) und der Skalarmultiplikation (2.1.10), der offensichtlich alle Axiome erfüllt. Dies gilt aber nicht nur in 3 Dimensionen, sondern ganz allgemein erfüllt der n -dimensionale \mathbb{R}^n alle Vektorraumaxiome.

2.3 Gerade, Ebene, Basis

Um Geraden und Ebenen zu diskutieren, führen wir zunächst den allgemeineren Begriff der **Linearkombination** von m Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ ein. Jede Summe²

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i \quad (2.3.1)$$

mit Skalaren (d.h. Zahlen) $\lambda_i \in \mathbb{R}$ wird als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ bezeichnet. Die λ_i heißen auch **Koeffizienten** der Linearkombination.

2.3.1 Gerade

Wir können jetzt z.B. alle Linearkombinationen der Form

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad (2.3.2)$$

im \mathbb{R}^3 betrachten. Wenn λ durch alle reellen Zahlen läuft beschreiben die Punkte \vec{x} eine **Gerade** durch den **Aufpunkt** \vec{a} in **Richtung** des Vektors \vec{b} . Für $\vec{a} = 0$ in (2.3.2), erhalten wir eine Gerade durch den Ursprung.

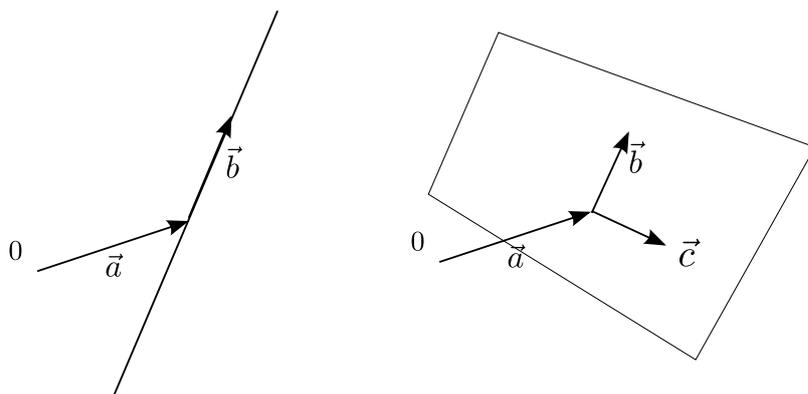


Abbildung 2.2: Gerade und Ebene

2.3.2 Ebene

Wir können auch Linearkombinationen der Form

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} \quad (2.3.3)$$

im \mathbb{R}^3 betrachten, wobei nun λ und μ durch alle reellen Zahlen laufen. Die so entstehende Menge von Punkten \vec{x} beschreibt dann eine **Ebene** durch den **Aufpunkt** \vec{a} und mit den **Tangentialvektoren** \vec{b} und \vec{c} . Für $\vec{a} = 0$ erhalten wir eine Ebene durch den Ursprung. Dabei ist die Ebenengleichung (2.3.3) offensichtlich nur sinnvoll, wenn die Vektoren \vec{b} und \vec{c} *nicht* parallel sind, d.h. nicht in die "gleiche Richtung" zeigen.

² "Σ" ist das Summenzeichen: $\sum_{i=1}^m a_i \equiv a_1 + \dots + a_m$ bezeichnet eine Summe, bei der der Index i von 1 bis m läuft.

Wir definieren Vektoren \vec{b} und \vec{c} als **parallel**, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $\lambda \neq 0$, so dass sich \vec{b} als

$$\vec{b} = \lambda \vec{c} \quad (2.3.4)$$

schreiben lässt.

2.3.3 Lineare (Un-)Abhängigkeit

Der Begriff der Parallelität lässt sich nur auf jeweils zwei Vektoren anwenden. Für mehr Vektoren gibt es noch den allgemeineren Begriff der **linearen Unabhängigkeit** bzw. **linearen Abhängigkeit**.

Man nennt m Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ **linear abhängig**, wenn sich ein \vec{a}_i als Linearkombination der anderen \vec{a}_j ($j \neq i$) schreiben lässt.

Als Beispiel betrachten wir die 3 Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Weil sich \vec{c} als $\vec{c} = 1\vec{a} - 2\vec{b}$ schreiben lässt, folgt, dass \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} linear abhängig sind.

Wenn die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ nicht linear abhängig sind, also keiner der Vektoren sich als Linearkombination der anderen schreiben lässt, werden sie **linear unabhängig** genannt. Für lineare Unabhängigkeit gibt es folgendes **Kriterium**:³

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ sind linear unabhängig \iff die Gleichung $\vec{0} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i$ hat <i>nur</i> die Lösung $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.	(2.3.5)
---	---------

Als Beispiel betrachten wir wieder die 3 Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(wir wissen bereits, dass diese linear abhängig sind, s.o.). Die Prüfung auf lineare Abhängigkeit erfordert die Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

das auf drei lineare Gleichungen für die λ_i führt:

$$\begin{aligned} \text{I) } 0 &= \lambda_1 + \lambda_3 \\ \text{II) } 0 &= \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ \text{III) } 0 &= 2\lambda_2 - 4\lambda_3 \end{aligned}$$

Ein lineares Gleichungssystem wird gelöst, indem Gleichungen geschickt addiert werden, so dass nach und nach alles λ_i bis auf eines eliminiert werden (Eliminationsverfahren). Hier folgt aus I) $\lambda_1 = -\lambda_3$, aus III) folgt $\lambda_2 = 2\lambda_3$. Eingesetzt in II) ergibt sich $0 = -\lambda_3 + 2\lambda_3 - \lambda_3$, also ist II) immer erfüllt, wenn I) und III) erfüllt sind. I) und III) lassen sich z.B. mit $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ erfüllen, also existiert eine Lösung, wo nicht alle $\lambda_i = 0$ sind und somit sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} linear abhängig.

³ Das Symbol " \iff " bezeichnet die Äquivalenz: Es gilt also sowohl "aus der linken Seite folgt die rechte Seite", also " \implies ", als auch "aus der rechten Seite folgt die linke Seite", also " \impliedby ".

2.3.4 Basis

Man kann sich nun fragen, ob man beliebig viele voneinander linear unabhängige Vektoren finden kann. Dazu gibt es folgenden wichtigen mathematischen **Satz über Basen des \mathbb{R}^3** (der Beweis wird in der Mathematik-Vorlesung geliefert):

- Im \mathbb{R}^3 sind *höchstens* 3 Vektoren linear unabhängig
- Beliebige 3 linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ spannen den gesamten \mathbb{R}^3 auf, d.h. **alle** $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ lassen sich als Linearkombination

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 \quad (2.3.6)$$

schreiben.

Man sagt: Je 3 linear unabhängige Vektoren bilden eine **Basis** des \mathbb{R}^3 .

Die Darstellung in (2.3.6) bezgl. einer Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ist **eindeutig**, d.h. wenn

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{x} = \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \mu_3 \vec{a}_3$$

dann folgt $\lambda_i = \mu_i$ für $i = 1, 2, 3$. Dies nennt man **Koeffizientenvergleich** bezgl. einer Basis.

Man wählt eine Basis natürlich gerne möglichst einfach. Im \mathbb{R}^3 wählt man aus diesem Grund üblicherweise die **kartesische Basis** \vec{e}_x, \vec{e}_y und \vec{e}_z aus kartesischen Einheitsvektoren, siehe (2.1.12). Diese 3 Vektoren sind offensichtlich linear unabhängig und jeder Ortsvektor \vec{r} im \mathbb{R}^3 ist eindeutig darstellbar als

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Der Begriff der Basis verallgemeinert also letztendlich den Begriff der kartesischen Koordinaten auf Koordinaten bezgl. beliebiger Basen. In der Physik rechnen wir natürlich normalerweise genau in der einfachen kartesischen Basis.

Bemerkung: Der obige Satz über Basen gilt natürlich völlig analog in der Ebene \mathbb{R}^2 und sogar ganz allgemein im \mathbb{R}^n , wobei wir dann überall 3 durch 2 bzw. n ersetzen.

2.4 Längen und Skalarprodukte von Vektoren

2.4.1 Länge

Die **Länge** oder **Norm** eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

ist definiert als

$$|\vec{a}| \equiv \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (2.4.1)$$

Diese Definition ist offensichtlich vernünftig, da sie auf dem **Satz des Pythagoras** basiert, nach dem für die Hypothenusenlänge a in einem rechtwinkligen Dreieck mit Schenkellängen a_1 und a_2 (hier unsere kartesischen Koordinaten) $a^2 = a_1^2 + a_2^2$ gilt.

Im \mathbb{R}^n gilt entsprechend

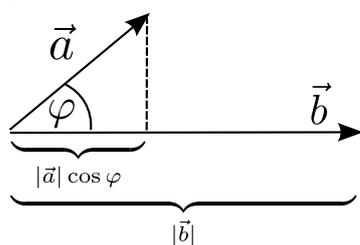
$$|\vec{a}| \equiv \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (2.4.2)$$

2.4.2 Skalarprodukt

Wir definieren weiter das **Skalarprodukt** oder **innere Produkt** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Das Skalarprodukt ist selbst wieder ein **Skalar**, und zwar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \quad (2.4.3)$$

wobei φ der von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ist.



Wegen

$$\cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

ist

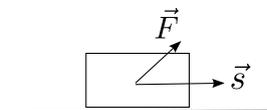
$$|\vec{a}| \cos \varphi = \text{Projektion von } \vec{a} \text{ auf } \vec{b}$$

$$|\vec{b}| \cos \varphi = \text{Projektion von } \vec{b} \text{ auf } \vec{a}$$

Also gilt für das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\text{Länge von } \vec{b}) \times (\text{Projektion von } \vec{a} \text{ auf } \vec{b}) \\ &= (\text{Länge von } \vec{a}) \times (\text{Projektion von } \vec{b} \text{ auf } \vec{a}) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Das Skalarprodukt ist daher immer dann wichtig in der Physik, wenn es in einem Produkt von Vektorlängen nur auf die *projezierte* Länge eines Vektors in Richtung des anderen Vektors ankommt. Das wichtigste Beispiel ist die Definition von Arbeit als "Kraft mal Weg". Wenn eine Kraft \vec{F} entlang eines Vektors \vec{s} (Weg) wirkt, zählt nur die Kraftkomponente, die in Richtung des Weges zeigt bei der Verrichtung von Arbeit, also



$$\text{verrichtete Arbeit} = \text{Kraft mal Weg}$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$= (\text{Projektion von } \vec{F} \text{ auf } \vec{s}) \times \text{Weg}$$

Die Arbeit kann daher nur korrekt mit Hilfe des Skalarproduktes geschrieben werden.

Das Skalarprodukt besitzt folgende wichtige **Eigenschaften**:

(i) Es ist **symmetrisch** (es ist gleichgültig, welcher Vektor auf welchen projiziert wird):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (2.4.5)$$

(ii) Es gilt **Linearität**:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (2.4.6)$$

$$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (2.4.7)$$

weil Projektionen sich addieren und bei Multiplikation mit einem Skalar entsprechend strecken.

(iii) Es ist **positiv definit**:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2 > 0 \quad \text{für } \vec{a} \neq \vec{0} \quad (2.4.8)$$

(iv) Es gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad (2.4.9)$$

weil $|\cos \varphi| \leq 1$

Die Eigenschaften (i)–(iii) werden in der Mathematik auch verwendet, um beliebige Skalarprodukte in einem Vektorraum axiomatisch zu definieren.

Da $\cos \varphi = 0$ für Vektoren die senkrecht aufeinander stehen ($\varphi = \pi/2, 3\pi/2$), gilt

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad (\vec{a} \text{ senkrecht auf } \vec{b}) \iff \cos \varphi = 0 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (2.4.10)$$

(wenn $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$). Dann sagen wir auch: Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind **orthogonal**.

Insbesondere stehen natürlich unsere kartesischen Einheitsvektoren entlang der x-, y- und z-Achsen senkrecht aufeinander, daher gilt ⁴

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.4.11)$$

Die erste Zeile bedeutet, dass die kartesischen Einheitsvektoren **normiert** sind, d.h. Länge 1 haben; die zweite Zeile bedeutet, dass sie paarweise **orthogonal** sind. Daher ist wird die Basis \vec{e}_1, \vec{e}_2 und \vec{e}_3 auch als **Orthonormalbasis** bezeichnet.

Die Orthonormal-Eigenschaft (2.4.11) erlaubt es uns nun, das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^3 sehr einfach mit Hilfe ihrer kartesischen Koordinaten zu berechnen. Dazu benutzen wir die Linearitätseigenschaft (ii) des Skalarproduktes, die ein ‘‘Ausmultiplizieren’’ erlaubt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) \\ &\stackrel{\text{Ausmultiplizieren}}{=} a_1 b_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a_1 b_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + a_1 b_3 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + a_2 b_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + \dots \\ &\stackrel{(2.4.11)}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

⁴ Das in (2.4.11) definierte Symbol δ_{ij} ist das sogenannte **Kronecker-Symbol**.

also

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \quad (2.4.12)$$

Diese Darstellung des Skalarproduktes kann man auch auf Vektoren im \mathbb{R}^n verallgemeinern:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (2.4.13)$$

Gemäß seiner Definition $\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ enthält das Skalarprodukt Information über den Winkel φ zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Man kann (2.4.12) daher auch nutzen, um den Winkel φ zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} im \mathbb{R}^3 über ihre kartesischen Komponenten zu berechnen:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (2.4.14)$$

Das Skalarprodukt ist ein Produktbegriff zweier Vektoren, der wieder einen Skalar ergibt. Die Rechenregeln in den Eigenschaften (i)–(iv) haben einige Ähnlichkeit mit Rechenregeln, die man von “normalen” Produkten von Zahlen kennt. Allerdings gibt es auch große Unterschiede:

- 1) Das Skalarprodukt von Vektoren ist *nicht assoziativ*, d.h. i.Allg. (also für Vektoren, die nicht gerade paarweise parallel sind) gilt

$$\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- 2) Eine Gleichung $\vec{n} \cdot \vec{x} = \alpha$ kann *nicht* eindeutig gelöst werden, es gibt also keine “Division durch einen Vektor”

Dreiecksungleichung

Aus der der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$, siehe (2.4.9), kann man auch sofort die **Dreiecksungleichung**

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (2.4.15)$$

herleiten:

$$\begin{aligned} \left(|\vec{a} + \vec{b}|\right)^2 &= (\vec{a} + \vec{b})^2 \stackrel{\text{Linearität (ii)}}{=} \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &\stackrel{x \leq |x|}{\leq} |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b}|^2 \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz (iv)}}{\leq} |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = \left(|\vec{a}| + |\vec{b}|\right)^2 \end{aligned}$$

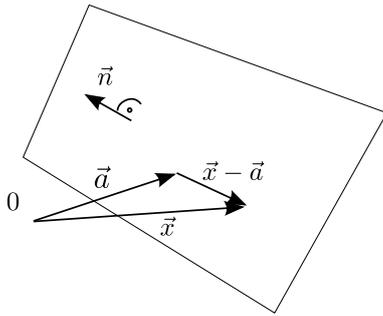
Die Dreiecksungleichung ist natürlich auch anschaulich klar: Die lange Seite $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ eines Dreiecks ist kürzer als die Summe seiner kurzen Seiten.

2.4.3 Skalarprodukt und Ebenen

Wir wollen uns abschließend die Gleichung

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \alpha \quad (2.4.16)$$

noch einmal genauer anschauen. Hierbei handelt es sich um eine **Ebenengleichung** im \mathbb{R}^3 , wie wir nun zeigen wollen.



Dazu machen wir uns zuerst klar, dass die Gl. (2.4.16) für $\alpha = 0$ eine Ebene durch den Ursprung beschreibt ($\vec{x} = \vec{0}$ erfüllt Gl. (2.4.16)) mit einem **Normalenvektor** \vec{n} , der senkrecht auf der Ebene steht. Im \mathbb{R}^3 kann man eine Ebene nämlich nicht nur durch Angabe zweier Tangentialvektoren, die in der Ebene liegen, beschreiben wie in Gl. (2.3.3), sondern auch durch Angabe eines Normalenvektors, der senkrecht auf der Ebene steht.

Dann besagt Gl. (2.4.17), dass alle Vektoren $\vec{x} - \vec{a}$ in einer Ebene mit Normalenvektor \vec{n} durch den Ursprung liegen.

Damit liegen alle Punkte \vec{x} in einer parallelen Ebene durch den Aufpunkt \vec{a} .

Ist die Ebene parallel verschoben aus dem Ursprung und geht durch einen Aufpunkt \vec{a} , liegen alle Vektoren $\vec{x} - \vec{a}$ in einer Ebene mit Normalenvektor \vec{n} durch den Ursprung. Damit erfüllt die verschobene Ebene die Gleichung

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) &= 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{x} &= \vec{n} \cdot \vec{a} = \alpha.\end{aligned}\tag{2.4.17}$$

$\alpha = \vec{n} \cdot \vec{a}$ ist dann gerade die Projektion des Aufpunktvektors auf den Normalenvektor mal der Länge von $|\vec{n}|$. Wenn der Normalenvektor die Länge $|\vec{n}| = 1$ hat, ist damit α genau die Projektion des Aufpunktvektors auf den Normalenvektor und damit der Abstand der Ebene vom Ursprung.

2.5 Vektorprodukt

Das **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** oder **äußeres Produkt** $\vec{a} \times \vec{b}$ (oder $\vec{a} \wedge \vec{b}$ in engl. Literatur) zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist selbst wieder ein **Vektor** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ mit

- 1) einer **Richtung**, die durch

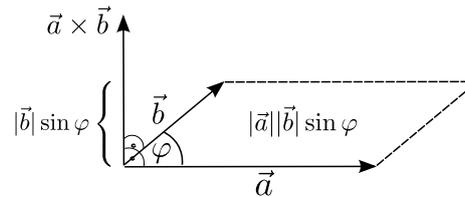
$$\boxed{\vec{c} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{c} \perp \vec{b}} \quad (2.5.1)$$

gegeben ist, d.h. das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Normalenvektor zur ab-Ebene, die durch die Tangentialvektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird,

- 2) einer **Länge**

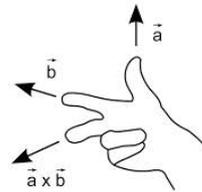
$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi} \quad (2.5.2)$$

die durch den **Flächeninhalt** des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms gegeben ist.



- 3) einer **Orientierung**:

die Orientierung von \vec{c} ist so gewählt, dass die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ein **Rechtssystem** bilden, d.h. der "rechte-Hand-Regel" folgen.



Das Vektorprodukt besitzt folgende wichtige **Eigenschaften**:

- (i) Es ist **antisymmetrisch** (weil sich bei Vertauschung von \vec{a} und \vec{b} die Orientierung genau ändert):

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (2.5.3)$$

- (ii) Es gilt **Linearität**:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (2.5.4)$$

$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.5.5)$$

- (iii) Es gilt $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ (wegen $\sin \varphi = 0$).

Da $\sin \varphi = 0$ für parallele Vektoren, gilt

$$\boxed{|\vec{a}||\vec{b}| \text{ (} \vec{a} \text{ parallel } \vec{b} \text{)} \iff \sin \varphi = 0 \iff \vec{a} \times \vec{b} = 0} \quad (2.5.6)$$

(wenn $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$).

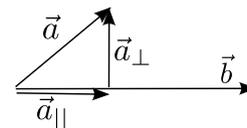
Wenn wir einen Vektor \vec{a} in Komponenten parallel zu \vec{b} und senkrecht zu \vec{b} aufteilen,

$$\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp},$$

dann gilt also für Skalar- und Vektorprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_{||} \cdot \vec{b} = |\vec{a}_{||}||\vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}$$



Für die kartesischen Einheitsvektoren gilt

$$\boxed{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0} \quad (2.5.7)$$

Die erste Formel besagt, dass die kartesischen Einheitsvektoren in x-, y- und z-Richtung in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Mit Hilfe von (2.5.7) können wir dann auch das Vektorprodukt zweier Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^3 mit Hilfe ihrer kartesischen Koordinaten berechnen. Dazu benutzen wir die Linearitätseigenschaft (ii) des Vektorproduktes, die ein "Ausmultiplizieren" erlaubt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\ &\stackrel{\text{Ausmultiplizieren, (2.5.7)}}{=} (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

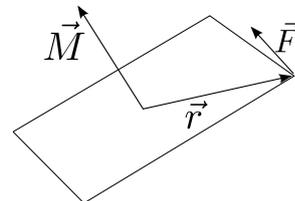
also

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}} \quad (2.5.8)$$

Um die 1. Komponente zu berechnen, multipliziert man die 2. und 3. Komponenten "über Kreuz". Dann geht man zyklisch, d.h. in der Reihenfolge 1231231... weiter: Um die 2. Komponente zu berechnen, multipliziert man die 3. und 1. Komponenten "über Kreuz" und um die 3. Komponente zu berechnen, die 1. und 2. Komponenten.

Wir bemerken, dass sich das Kreuzprodukt nicht so offensichtlich und einfach wie das Skalarprodukt auf den allgemeinen Fall von Vektoren im \mathbb{R}^n verallgemeinern lässt. Wir überlassen dies den Mathematikern.

Das Kreuzprodukt ist insbesondere bei der mathematischen Beschreibung von Drehbewegungen wichtig in der Physik. Das Drehmoment, das man von den Hebelgesetzen als "Kraft mal Hebelarm" kennt, ist ein Beispiel für eine physikalische Größe, die sich nur mit Hilfe des Kreuzproduktes korrekt formulieren lässt. Das Drehmoment Kraft \vec{F} mal Hebelarm \vec{r} setzt einen Körper in Drehbewegung um eine Drehachse, die durch den Ursprung $\vec{r} = 0$ unseres Koordinatensystems geht. Dabei kann natürlich nur die Komponente \vec{F}_\perp senkrecht zum Angriffspunkt \vec{r} eine Drehbewegung verursachen. Die Drehachse wird außerdem senkrecht auf \vec{r} und \vec{F} stehen. Daher ist die Definition $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ des Drehmomentes mit Hilfe des Kreuzproduktes als ein Vektor in Richtung der Drehachse hier sinnvoll. Sie werden in der Physik1-Vorlesung sehen, dass es auch genau die so definierten Drehmoment-Vektoren sind, die sich bei einem Hebelgleichgewicht zu Null addieren müssen.



2.6 Kombinierte Produkte

Im \mathbb{R}^3 können wir nun auch verschiedene **mehrfache** Produkte betrachten, wo wir auch Kreuz- und Skalarprodukte kombinieren können.

2.6.1 Spatprodukt

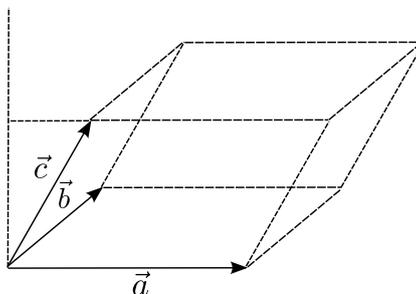
Das wichtigste Produkt dieser Art ist das **Spatprodukt**

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \text{Volumen des durch } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ aufgespannten Parallelepipeds} \quad (2.6.1)$$

Das Spatprodukt hat die wichtige Eigenschaft

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \quad (2.6.2)$$

d.h. es ist invariant unter *zyklischer Vertauschung*. Dies kann man durch Ausschreiben in den Komponenten zeigen, was allerdings ein etwas länglicher Beweis ist, den wir hier nicht aufschreiben.



Es gibt auch eine enge Verbindung zwischen dem Spatprodukt und der **Determinante** einer 3x3 Matrix. Matrizen und Determinanten werden erst weiter unten eingeführt, aber wir geben der Vollständigkeit halber diese Verbindung bereits hier an. Es gilt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (2.6.3)$$

2.6.2 ε -Tensor

Das Spatprodukt kartesischer Einheitsvektoren folgt aus den Beziehungen (2.4.11) und (2.5.7) und hat folgende Eigenschaften

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) &= \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = 1 \\ \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) &= \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = -1 \\ \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) &= 0, \quad \text{wenn } i = j \text{ oder } i = k \text{ oder } j = k \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

d.h. wenn die Indizes ijk in $\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)$ zyklisch und verschieden sind, ergibt sich +1, wenn die Indizes antizyklisch und verschieden sind, ergibt sich -1, wenn irgendwelche der Indizes übereinstimmen, ergibt sich 0.

Dies kann man verwenden, um den **total antisymmetrischen Tensor 3. Stufe**, den " ε -Tensor" zu definieren als:

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{falls } ijk \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.6.5)$$

Dieses Objekt heißt "Tensor", weil es mehr als einen Index hat und es heißt genauer "Tensor 3. Stufe", weil es 3 Indizes hat.⁵ Mit Hilfe dieses Tensors lässt sich das Kreuzprodukt (2.5.8) zweier

⁵ Tensoren in der Physik sind eigentlich noch mehr als Objekte mit einer gewissen Zahl von Indizes und definieren sich zusätzlich über ihr Transformationsverhalten beim Wechsel des Koordinatensystems. Das werden Sie aber erst im Laufe der eigentlichen Physik1- bis Physik4-Vorlesungen kennenlernen.

Vektoren \vec{a} und \vec{b} nun noch etwas kürzer schreiben:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b})_i &= \vec{e}_i \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\
 &= \vec{e}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^3 a_j \vec{e}_j \times \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_k \right) \\
 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) a_j b_k \\
 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k
 \end{aligned}$$

also

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k} \quad (2.6.6)$$

Oft werden in der Physikkliteratur die Summationssymbole Σ auch ganz weggelassen, weil man vereinbart über doppelt auftretende Indizes zu summieren ("Einsteinsche Summenkonvention").

2.6.3 Doppeltes Kreuzprodukt

Schließlich betrachten wir noch doppelte Kreuzprodukte der Form $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Für diese kann man die sogenannte **bac-cab Formel** zeigen:

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})} \quad (2.6.7)$$

Dies kann man durch Ausschreiben in den Koordinaten nachrechnen, z.B. für die 1. Komponente:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_1 &= a_2(\vec{b} \times \vec{c})_3 - a_3(\vec{b} \times \vec{c})_2 \\
 &= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\
 &= b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\
 &= b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
 &= b_1(\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_1(\vec{a} \cdot \vec{b})
 \end{aligned}$$

Die anderen Komponenten rechnet man analog nach.

Wir machen uns auch klar, dass der Vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ senkrecht auf $(\vec{b} \times \vec{c})$ stehen muss nach (2.5.1). Nach (2.5.1) gilt aber auch, dass der Vektor $(\vec{b} \times \vec{c})$ senkrecht auf der bc-Ebene steht. Daher muss der Vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ wieder in der bc-Ebene liegen und muss sich daher als Linearkombination $\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$ schreiben lassen. Die rechte Seite in (2.6.7) ist gerade von dieser Form.

2.7 Matrizen

2.7.1 Definition

Während die Koordinaten a_i eines Vektors \vec{a} sich mit Hilfe eines Index i schreiben lassen, ist eine $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ **Matrix**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.7.1)$$

erst einmal ein Objekt, dessen Komponenten oder **Matrixelemente** $(A)_{ij} = a_{ij}$ sich nur noch mit Hilfe von 2 Indizes schreiben lassen. Der erste Index indiziert die **m Zeilen** $i = 1, \dots, m$, der zweite Index indiziert die **n Spalten** $j = 1, \dots, n$. Manchmal verwendet man auch doppelt unterstrichene Symbole $\underline{\underline{A}}$ für Matrizen.

Ein n-dimensionaler **Spaltenvektor**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2.7.2)$$

ist damit der Spezialfall einer $\mathbf{n} \times \mathbf{1}$ **Matrix**. Ein n-dimensionaler **Zeilenvektor**

$$\vec{b}^t = (b_1 \quad \dots \quad b_n) \quad (2.7.3)$$

ist damit eine $\mathbf{1} \times \mathbf{n}$ **Matrix**. Das hochgestellte “t” steht für “transponiert”.

2.7.2 Transponierte

Mit A^t bezeichnet man ganz allgemein die **zu A transponierte Matrix**, die durch Spiegelung an der Diagonalen aus A hervorgeht:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.7.4)$$

Wenn A eine $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ Matrix mit den Matrixelementen $(A)_{ij} = a_{ij}$ ist, dann ist A^t eine $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$ **Matrix** mit Matrixelementen

$$(A^t)_{ij} = (A)_{ji} = a_{ji}. \quad (2.7.5)$$

Als **Beispiel**:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.7.3 Matrixmultiplikation

Wofür brauchen wir solche Matrizen? Zum Beispiel, um ein **lineares Gleichungssystem** kompakt aufzuschreiben.

ein allgemeines **lineares Gleichungssystem** mit n Variablen x_1, \dots, x_n und m Gleichungen lässt sich in der Form

$$\boxed{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m)} \quad (2.7.6)$$

schreiben mit Koeffizienten a_{ij} und rechten Seiten b_i . Weil $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$, können wir die Koeffizienten a_{ij} in eine $m \times n$ Matrix A zusammenfassen und die Gleichungen (2.7.6) mit Hilfe der **Matrixmultiplikation** auch kompakt als

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}} \quad (2.7.7)$$

schreiben.

Allgemein definieren wir die **Matrixmultiplikation** folgendermaßen:

- 1) Die Matrixmultiplikation $A \cdot B$ einer $m_A \times n_a$ Matrix A mit einer $m_B \times n_B$ Matrix B ist nur definiert wenn

$$\boxed{n_A = m_B \quad , \quad \text{also } \# \text{ Spalten von } A = \# \text{ Zeilen von } B} \quad (2.7.8)$$

- 2) $A \cdot B$ ist dann eine $m_A \times n_B$ Matrix mit

$$\boxed{(A \cdot B)_{ij} \equiv \sum_{k=1}^{n_A} a_{ik}b_{kj} = (\text{i-ter Zeilenvektor}) \cdot (\text{j-ter Spaltenvektor})} \quad (2.7.9)$$

Das lineare Gleichungssystem (2.7.7) ist also der Spezialfall $B = \vec{x}$ mit $m_B = n = n_A$ und $n_B = 1$. Als weitere **Beispiele** betrachten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &\text{ nicht definiert} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\text{ nicht definiert} \end{aligned}$$

Aus den Regeln der Matrixmultiplikation folgt, dass das Produkt zweier **quadratischer $n \times n$ Matrizen** wieder eine $n \times n$ Matrix ist. Für quadratische $n \times n$ Matrizen gilt außerdem:

- (i) Es gilt das **Assoziativgesetz**

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C). \quad (2.7.10)$$

- (ii) Die **$n \times n$ Einheitsmatrix**

$$\boxed{\mathbb{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \text{oder} \quad (\mathbb{1})_{ij} \equiv \delta_{ij}} \quad (2.7.11)$$

ist das **neutrale Element** bezgl. Matrixmultiplikation:

$$\boxed{A \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot A = A} \quad (2.7.12)$$

(iii) Die **inverse Matrix** A^{-1} mit

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}} \quad (2.7.13)$$

existiert *nicht immer*.

Die inverse Matrix A^{-1} kann konstruiert werden, indem man folgende n lineare Gleichungen löst:

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{\mathbb{1}} \quad (2.7.14)$$

Wir müssen also n lineare Gleichungssysteme der Form $A \cdot \vec{x}_i = \vec{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$) (mit jeweils n Gleichungen für die n Variablen x_{i1}, \dots, x_{in}) lösen, um die Inverse zu bestimmen (also insgesamt n^2 lineare Gleichungen für die n^2 Elemente der inversen $n \times n$ Matrix, unten wird dies an einem Beispiel nochmal erläutert). Wenn diese n linearen Gleichungssysteme lösbar ist, existiert A^{-1} und die Matrix A heißt **invertierbar**.

Wenn die Inverse A^{-1} existiert und berechnet wurde, kann damit *jedes* andere lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (Gleichung (2.7.7)) gelöst werden, indem man auf beiden Seiten die Inverse anwendet

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

(iv) Die Matrixmultiplikation ist **nicht kommutativ**. Im allgemeinen gilt

$$A \cdot B \neq B \cdot A \quad (2.7.15)$$

Aus diesen vier Eigenschaften folgt, dass die **invertierbaren $n \times n$ Matrizen** eine (nicht-abelsche) **Gruppe** bezgl. der Matrixmultiplikation bilden, siehe Seite 13.

Als **Beispiel** für die Bestimmung einer inversen Matrix betrachten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \text{gesucht}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf 4 Gleichungen (2 lineare Gleichungssysteme für Vektoren der Dimension 2)

$$\begin{aligned} \text{I) } & 2x_{11} + 3x_{21} = 1 \\ \text{II) } & 2x_{12} + 3x_{22} = 0 \\ \text{III) } & 1x_{11} + 0x_{21} = 0 \Rightarrow x_{11} = 0 \\ \text{IV) } & 1x_{12} + 0x_{22} = 1 \Rightarrow x_{12} = 1 \end{aligned}$$

die weiter aufgelöst werden können:

$$\begin{aligned} \text{I), III) } & \Rightarrow x_{21} = 1/3 \\ \text{II), IV) } & \Rightarrow x_{22} = -2/3 \end{aligned}$$

Also insgesamt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

2.8 Weitere Matrixoperationen

2.8.1 Transponierte

Für die in (2.7.4) eingeführte **Transponierte** einer Matrix ergänzen wir einige wichtige Eigenschaften:

- 1) Die Transponierte eines Spaltenvektors \vec{x} ein Zeilenvektor \vec{x}^t und damit lässt sich ein Matrixprodukt $\vec{x}^t \cdot \vec{y}$ auch als Skalarprodukt schreiben:

$$\vec{x}^t \cdot \vec{y} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{y}}_{\text{Skalarprodukt}} \quad (2.8.1)$$

- 2) Es gilt

$$(A^t)^t = A \quad (2.8.2)$$

- 3) Für die Transponierte eines Matrixproduktes gilt

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \quad (2.8.3)$$

2.8.2 Matrixaddition

Ähnlich wie für Vektoren ist auch die **Matrixaddition** zweier $m \times n$ Matrizen elementweise definiert:

$$(A + B)_{ij} \equiv a_{ij} + b_{ij} \quad (2.8.4)$$

Als **Beispiel**:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.8.3 Skalarmultiplikation

Ähnlich wie für Vektoren ist auch die **Skalarmultiplikation** einer $m \times n$ Matrix mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ elementweise definiert:

$$(\alpha A)_{ij} \equiv \alpha a_{ij} \quad (2.8.5)$$

Als **Beispiel**:

$$2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.9 Lineare Abbildungen

$m \times n$ Matrizen sind sehr eng mit sogenannten **linearen Abbildungen** des Vektorraumes \mathbb{R}^n auf den Vektorraum \mathbb{R}^m verknüpft. Man nennt eine Abbildung $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **linear**, wenn die Vektoraddition und Skalarmultiplikation mit der Abbildung “verträglich” ist:

$$\mathcal{A}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \mathcal{A}(\vec{x}) + \beta \mathcal{A}(\vec{y}) \quad (2.9.1)$$

Man kann lineare Abbildungen auch geometrisch charakterisieren, als diejenigen Abbildungen, die Geraden (im \mathbb{R}^n) auf Geraden (im \mathbb{R}^m) abbilden.

Alle diese linearen Abbildungen können dann mit Hilfe einer bestimmten $m \times n$ Matrix als

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \quad (2.9.2)$$

geschrieben werden.⁶ Der Grund dafür ist letztendlich, dass auch die Matrixmultiplikation linear ist:

$$A \cdot (\alpha B + \beta C) = \alpha A \cdot B + \beta A \cdot C \quad (2.9.3)$$

Dieser enge Zusammenhang mit linearen Abbildungen von Vektoren auf Vektoren ist ein weiterer wichtiger Grund, warum Matrizen an vielen Stellen in der Physik auftreten. Zum einen bilden alle Koordinatentransformationen (z.B. beim Wechsel des Bezugssystems) Ortsvektoren auf Ortsvektoren ab und sind damit durch Matrizen darstellbar. Zum anderen gibt es viele physikalische Zusammenhänge zwischen vektoriellen Größen, z.B. der Zusammenhang zwischen dem Vektor Kraft und dem Vektorfeld, das die Verformungen eines Körpers beschreibt, wenn wir die Kraft auf den Körper wirken lassen. Ein anderes Beispiel (aus der Physik1) ist der Zusammenhang zwischen dem Vektor Drehimpuls und dem Vektor, der die Winkelgeschwindigkeit beschreiben wird (Drehachse und Rotationsgeschwindigkeit). Solche physikalischen Zusammenhänge lassen sich nur durch Matrizen mathematisch beschreiben.

Die **Hintereinanderausführung** (Verknüpfung) zweier linearer Abbildungen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit zugehöriger $m \times n$ Matrix A und $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit zugehöriger $k \times m$ Matrix B kann dann mit Hilfe des **Matrixproduktes** $A \cdot B$ geschrieben werden:

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x})) = (B \cdot A) \cdot \vec{x} \quad (2.9.4)$$

Wir betrachten nun speziell lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}) \end{aligned}$$

und wollen die 3×3 Matrix A bestimmen, die zur linearen Abbildung \mathcal{A} gehört:

- Wir benutzen zunächst, dass für den Bildvektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\vec{y} \cdot \vec{e}_i = y_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.9.5)$$

⁶ Die Matrix A heißt dann auch **darstellende Matrix** oder **Abbildungsmatrix** der linearen Abbildung \mathcal{A} . In der Mathematik werden Sie auch darstellende Matrizen allgemeiner linearer Abbildungen $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ zwischen zwei beliebigen Vektorräumen bezüglich einer Basis im “Quellraum” V und einer Basis im “Zielraum” W kennenlernen.

- Dann betrachten wir die Bilder der Einheitsvektoren $\mathcal{A}(\vec{e}_i) \in \mathbb{R}^3$ und definieren

$$\boxed{a_{ij} \equiv \mathcal{A}(\vec{e}_j) \cdot \vec{e}_i} \quad (2.9.6)$$

- Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} y_i &\stackrel{(2.9.5)}{=} \mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{e}_i = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^3 x_j \vec{e}_j\right) \cdot \vec{e}_i \\ &\stackrel{(2.9.1)}{=} \sum_{j=1}^3 x_j \underbrace{\mathcal{A}(\vec{e}_j) \cdot \vec{e}_i}_{= a_{ij}} \\ &\stackrel{(2.9.6)}{=} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \end{aligned}$$

also tatsächlich $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ mit der in (2.9.6) definierten Matrix $(A)_{ij} = a_{ij}$.

Wir betrachten ein **Beispiel**, und zwar die Abbildung, die durch das Vektorprodukt mit einem festen Vektor $\vec{\omega}$ definiert ist:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{x}$$

Diese Abbildung ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, weil des Kreuzprodukt linear ist. Also muss sie sich auch durch eine Matrix A schreiben lassen, die wir nun bestimmen möchten. Nach unserer Vorschrift (2.9.6) können wir die Matrixelemente a_{ij} aus

$$a_{ij} = (\vec{\omega} \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_i \stackrel{\text{Spatprodukt}}{=} (\vec{e}_j \times \vec{e}_i) \cdot \vec{\omega}$$

bestimmen. Als Übung zeigen Sie leicht selbst

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9.7)$$

2.10 Spezielle quadratische Matrizen

Es gibt einige spezielle Arten quadratischer $n \times n$ Matrizen, die auch in der Physik eine wichtige Rolle spielen.

Symmetrische Matrizen sind "spiegelsymmetrisch",

$$\boxed{A = A^t} \quad (2.10.1)$$

also z.B.

$$A = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Antisymmetrische Matrizen sind "spiegel-antisymmetrisch", also

$$\boxed{A = -A^t} \quad (2.10.2)$$

Ein Beispiel ist die Matrix (2.9.7) oben.

Orthogonale Matrizen sind durch die Eigenschaft

$$\boxed{A \cdot A^t = A^t \cdot A = \mathbb{1} \text{ , also } A^{-1} = A^t} \quad (2.10.3)$$

definiert. Das Inverse einer orthogonalen Matrix ist also ihre Transponierte. Solche orthogonalen Matrizen sind in der Physik sehr wichtig bei der Beschreibung von **Drehungen**.

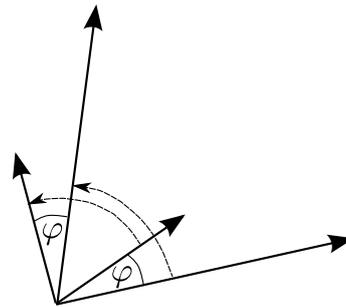
Eine **Drehung** ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die **Winkel und Längen** von Vektoren – also deren Skalarprodukte – nicht ändert:

- also gilt für eine Drehmatrix D insbesondere

$$(D \cdot \vec{e}_i) \cdot (D \cdot \vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (2.10.4)$$

- allgemein gilt

$$\begin{aligned} (A \cdot \vec{x}) \cdot (B \cdot \vec{y}) &= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \sum_k b_{ik} y_k \right) \\ &= \sum_j \left(x_j \underbrace{\sum_i \sum_k a_{ij} b_{ik} y_k}_{= (A^t \cdot B \cdot \vec{y})_j} \right) \\ &= \vec{x} \cdot (A^t \cdot B \cdot \vec{y}) \end{aligned}$$



Also folgt aus (2.10.4)

$$\vec{e}_i \cdot (D^t \cdot D \cdot \vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

Da dies für alle i und j gilt, heißt das aber

$$\boxed{D^t \cdot D = \mathbb{1}} \quad (2.10.5)$$

und jede Drehmatrix ist also orthogonal.

Als **Beispiel** betrachten wir eine Drehung um die z -Achse um den Winkel φ . Eine solche Drehung wird durch eine Matrix

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad (2.10.6)$$

beschrieben.

2.11 Determinante

Eine wichtige Zahl, die jede quadratische Matrix kennzeichnet, ist ihre **Determinante**.

Wir betrachten zunächst einer beliebige 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Das Inverse ist dann

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (2.11.1)$$

Verifizieren Sie selbst, dass $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1} = A^{-1} \cdot A$ gilt!

Dieses Inverse existiert offensichtlich nur, wenn $ad - cb \neq 0$. Diese Größe heißt **Determinante** der 2×2 Matrix,

$$\det A = |A| \equiv ad - cb \quad (2.11.2)$$

Wenn wir die Determinante einer 2×2 somit definiert haben, können wir die Determinante einer beliebigen größeren $n \times n$ Matrix nun rekursiv definieren über die **Entwicklung nach Unterdeterminanten**:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - \dots + a_{1n}A_{1n} \quad (2.11.3)$$

wobei A_{kl} die **Unterdeterminante** derjenigen $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist, die durch Streichen der Zeile k und Spalte l entsteht. Die Entwicklung (2.11.3) ist genauer die Entwicklung nach der ersten Zeile der Matrix.

Für eine 3×3 Matrix ergibt dies beispielsweise

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{= A_{11}} - a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{= A_{12}} + a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{= A_{13}}$$

Dann geht es weiter mit (2.11.2) für die 2×2 Unterdeterminanten. Das Endergebnis für die 3×3 Matrix lässt sich dann auch mit Hilfe des Spatproduktes schreiben:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (2.11.4)$$

siehe auch Gl. (2.6.3). Dies ist gleich dem Volumen des von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Parallelepipeds.

Wir geben jetzt (ohne Beweis) einige wichtige **Eigenschaften** der Determinante an:

- 1) Die Determinante ist linear in **jeder** Zeile oder Spalte (dies wird auch als **multilinear** be-

zeichnet):

$$\begin{vmatrix} \dots & & \\ \lambda \vec{a}^t + \mu \vec{b}^t & & \\ \dots & & \\ \dots & & \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \dots & & \\ \vec{a}^t & & \\ \dots & & \\ \dots & & \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \dots & & \\ \vec{b}^t & & \\ \dots & & \\ \dots & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vec{b} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

2) Jedes Vertauschen von 2 *benachbarten* Zeilen oder Spalten gibt einen Faktor (-1) :

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \vec{a}^t & \dots \\ \dots & \vec{b}^t & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \vec{b}^t & \dots \\ \dots & \vec{a}^t & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

3)

$$\det A = \det A^t \tag{2.11.5}$$

4) Es gilt der **Multiplikationssatz**

$$\boxed{\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B)} \tag{2.11.6}$$

5)

$$\det \mathbb{1} = 1 \tag{2.11.7}$$

Aus dem Multiplikationssatz folgt dann

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det \mathbb{1} = 1$$

also gilt für die Determinante der Inversen

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}} \tag{2.11.8}$$

Außerdem gilt für eine beliebige $n \times n$ Matrix

$$\boxed{A \text{ invertierbar} \iff \det A \neq 0} \tag{2.11.9}$$

Für lineare Gleichungssysteme ergibt sich damit

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{lineares Gleichungssystem } A \cdot \vec{x} = \vec{b} \text{ eindeutig lösbar} \\ \iff A \text{ invertierbar, } \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \iff \det A \neq 0 \end{array}}$$

Der Multiplikationssatz hat außerdem eine wichtige Konsequenz für orthogonale Drehmatrizen D , die ja $D \cdot D^t = \mathbb{1}$ erfüllen:

$$(\det D)^2 = (\det D)(\det D^t) = \det(\underbrace{D \cdot D^t}_{= \mathbb{1}}) = 1$$

also gilt $\det D = \pm 1$. Genauer unterscheidet man

eigentliche Drehung	$\det D = +1$
Drehspiegelung	$\det D = -1$

(2.11.10)

Man kann Drehmatrizen also auch an ihrer Determinante erkennen.

Wir haben Determinanten rekursiv definiert. Man kann auch eine explizite Berechnungsformel für eine $n \times n$ Matrix A mit Elementen a_{ij} angeben, die sogenannte **Leibniz-Formel**

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)$	(2.11.11)
---	-----------

Hier ist S_n die sogenannte **symmetrische Gruppe der Permutationen** vom Grad n , also der n Elemente $(1, \dots, n)$. Jedes Element $\sigma \in S_n$ ist eine Permutation dieser n Elemente, also

$$\sigma : (1, \dots, n) \rightarrow (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$$

Solche Permutationen können als Produkte von **Vertauschungen (Transpositionen)** von jeweils 2 Elementen dargestellt werden. Das **Vorzeichen** $\operatorname{sgn}(\sigma)$ einer Permutation ist $+1$ (-1), wenn sie als Verkettung einer geraden (ungeraden) Anzahl von Transpositionen dargestellt werden kann.

2.12 Übungen Kapitel 2

1. Rechnen mit Vektoren

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$

c) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$

d) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$

Fertigen Sie zu Teil a) eine Skizze an.

2. Geraden

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 21 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fertigen Sie eine Skizze an.

3. Kreisgleichung

Im zweidimensionalen Raum ist ein Kreis gegeben durch

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^2 = 5^2.$$

a) Befinden sich folgende Punkte innerhalb, außerhalb oder auf dem Kreis?

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Fertigen Sie eine Skizze an.

b) Geben Sie eine Gleichung für die Tangente an den Kreis an in demjenigen der vier Punkte, der auf dem Rand liegt.

c) Geben Sie eine Gleichung an für eine Gerade, die orthogonal zu der Tangente durch diesen Punkt geht.

4. Kosinussatz

Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung und des Skalarproduktes den Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

in einem Dreieck mit Seiten a , b und c und γ der der Seite c gegenüberliegende Winkel.

Tipp: Bilden Sie Vektoren aus den Dreiecksseiten (z.B. so, dass $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$) und betrachten Sie $\vec{c} \cdot \vec{c}$.

5. Sinussatz

Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung und des Skalarproduktes den Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{abc}{2A}$$

in einem Dreieck mit Seiten a , b und c und α , β , γ als den Seiten gegenüberliegende Winkel. A ist der Flächeninhalt des Dreiecks.

Tipp: Bilden Sie Vektoren aus den Dreiecksseiten (z.B. wieder mit $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$) und betrachten Sie $|\vec{a} \times \vec{b}|$, $|\vec{b} \times \vec{c}|$ und $|\vec{a} \times \vec{c}|$. Wie hängt die Dreiecksfläche A mit $|\vec{a} \times \vec{b}|$, $|\vec{b} \times \vec{c}|$ und $|\vec{a} \times \vec{c}|$ zusammen?

6. Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (etwas schwerer)

Zeigen Sie im Vektorkalkül, dass sich die Seitenhalbierenden in einem Dreieck ABC in einem Punkt schneiden.

Anleitung: Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in Punkt A und nennen $\vec{a} \equiv \vec{AB}$ und $\vec{b} \equiv \vec{AC}$. Stellen Sie Geradengleichungen für die 3 Seitenhalbierenden auf; alle Geradengleichungen können durch die Vektoren \vec{a} und \vec{b} ausgedrückt werden. Geradenschnittpunkte können dann durch Koeffizientenvergleich bezüglich der zwei linear unabhängigen Vektoren \vec{a} und \vec{b} berechnet werden.

7. Vektorräume

Benutzen Sie die Vektorraumaxiome, um $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, Gl. (2.2.8), zu zeigen.

8. Lineare Unabhängigkeit

Sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} aus Aufgabe 1 linear unabhängig?

9. Produkte

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{a} \times \vec{c}$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$

c) Den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} mit Hilfe des Skalarproduktes

d) Den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} mit Hilfe des Vektorproduktes

10. Matrixmultiplikation

Gegeben sind Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie (falls möglich) die Produkte AB , BA , A^2 , B^2

b) Gegeben sei außerdem der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Was erhält man für $C(\phi) \cdot \vec{d}$ für $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$?

11. Lineare Gleichungssysteme

Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rccccrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & = & 10 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 4 \end{array}$$

12. Inverse Matrizen

Bestimmen Sie das Inverse

a) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) der Matrix $C(\phi)$ aus Aufgabe 9.

13. Vektorprodukt

Mit welcher Matrix A kann die lineare Abbildung $\vec{x} \rightarrow \vec{\omega} \times \vec{x}$ auch als $\vec{x} \rightarrow A\vec{x}$ geschrieben werden?

14. Determinante

a) Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

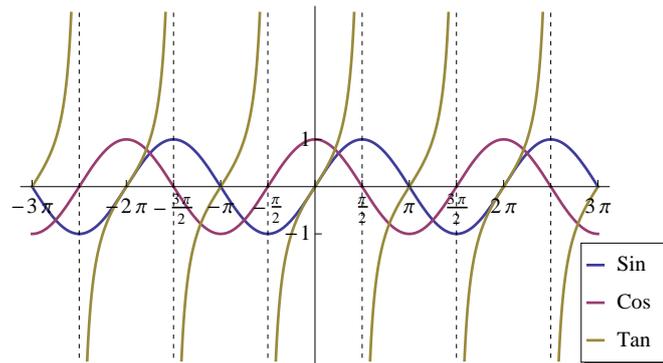
Sind die Matrizen invertierbar? (Optional: Wenn ja, berechnen Sie die Inverse.)

b) Ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rccccrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

eindeutig lösbar?

3 Analysis



$$F'(x) = f(x)$$
$$\int dx f(x) = F(x)$$

3.1 Funktionen

Wir beginnen mit einigen Begriffen zu Funktionen. Eine Funktion ist ganz allgemein eine **Abbildung** aus einem **Definitionsbereich** D in einen **Wertebereich** W :

$$f : D \rightarrow W$$

$$x \rightarrow f(x) \tag{3.1.1}$$

In der Physik und in der eindimensionalen Analysis betrachten wir insbesondere **reelle** Funktionen, wo $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$.

Es folgen einige wichtige Begriffe und Definitionen für Funktionen:

- (i) Zu jedem $x \in D$ aus dem Definitionsbereich sollte es immer *genau ein* $f(x) \in W$ aus dem Wertebereich geben, siehe Abb. 3.1.

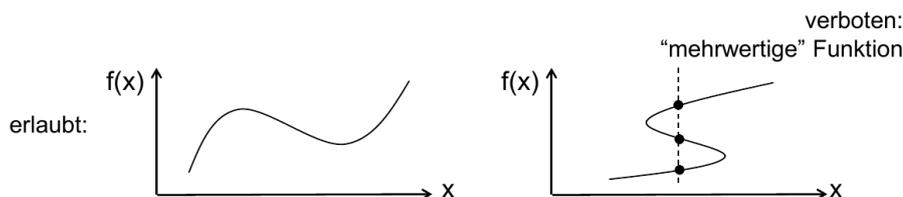
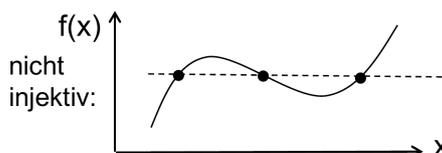


Abbildung 3.1: Der Funktionswert sollte eindeutig definiert sein. Sonst spricht man von einer "mehrwertigen Funktion".

- (ii)

Eine Funktion f heißt **injektiv**, wenn es auch umgekehrt zu jedem $y \in W$ *genau ein* $x \in D$ gibt mit $y = f(x)$. Die Funktion f ist dann **lokal umkehrbar**.



- (iii) Eine Funktion f heißt **surjektiv**, wenn $f(D) = W$ und jeder Wert aus dem Wertebereich "erreicht" werden kann.

- (iv) Eine Funktion f heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv *und* surjektiv ist.

- (v) Wenn eine Funktion bijektiv ist, gibt es eine **Umkehrfunktion** $f^{-1} : W \rightarrow D$ mit

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ und } f(f^{-1}(y)) = y$$

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x \tag{3.1.2}$$

- (vi) Die **Komposition (Hintereinanderausführung)** von Funktionen wird als

$$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x))$$

geschrieben.

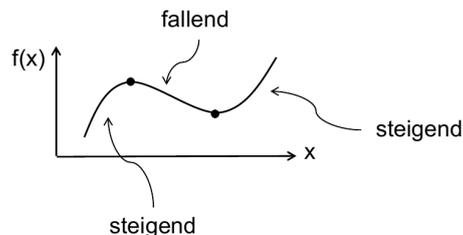
- (vii)

Eine Funktion f heißt **monoton steigend**, wenn

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

und **monoton fallend**, wenn

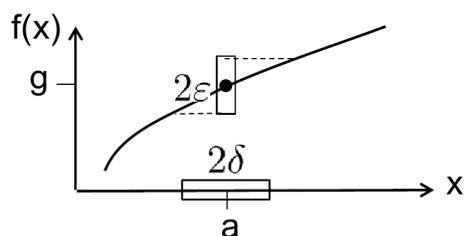
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



3.2 Differenzieren

3.2.1 Grenzwerte, Stetigkeit

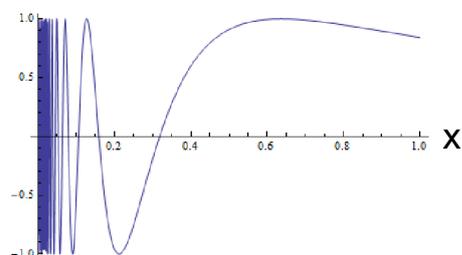
Wir sagen, dass eine Funktion $f(x)$ gegen einen **Grenzwert** oder **Limes** g **konvergiert**, wenn x gegen a geht und schreiben dafür $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$, wenn folgendes gilt:



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \quad (3.2.1)$$

¹ Man muss also durch Einengung der x -Werte auf ein Intervall der Länge 2δ um a die Funktionswerte auf ein beliebig kleines Intervall der Länge 2ε um den Grenzwert g einengen können (siehe Bild rechts).

Ein Beispiel für einen Grenzwert, der nicht existiert, ist $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$, da die Funktion beliebig schnell zwischen -1 und 1 oszilliert wenn x immer kleiner wird, lassen sich die Funktionswerte nicht auf ein beliebig kleines Intervall einengen und es existiert kein Grenzwert.



Man kann auch Grenzwerte definieren, wenn wir x gegen “unendlich” (Symbol ∞) bzw. “minus unendlich” (Symbol $-\infty$) gehen lassen, also beliebig groß oder beliebig klein machen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists S > 0 : x > S \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \quad (3.2.2)$$

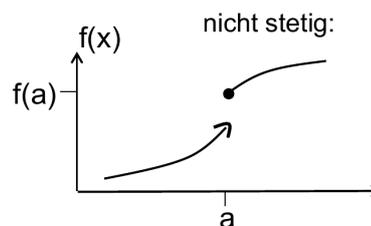
z.B. wird die Funktion $f(x) = 1/x$ immer kleiner für immer größere x und es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$.

Den Grenzwertbegriff können wir benutzen, um **Stetigkeit** einer Funktion f zu definieren:

$$f \text{ stetig in } a \in D \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(3.2.3)

Eine stetige Funktion konvergiert also in jedem Punkt gegen ihren Funktionswert. Anschaulich heißt dies, dass die Funktion *keine Sprünge* aufweist wie das Gegenbeispiel im Bild rechts.



Zur Stetigkeit gibt es folgende wichtigen mathematischen Sätze:

¹ Wir führen hier zwei neue mathematische Symbole für sogenannte **Quantoren** ein, die beschreiben, für welche Elemente einer Menge die Aussagen nach dem Doppelpunkt gelten:

- \forall (umgedrehtes “A”) steht für “für alle”
- \exists (umgedrehtes “E”) steht für “es existiert ein”.

Damit heißt die Aussage auf der rechten Seite von (3.2.1): Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass aus $|x - a| < \delta$ folgt: $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Außerdem bezeichnet “ $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ ” ein definierendes Äquivalenzzeichen.

(i) Wenn $f(x)$ und $g(x)$ stetig sind, dann sind auch

$$f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}, f^{-1}$$

stetig.

(ii) Alle “üblichen” Funktionen wie Polynome, rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus sind stetig.

3.2.2 Differentiation

Die **Steigung** einer Funktion $f(x)$ in x_0 kann durch Konstruktion einer **Tangente** an den Graphen von $f(x)$ in $x = x_0$ berechnet werden. Dazu betrachten wir die Änderung $\Delta f \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ der Funktion über das Intervall Δx und definieren den **Differenzenquotienten**

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Mit Hilfe dieses Differenzenquotienten können wir die **Sekantengleichung**

$$s(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0)$$

angeben, d.h. die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ und einen zweiten Punkt $(x, f(x))$.

Im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ wird daraus die Tangentengleichung und wir definieren die **Steigung der Tangente** als **Ableitung** von f in x_0 :

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} \quad (3.2.4)$$

In der Physik betrachten wir sehr oft zeitabhängige Funktionen $f = f(t)$ und deren Ableitungen nach der Zeit. Diese werden dann auch gerne mit einem “Punkt” geschrieben:

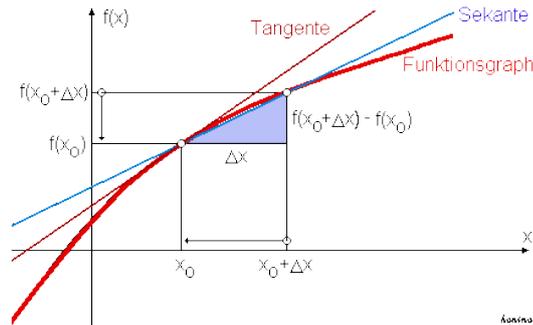
$$\dot{f}(t_0) \equiv \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0}$$

Damit in der Definition (3.2.4) der Grenzwert auf der rechten Seite überhaupt existiert, muss auf jeden Fall der Zähler verschwinden bei $\Delta x \rightarrow 0$. Daher gilt:

$$f \text{ differenzierbar in } x_0 \Rightarrow f \text{ stetig in } x_0$$

Differenzierbarkeit ist also die “stärkere” Eigenschaft als Stetigkeit.

Ein wichtiges Beispiel für eine Funktion, die stetig, aber nicht differenzierbar ist, ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ im Punkt $x = 0$. Differenzierbarkeit heißt, dass wir eine eindeutige Tangente an den Funktionsgraphen legen können. Bei Funktionen mit “Kinken” oder “Zacken” wie der Betragsfunktion im Punkt $x = 0$ geht das offensichtlich nicht. Diese Funktion ist nicht differenzierbar: Wegen $(f(\Delta x) - f(0))/\Delta x = |\Delta x|/\Delta x$, ergibt sich nicht eindeutig +1, wenn man Δx von oben gegen Null gehen lässt, aber -1, wenn man Δx von unten gegen Null gehen lässt.



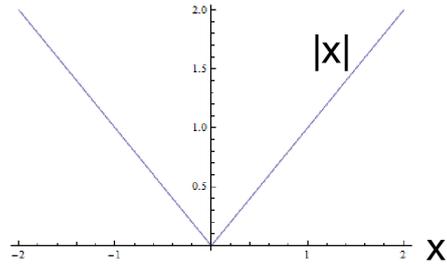
Auch für die Differenzierbarkeit gilt:

- (i) Wenn $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar sind, dann sind auch

$$f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}, f^{-1}$$

differenzierbar.

- (ii) Alle "üblichen" Funktionen wie Polynome, rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus sind differenzierbar.



3.2.3 Ableitungsregeln

Überaus wichtig für das tägliche Rechnen sind natürlich die **Ableitungsregeln**:

- (i) Sind f und g differenzierbare Funktionen, dann gilt

$$\boxed{(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).} \quad (3.2.5)$$

Die Ableitung ist also eine **lineare** Operation.

- (ii) Es gilt die **Produktregel**

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).} \quad (3.2.6)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} &= \\ &= \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

- (ii) Es gilt die **Kettenregel**

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)} \quad (3.2.7)$$

oder

$$\boxed{\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx}} \quad (3.2.8)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} &= \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &\stackrel{\Delta g \equiv g(x + \Delta x) - g(x)}{=} \frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta g} \frac{\Delta g}{\Delta x} \\ &\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta g \rightarrow 0} f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

(iv) Das wichtigste Beispiel ist die **Ableitung von Potenzfunktionen**:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{für alle ganzen } n \text{ (auch negative)} \quad (3.2.9)$$

Beweis:

Für $n = 0$ ist $x^0 = 1$ eine konstante Funktion mit $(x^0)' = 0$.

Für natürliche $n = 1, 2, \dots$ folgt die Regel aus dem **binomischen Satz**

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad (3.2.10)$$

mit dem **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{i} \equiv \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i} \quad (3.2.11)$$

wo $i! \equiv 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i$ die **Fakultät** ist.

Mit dem binomischen Satz (3.2.10) gilt

$$\begin{aligned} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} &= \frac{(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} \Delta x^i) - x^n}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots - x^n \right) \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \dots \\ &\stackrel{\Delta x \rightarrow 0}{=} nx^{n-1} \end{aligned}$$

Damit ist (3.2.9) für positive n gezeigt.

Für negative Potenzen x^{-n} ($n = 1, 2, \dots$) nutzen wir die Beziehung $1 = x^{-n} \cdot x^n$ und leiten auf beiden Seiten der Gleichung nach x ab, wobei wir rechts die Produktregel beachten:

$$\begin{aligned} 0 = 1' &= (x^n \cdot x^{-n})' = (x^n)'x^{-n} + x^n(x^{-n})' \\ &= nx^{n-1}x^{-n} + x^n(x^{-n})' = nx^{-1} + x^n(x^{-n})' \end{aligned}$$

Durch Umstellen folgt auch wieder die Regel (3.2.9) für $-n$:

$$(x^{-n})' = -\frac{nx^{-1}}{x^n} = -nx^{-n-1}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

(v) Es gilt die **Quotientenregel**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (3.2.12)$$

Beweis:

Zuerst bekommen wir aus $(1/x)' = -1/x^2$ in Kombination mit der Kettenregel (3.2.7)

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{1}{g(x)^2}g'(x)$$

und dann weiter mit der Produktregel (3.2.6)

$$\begin{aligned} \left(f \frac{1}{g}\right)' &= f(x) \left(\frac{1}{g}\right)'(x) + f'(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

(vi) Für die Ableitung der **Umkehrfunktion** gilt

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}} \quad (3.2.13)$$

Beweis:

Diese Regel folgt aus $f(f^{-1}(y)) = y$ (also der Definition der Umkehrfunktion, siehe (3.1.2)), indem wir auf beiden Seiten nach y ableiten und dabei die Kettenregel (3.2.7) benutzen:

$$1 = y' = (f(f^{-1}(y)))' = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y)$$

woraus sich sofort (3.2.13) ergibt.

3.2.4 Höhere Ableitungen

Wenn f in seinem ganzen Definitionsbereich D differenzierbar ist, dann definiert die Ableitung $f'(x)$ eine neue Funktion auf D . Wenn die Ableitungsfunktion $f'(x)$ auch wieder differenzierbar ist, können wir die **zweite Ableitung** definieren:

$$\boxed{f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_x \equiv (f')'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)} \quad (3.2.14)$$

Dies können wir natürlich weiterführen und eine **n-te Ableitung** definieren:

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_x \equiv \underbrace{\frac{d}{dx} \dots \frac{d}{dx}}_{n\text{-mal}} f} \quad (3.2.15)$$

Als Beispiel betrachten wir die höheren Ableitungen von x^n :

$$\begin{aligned} (x^n)' &= nx^{n-1} \\ (x^n)'' &= n(n-1)x^{n-2} \\ (x^n)^{(3)} &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \end{aligned}$$

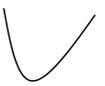
3.2.5 Kurvendiskussion

Ableitungen sind sehr nützlich bei der **Kurvendiskussion**, wo wir uns den Verlauf eines Funktionsgraphen und die Lage der Maxima, Minima, Sattelpunkte und Wendepunkte klarmachen. Es gilt:

(i)

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff f \text{ streng monoton steigend bei } x \\ f'(x) < 0 &\iff f \text{ streng monoton fallend bei } x \end{aligned}$$

(ii)

$$f''(x) > 0 \iff f \text{ "nach oben" gekrümmt (konvex) bei } x$$

$$f''(x) < 0 \iff f \text{ "nach unten" gekrümmt (konkav) bei } x$$


(iii)

$$f \text{ hat } \mathbf{Extremum} \text{ bei } x \Rightarrow f'(x) = 0 \quad (3.2.16)$$

d.h. $f'(x) = 0$ ist *notwendig* für ein Extremum. *Hinreichende* Bedingungen für ein Minimum oder Maximum sind

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ hat } \mathbf{Minimum} \text{ bei } x$$


$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ hat } \mathbf{Maximum} \text{ bei } x$$


In einem Sattelpunkt verschwindet die erste Ableitung, die Funktion hat aber *kein* Extremum. Für Sattelpunkte gilt die notwendige Bedingung

$$f \text{ hat } \mathbf{Sattelpunkt} \text{ bei } x \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) = 0$$


Hinreichend ist z.B.

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0 \Rightarrow f \text{ hat } \mathbf{Sattelpunkt} \text{ bei } x$$

Ein Wendepunkt ist definiert als Punkt, an dem das Vorzeichen der Krümmung wechselt:

$$f''(x) = 0 \text{ und } f'' \text{ wechselt Vorzeichen bei } x \Rightarrow f \text{ hat } \mathbf{Wendepunkt} \text{ bei } x$$


Die erste Ableitung enthält also die Information über die **Steigung** des Funktionsgraphen, die zweite Ableitung die Information über die **Krümmung** des Graphen.

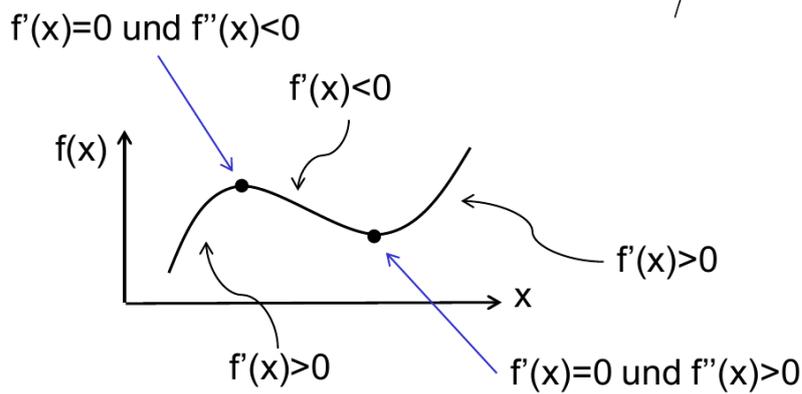


Abbildung 3.2: Schematische Kurvendiskussion.

3.3 Wichtige Funktionen und ihre Ableitungen

In diesem Abschnitt wiederholen wir nochmal die Definitionen der wichtigsten Funktionen (die aus der Schule aber auch bekannt sein sollten) und ihre Ableitungen (sollten mehrheitlich auch bekannt sein).

Polynome

Das allgemeinste **Polynom vom Grade n** lautet:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k \quad (3.3.1)$$

mit **Koeffizienten** a_k . Wichtigste Beispiele sind **Konstanten** (Polynom vom Grad 0), **lineare Funktionen** oder Geraden (Polynom vom Grad 1) und **quadratische Funktionen** oder Parabeln (Polynom vom Grad 2).

Die Ableitung eines solchen Polynoms folgt sofort aus (3.2.9):²

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} = \sum_{k=1}^n ka_kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}x^k \quad (3.3.2)$$

Nullstellen von Polynomen

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Polynomen sind ihre **Nullstellen**. Im reellen Zahlenraum hat ein Polynom n-ten Grades (mit reellen Koeffizienten) höchstens n Nullstellen z_1, \dots, z_n .³

² Im letzten Rechenschritt verschieben wir den Summationsindex, was sehr oft hilfreich sein kann:

$$\sum_{k=k_a}^{k_e} f_k = \sum_{k=k_a+1}^{k_e+1} f_{k-1} = \sum_{k=k_a-1}^{k_e-1} f_{k+1}$$

³ Wenn wir den Zahlenraum auf die komplexen Zahlen erweitern (siehe Kapitel 5), hat jedes Polynom n-ten Grades (sogar mit komplexen Koeffizienten a_n) tatsächlich *genau* n Nullstellen. Diese Lösbarkeit beliebiger komplexer Polynomgleichungen ist eine definierende Eigenschaft der komplexen Zahlen.

Für jede Nullstelle lässt sich ein **Linearfaktor** $(x - z_i)$ abspalten, und wir können ein Polynom $q(x)$ (n-1)-ten Grades finden mit

$$p(x) = (x - z_i)q(x). \quad (3.3.3)$$

Bei einer **einfachen Nullstelle** bei $x = z_i$ ist dann $q(z_i) \neq 0$. Bei einer **mehrfachen Nullstelle** können wir den entsprechenden Linearfaktor mehrmals abspalten, also bei einer doppelten Nullstelle bei $x = z_i$ gilt

$$p(x) = (x - z_i)^2 q(x) \quad \text{mit} \quad q(z_i) \neq 0.$$

Wenn wir n Nullstellen z_1, \dots, z_n finden (wobei mehrfache Nullstellen mehrfach vorkommen in dieser Liste), können wir das Polynom **vollständig in Linearfaktoren zerlegen**:

$$p(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)\dots(x - z_n). \quad (3.3.4)$$

Das Polynom $q(x)$ in Gleichung (3.3.3) wird aus $p(x)$ durch Polynomdivision durch den Linearfaktor $x - z_i$ gewonnen. Bei der Polynomdivision und der Zerlegung in Linearfaktoren macht man sich die Möglichkeit des **Koeffizientenvergleichs** zu Nutze. Das bedeutet, dass zwei Polynome n-ten Grades $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $r(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ genau dann als Funktionen übereinstimmen (d.h. es gilt $p(x) = r(x)$ für *alle* x), wenn *alle* n Koeffizienten übereinstimmen, also ⁴

$$p(x) = r(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \iff \quad a_k = b_k \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (3.3.5)$$

Wenn wir das Polynom in (3.3.4) ausmultiplizieren, können wir diesen Satz z.B. auf die Koeffizienten von x^0 anwenden und finden sofort den **Vietasche Wurzelsatz**

$$a_0 = (-1)^n z_1 z_2 \dots z_n. \quad (3.3.6)$$

Auch bei der **Polynomdivision**, d.h. der Bestimmung des Polynoms $q(x)$ (n-1)-ten Grades in Gleichung (3.3.3) macht man sich den Koeffizientenvergleich zu nutze. Wir diskutieren dies kurz an Hand eines Beispiels. Das Polynom $p(x) = x^4 - 3x^2 + 3x - 1$ hat die Nullstelle $x = 1$ (Einsetzen ergibt Null). Es muss also ein Polynom $q(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ geben mit

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 1)q(x) \\ x^4 - 3x^2 + 3x - 1 &= (x - 1)(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \\ &\stackrel{\text{Ausmultiplizieren}}{=} a_3 x^4 + (a_2 - a_3)x^3 + (a_1 - a_2)x^2 + (a_0 - a_1)x - a_0 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt dann fünf Gleichungen, die sich ausgehend vom höchsten Koeffizienten auflösen lassen:

$$\begin{aligned} a_3 &= 1, \quad a_2 - a_3 = 0, \quad a_1 - a_2 = -3, \quad a_0 - a_1 = 3, \quad -a_0 = -1 \\ \Rightarrow \quad a_3 &= 1, \quad a_2 = a_3 = 1, \quad a_1 = -3 + a_2 = -2, \quad a_0 = 3 + a_1 = 1 \end{aligned}$$

und damit

$$q(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1.$$

Für Polynome ersten Grades (lineare Funktionen) und Polynome zweiten Grades (Parabeln) können wir die Nullstellen sofort in geschlossener Form angeben. Für Polynome dritten und vierten Grades gibt es auch noch (sehr lange) geschlossene Formeln, ab $n = 5$ muss man die Nullstellen "raten" (oder Numerik zu Hilfe nehmen). Eine Gerade $p(x) = ax + b$ hat natürlich immer eine reelle Nullstelle

⁴ Dieser Koeffizientenvergleich ist tatsächlich der gleiche Koeffizientenvergleich, den wir in Kapitel 2.3.4 für Vektorräume kennengelernt haben. Man kann die Polynome nämlich auch als Linearkombination von Basis-Funktionen x^0, x^1, \dots in einem Vektorraum von Funktionen $f(x)$ auffassen.

$z_1 = -b/a$. Eine Parabel $p(x) = ax^2 + bx + c$ hat eine Nullstelle, wenn $x^2 + bx/a + c/a = 0$, d.h. es reicht aus, Nullstellen von Polynomen der Form $p(x) = x^2 + px + q$ zu suchen. Dazu müssen wir die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ lösen. Die Lösungen $x = x_{\pm}$ sind durch die **pq-Formel** gegeben (selbst nachrechnen, dass $x^2 + px + q = 0$ gilt):

$$\boxed{x_{\pm} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \quad (3.3.7)$$

Die rechte Seite ergibt keine reelle Zahl mehr, sobald $p^2 < 4q$ ist. Dann hat das Polynom keine reellen Nullstellen (wohl aber zwei komplexe Nullstellen, siehe Kapitel 5). Wenn $p^2 > 4q$ ist die rechte Seite in der pq-Formel reell und das Polynom hat zwei verschiedene reelle Nullstellen. Wenn $p^2 = 4q$ ist, gibt es eine zweifache reelle Nullstelle bei $x = -p/2$. Der Vietasche Wurzelsatz besagt hier, dass $q = x_-x_+$ gilt (selbst nachrechnen mit 3. binomischer Formel).

Rationale Funktionen

Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen

$$\boxed{r(x) = \frac{\text{Polynom } p(x)}{\text{Polynom } q(x)}} \quad (3.3.8)$$

Entsprechend leitet man diese Funktionen nach der Quotientenregel (3.2.12) ab.

Exponentialfunktion

Die **Exponentialfunktion** e^x oder $\exp(x)$ ist direkt über folgende Eigenschaft ihrer Ableitung

$$\boxed{(e^x)' = e^x} \quad (3.3.9)$$

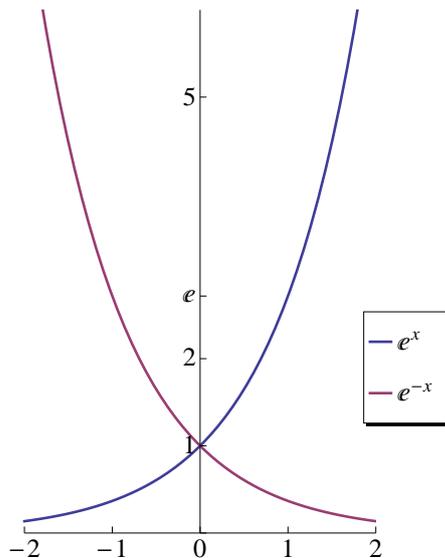
definiert. Man kann die Exponentialfunktion folgendermaßen definieren:

$$\boxed{f(x) = e^x \text{ ist die Exponentialfunktion } \iff f'(x) = f(x) \text{ und } f(0) = 1} \quad (3.3.10)$$

Die rechte Seite ist die einfachste Form einer **Differentialgleichung**, die eine Funktion durch eine Beziehung zu und zwischen ihren Ableitungen beschreibt. Mit Differentialgleichungen werden Sie sich noch systematisch in der Physik1-Vorlesung auseinandersetzen. ⁵

Aus dieser Differentialgleichung folgen alle wichtigen Eigenschaften der Exponentialfunktion (Beweis in der Höma-Vorlesung):

⁵ Die Differentialgleichung $f'(x) = f(x)$ aus (3.3.10) beschreibt **exponentielles Wachstum**: Die Rate $f'(x)$, mit der die Größe $f(x)$ zunimmt, ist dabei proportional zur Größe $f(x)$ selbst. Alle (physikalischen) Vorgänge, mit dieser Eigenschaft werden durch Exponentialfunktionen beschrieben.



- Der Wert der sogenannten **Eulerschen Zahl**

$$e = e^1 = 2.71828... \quad (3.3.11)$$

die eine **irrationale** (d.h., nicht durch einen Bruch darstellbare) und **transzendente** (d.h., nicht als Lösung einer Polynomgleichung darstellbare) Zahl ist.

- $e^x > 0$ ist immer positiv.

- Die Exponentialfunktion ist monoton steigend. Sie beschreibt “exponentielles Wachstum”, bei dem die Wachstumsrate $f'(x)$ proportional zum Wert der Funktion $f(x)$ selbst ist:

$$f'(x) = \alpha f(x) \text{ mit } f(0) = f_0 \iff f(x) = f_0 e^{\alpha x}. \quad (3.3.12)$$

Viele Vorgänge auch in der Physik lassen sich so beschreiben, daher ist die Exponentialfunktion sehr wichtig in der Physik. Für große und kleine x gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (3.3.13)$$

- Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^x e^y \\ e^{ax} &= (e^x)^a = (e^a)^x \end{aligned}$$

Man kann die Exponentialfunktion auch über diese Eigenschaften definieren.

Hyperbelfunktionen

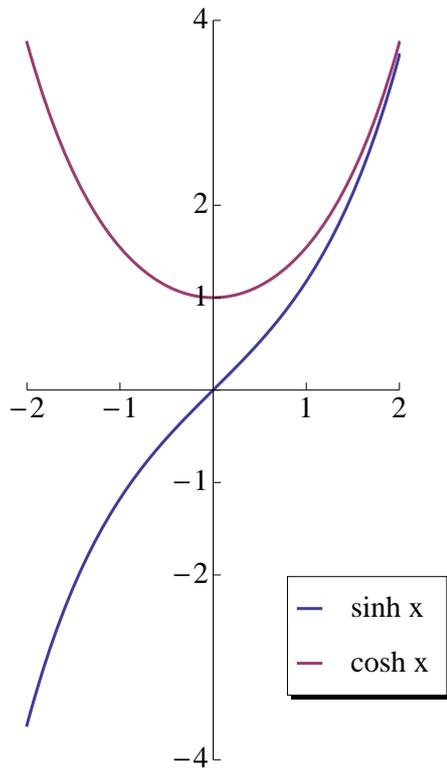
Die **Hyperbelfunktionen** $\sinh x$ (**Sinus-Hyperbolicus**) und $\cosh x$ (**Kosinus-Hyperbolicus**) sind folgendermaßen über die Exponentialfunktion definiert:

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (3.3.14)$$

$$\cosh x \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (3.3.15)$$

Die Ableitungen ergeben sich dann aus der Ableitungsregel (3.3.9)

$$\sinh' x = \cosh x \text{ und } \cosh' x = \sinh x \quad (3.3.16)$$



- Es gilt $\sinh 0 = 0$ und $\sinh x$ ist monoton steigend. Für große und kleine x gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$$

- $\cosh x$ hat ein Minimum bei $x = 0$, wo $\cosh 0 = 1$. Für große und kleine x gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = \infty$$

Logarithmus

Der **natürliche Logarithmus** $\ln x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion und damit definiert durch

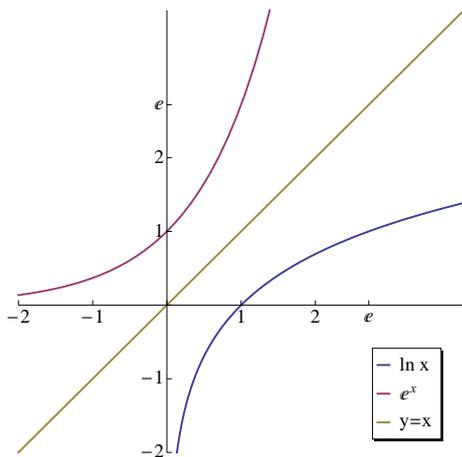
$$x = f(y) = \ln y \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad e^x = e^{\ln y} = y \quad (3.3.17)$$

Wegen $e^y > 0$ ist der Logarithmus dann nur für $x > 0$ definiert. Die Ableitung des Logarithmus folgt dann aus der Ableitungsregel (3.2.13) für Umkehrfunktionen mit $x = f^{-1}(y) = \ln y$ und $f(x) = e^x$, also $f'(x) = e^x$:

$$\ln' y = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

also

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad (3.3.18)$$



- Den Graphen von $\ln x$ erhält man damit durch Spiegelung des Graphen von e^x an der Winkelhalbierenden $y = x$.
- Es gilt $\ln 1 = 0$ (wegen $e^0 = 1$) und $\ln e = 1$ (wegen $e^1 = e$).
- $\ln x$ ist monoton steigend, positiv für $x > 1$ und negativ für $x < 1$.
- Es gilt die Rechenregel

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln x + \ln y \\ x^n &= (\exp(\ln x))^n = \exp(n \ln x) \\ \ln(x^n) &= n \ln x \end{aligned}$$

Reelle Potenzen

Potenzfunktionen x^r mit beliebigem **reellen Exponenten** r sind über die Verallgemeinerung der obigen Regel $x^n = \exp(n \ln x)$ definiert:

$$x^r \equiv \exp(r \ln x) \tag{3.3.19}$$

Dann ergibt sich die Ableitung von x^r nach der Kettenregel und (3.2.7) und den Ableitungsregeln $(e^x)' = e^x$ und $\ln' x = 1/x$:

$$(x^r)' = \exp(r \ln x)' = \exp(r \ln x) \frac{r}{x} = r x^{r-1}$$

also gilt die Regel (3.2.9) tatsächlich für *alle* reellen Exponenten r :

$$(x^r)' = r x^{r-1} \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R} \tag{3.3.20}$$

Ein wichtiges Beispiel sind die **n-ten Wurzeln**, die sich für $r = 1/n$ ergeben:

$$\sqrt[n]{x} \equiv x^{1/n} = \exp((\ln x)/n) \tag{3.3.21}$$

Für Ableitung der n-ten Wurzel gilt natürlich auch das allgemeine Ergebnis (3.3.20). Für die wichtige **Quadratwurzel** ($n = 2$) gilt damit

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Trigonometrische Funktionen

Die **trigonometrischen Funktionen** $\sin x$ (**Sinus**), $\cos x$ (**Cosinus**), $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (**Tangens**) können geometrisch am Einheitskreis (=Kreis mit Radius $R = 1$) definiert werden, siehe Abb. 3.3, links:

- Tragen wir am Einheitskreis einen Winkel α an der x -Achse ab, so hat der Schnittpunkt auf dem Einheitskreis die x -Koordinate $\cos \alpha$ und die y -Koordinate $\sin \alpha$.
- Der Tangens ist als Quotient

$$\tan \alpha \equiv \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

definiert. Nach dem Strahlensatz gilt: Länge der blauen Linie in Abb. 3.3 durch Radius 1 = $\sin \alpha$ durch $\cos \alpha$. Damit beträgt die Länge der blauen Linie genau $\tan \alpha$.

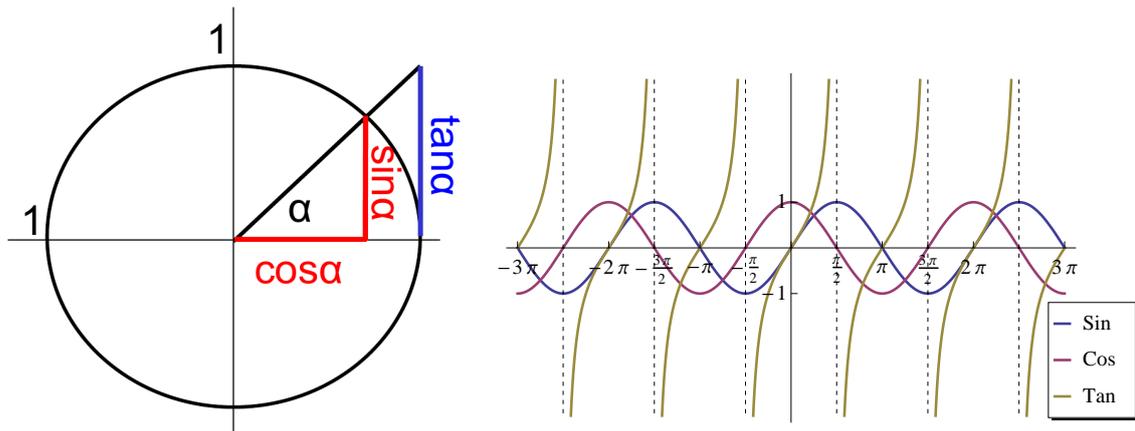


Abbildung 3.3: Links: Definitionen von $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ am Einheitskreis. Rechts: Plots von $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$.

- Die **Kreiszahl** π ist definiert durch den Umfang U des Einheitskreises oder seine Fläche F :

$$U = 2\pi R \stackrel{R=1}{=} 2\pi, \quad F = \pi R^2 \stackrel{R=1}{=} \pi$$

Für die Länge des Einheitskreisbogens zum Winkel α gilt

$$L = \alpha R \stackrel{R=1}{=} \alpha$$

Damit entspricht ein Viertelkreis einem Winkel $\alpha = \pi/2$.

- Aus der geometrischen Definition von Sinus und Cosinus folgen dann die Werte für Bruchteile von 2π :

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0, \quad \sin(\pi/2) = 1, \quad \sin \pi = 0, \quad \sin(3\pi/2) = -1, \quad \sin(2\pi) = 0 \\ \cos 0 &= 1, \quad \cos(\pi/2) = 0, \quad \cos \pi = -1, \quad \cos(3\pi/2) = 0, \quad \cos(2\pi) = 1 \end{aligned}$$

und damit für den Tangens

$$\tan 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x = +\infty, \quad \tan \pi = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 3\pi/2} \tan x = -\infty, \quad \tan(2\pi) = 0$$

- Aus der geometrischen Definition folgt, dass $\sin x$, $\cos x$ **periodische Funktionen** mit Periode 2π (= Umfang des Einheitskreises) sind. Aus der geometrischen Definition folgt auch sofort (betrachte gegenüberliegende Punkte auf dem Einheitskreis), dass $\sin(x + \pi) = -\sin x$ und $\cos(x + \pi) = -\cos x$ und damit $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ eine π -periodische Funktion ist:

$$\sin x = \sin(x + 2\pi), \quad \cos x = \cos(x + 2\pi), \quad \tan x = \tan(x + \pi).$$

Außerdem folgen aus der Definition am Einheitskreis durch Symmetrie bei Drehung des Kreises um $\pi/2$ die Relation $\cos x = \sin(\pi/2 + x)$, durch Symmetrie bei Spiegelung an der Achse $y = x$ die Relation $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ und durch Symmetrie bei Spiegelung an der y-Achse $\cos x = -\cos(\pi - x)$ und $\sin x = \sin(\pi - x)$.

Außerdem ist der Sinus eine *ungerade* Funktion, während der Cosinus eine *gerade* Funktion ist:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x.$$

- Aus der geometrischen Definition folgt auch, dass x - und y -Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis betragsmäßig immer kleiner gleich dem Radius $R = 1$ sein müssen:

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1$$

Dagegen kann der Tangens *alle* Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

- Es gelten **Additionstheoreme**. Die wichtigsten sind

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt nach der geometrischen Definition im rechtwinkligen Dreieck aus den roten Linien in Abb. 3.3, links, und dem Radius $R = 1$ als Hypotenuse:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (3.3.23)$$

Die Ableitungen von Sinus und Cosinus sind

$$\sin' x = \cos x \quad \text{und} \quad \cos' x = -\sin x \quad (3.3.24)$$

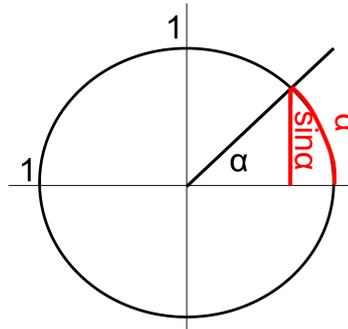
Entsprechend ergibt sich die Ableitung des Tangens aus der Quotientenregel (3.2.12):

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (3.3.25)$$

Beweis:

Wir beweisen exemplarisch $\sin' x = \cos x$. Dies kann man direkt aus der Definition der Ableitung (3.2.4) über den Differenzenquotienten und mit Hilfe der Additionstheoreme (3.3.22) zeigen:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} &= \frac{\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x} \\ &\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cos x \\ &\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \cos x \end{aligned}$$



Beim letzten Grenzprozess haben wir die wichtige Näherung

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad \text{für kleine } \alpha \quad (3.3.26)$$

benutzt. Diese folgt aus der Zeichnung rechts am Einheitskreis: α ist die Länge des Kreisbogens zum Winkel α , während $\sin \alpha$ die y -Koordinate des Schnittpunktes auf dem Einheitskreis ist. Für kleine Winkel α nähern sich diese beiden Größen einander an.

Trigonometrische Umkehrfunktionen

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind $\arcsin x$ (**Arcussinus**), $\arccos x$ (**Arcuscosinus**) und $\arctan x$ (**Arcustangens**). Da \sin und \cos periodische Funktionen sind, gibt es verschiedene Möglichkeiten den Wertebereich der Umkehrfunktionen zu festzulegen, die in Abb. 3.4 erläutert sind.

Die Ableitungen folgen dann aus der Regel (3.1.2) für die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

und mit (3.3.25) für den arctan

$$\arctan' y = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2},$$

wo wir $\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\tan^2 x + 1}$ benutzt haben.

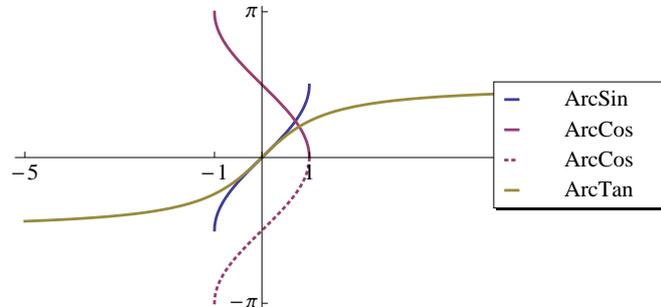


Abbildung 3.4: Trigonometrische Umkehrfunktionen. Auf Grund der Symmetrie und 2π -Periodizität von \sin und \cos lassen sich verschiedene Definitionintervalle der Länge π finden, so dass der alle Werte im Intervall $[-1, 1]$ angenommen werden. Daher kann man den Wertebereich von \arcsin und \arccos entsprechend verschieden wählen, der Definitionsbereich ist immer $[-1, 1]$. Für den \arcsin (blau) wird üblicherweise der Wertebereich $[-\pi/2, \pi/2]$ gewählt. Wegen $\cos x = \cos(-x)$ kann der Wertebereich von $\arccos x$ entweder als $[0, \pi]$ (rot, durchgezogen) oder als $[-\pi, 0]$ (rot, gestrichelt) gewählt werden. Beim \tan lassen sich auf Grund der π -Periodizität verschiedene Definitionintervalle der Länge π finden, so dass der alle Werte im Intervall $]-\infty, \infty[$ angenommen werden. Daher kann man der Wertebereich von \arctan entsprechend verschieden wählen, der Definitionsbereich ist immer $]-\infty, \infty[$. Für den \arctan (blau) wird üblicherweise der Wertebereich $[-\pi/2, \pi/2]$ gewählt.

Zusammenfassung

Damit haben wir insgesamt folgende Liste von Funktionen und ihrer Ableitungen erarbeitet, die man auswendig wissen sollte:

$f(x)$	\rightarrow	$f'(x)$
x^r	\rightarrow	$rx^{r-1} \quad (r \in \mathbb{R})$
e^x	\rightarrow	e^x
$\ln x$	\rightarrow	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	\rightarrow	$\cos x$
$\cos x$	\rightarrow	$-\sin x$
$\arcsin x$	\rightarrow	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	\rightarrow	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	\rightarrow	$\cosh x$
$\cosh x$	\rightarrow	$\sinh x$

3.4 Integrieren

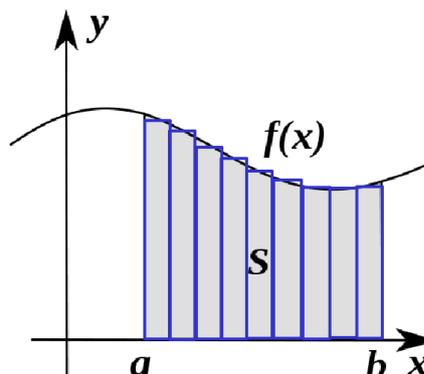
3.4.1 Bestimmtes Integral

Das **bestimmte Integral** $\int_a^b dx f(x)$ einer Funktion $f(x)$ wird als **Fläche** S unter dem Graphen der Funktion zwischen a und b definiert. Um diese Fläche möglichst genau zu approximieren, teilen wir die Fläche in N Streifen der Breite

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

und approximieren die Fläche durch die **Riemannsumme**

$$\begin{aligned} S &\approx \Delta x [f(a) + f(a + \Delta x) + \dots + f(a + (N-1)\Delta x)] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \Delta x f(a + k\Delta x) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$



Im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ (also $N \rightarrow \infty$) wird daraus der exakte Flächeninhalt S . Daher definieren wir das **(bestimmte) Integral** als

$$\int_a^b dx f(x) \equiv S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta x f(a + k\Delta x) \quad (3.4.2)$$

Wegen der Additivität von Flächeninhalten folgt dann auch die **Additivität** des Integrals,

$$\int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x) = \int_a^c dx f(x) \quad (3.4.3)$$

Wegen $\int_a^a dx f(x) = 0$ (eine solche "Fläche" hat offensichtlich den Inhalt 0), folgt dann auch

$$\int_a^b dx f(x) = - \int_b^a dx f(x) \quad (3.4.4)$$

3.4.2 Hauptsatz und Stammfunktionen

Nun betrachten wir das bestimmte Integral $F(b) \equiv \int_a^b dx f(x)$ als Funktion der *oberen Integrationsgrenze* b . Es gilt

$$\begin{aligned} F(b + \Delta x) &= \int_a^{b+\Delta x} dx f(x) \\ &= \int_a^b dx f(x) + \int_b^{b+\Delta x} dx f(x) \\ &= F(b) + \int_b^{b+\Delta x} dx f(x) \\ &\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} F(b) + \Delta x f(b) \end{aligned}$$

da im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ die Riemannsumme nur aus einem Summanden besteht. Also gilt

$$F'(b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(b + \Delta x) - F(b)}{\Delta x} = f(b)$$

Damit haben wir gezeigt:

Die Funktion $F(x) \equiv \int_a^x d\tilde{x} f(\tilde{x})$ erfüllt

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x d\tilde{x} f(\tilde{x}) = f(x)$$

(3.4.5)

Dies ist im Wesentlichen schon der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**, der besagt, dass Differentiation des Integrals als Funktion der oberen Grenze wieder den Integranden $f(x)$ ergibt: Integrieren ist also die “Umkehroperation” zum Differenzieren.

Man bezeichnet alle Funktionen $F(x)$ mit

$$F'(x) = f(x)$$

(3.4.6)

auch als **Stammfunktion** einer Funktion $f(x)$:

- Funktionen, die solche Stammfunktionen besitzen, heißen **integrierbar**. Einwichtiger mathematische Satz der Integralrechnung besagt, dass z.B. alle stetigen Funktionen integrierbar sind.
- Stammfunktionen sind immer nur bis auf eine Konstante bestimmt: Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, dann ist auch $F(x) + C$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, da Konstanten beim Ableiten verschwinden.

Mit dem Begriff der Stammfunktion lässt sich der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** nun auch folgendermaßen genauer formulieren:

1) Eine Stammfunktion von $f(x)$ ist das Integral

$$F(x) = \int_a^x d\tilde{x} f(\tilde{x})$$

2) Wenn (irgendeine) Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$ bekannt ist, kann man alle bestimmten Integrale berechnen:

$$\int_a^b dx f(x) = F(x)|_a^b \equiv F(b) - F(a)$$

(3.4.7)

Man nennt Stammfunktionen auch **unbestimmte Integrale** und schreibt dafür ein Integral ohne Grenzen:

$$\int dx f(x) \equiv F(x)$$

(3.4.8)

Damit kann man also “einprägsam” schreiben:

$$\frac{d}{dx} \int dx f(x) = F'(x) = f(x)$$

$$\int dx \frac{df}{dx} = \int dx f'(x) = f(x)$$

was nochmal deutlich zeigt, dass Differenzieren und Integrieren ihre jeweiligen “Umkehroperationen” sind.

3.4.3 Integrationsregeln

Die Aufgabe beim Integrieren ist also, zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ zu finden.

Während Differenzieren mit Hilfe der Ableitungsregeln aus Abschnitt 3.2.3 “immer gehen” sollte, ist Integrieren (manchmal) eine “Kunst”, da es nicht immer einfach oder sogar manchmal unmöglich ist, eine Stammfunktion geschlossen anzugeben. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erlaubt es aber, aus unseren Ableitungsregeln aus Abschnitt 3.2.3 **Integrationsregeln** zu gewinnen, die dabei helfen können:

- (i) Sind f und g integrierbare Funktionen, dann gilt

$$\int dx(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \int dx f(x) + \beta \int dx g(x) \quad (3.4.9)$$

Die Integration ist also eine **lineare** Operation

- (ii) Aus der Produktregel ergibt sich durch Integration die **partielle Integration**

$$(f \cdot g)(x) = \int dx(f \cdot g)'(x) = \int df'(x)g(x) + \int dx f(x)g'(x)$$

Nach Umstellen ergibt sich für bestimmte Integrale

$$\int_a^b dx f(x)g'(x) = (f \cdot g)(x)|_a^b - \int_a^b dx f'(x)g(x) \quad (3.4.10)$$

Für unbestimmte Integrale gilt

$$\int dx f(x)g'(x) = (f \cdot g)(x) - \int dx f'(x)g(x) \quad (3.4.11)$$

Partielle Integration ist nicht immer nützlich, weil auf der rechten Seite ja wieder ein Integral steht, was zu lösen ist. Es ist immer dann nützlich, wenn das Integral auf der rechten Seite bekannt ist oder einfacher zu integrieren ist oder auch mit dem Integral rechts übereinstimmt.

Beispiele:

- 1) Das Integral $\int dx x e^x$ schreiben wir mit $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ und $g(x) = e^x$, $f'(x) = 1$ als

$$\int dx x e^x = e^x x - \int dx e^x = e^x(x - 1)$$

Hier können wir die rechte Seite (einfache Exponentialfunktion) dann leichter integrieren. Durch Differenzieren rechts nach Produktregel $(e^x(x - 1))' = x e^x$ kontrollieren wir das Ergebnis.

- 2) Das Integral $\int dx \sin x \cos x$ schreiben wir mit $f(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$ und $g(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$ als

$$\begin{aligned} \int dx \sin x \cos x &= \sin^2 x - \int dx \cos x \sin x \\ 2 \int dx \sin x \cos x &= \sin^2 x \\ \int dx \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sin^2 x \end{aligned}$$

Hier erhalten wir also nach partieller Integration rechts das gleiche Integral und können dann auflösen.

(iii) Aus der Kettenregel folgt durch Integration auf beiden Seiten die **Substitutionsregel**

$$\begin{aligned}\int_a^b dx f'(g(x))g'(x) &= \int_a^b dx (f \circ g)'(x) = f(g(b)) - f(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} dy f'(y)\end{aligned}$$

Mit $f(x)$ statt $f'(x)$ schreiben wir

$$\boxed{\int_a^b dx f(g(x))g'(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} dy f(y).} \quad (3.4.12)$$

wir gehen also von der Integrationsvariablen x zur neuen Variablen $y = g(x)$ über. Nach Umbenennen der Integrationsgrenzen $a = g^{-1}(c)$, $b = g^{-1}(d)$ schreibt man auch oft

$$\boxed{\int_c^d dy f(y) = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} dx f(g(x))g'(x)} \quad (3.4.13)$$

Eine einprägsamere Schreibweise für unbestimmte Integrale ist

$$\boxed{F(g) = \int dg f(g) = \int dx \frac{dg}{dx} f(g(x)) = F(g(x)),} \quad (3.4.14)$$

was mit jeder Funktion $g(x)$ gilt. Wenn man nach einer Substitution eine Seite in (3.4.14) berechnen kann, muss man wieder $g = g(x)$ oder die Umkehrung $x = x(g)$ einsetzen, um die Stammfunktion in den "richtigen" Variablen zu bekommen (siehe Beispiel 1 unten). Wenn man wieder zum bestimmten Integral übergeht ist aber unbedingt zu beachten, dass die Integrationsgrenzen mittransformiert werden müssen: wenn auf der linken Seite $g(x)$ von c bis d läuft, läuft auf der rechten Seite x von $g^{-1}(c)$ bis $g^{-1}(d)$, und wir erhalten wieder die bestimmte Version (3.4.13). Man braucht dazu also auch die Umkehrfunktion $x(g)$.

Alle Versionen (3.4.12), (3.4.13) und (3.4.14) der Substitutionsregel sind in der Praxis je nach Situation nützlich. Oft erfordert es etwas Erfahrung, die "richtige" Substitution zu finden, um ein Integral zu lösen. Die Version (3.4.12) (oder (3.4.14) ausgehend von der rechten Seite) benutzt man, wenn man einen Integranden hat, dem man "ansieht", dass er sich in der Form $f(g(x))g'(x)$ schreiben lässt. Dann liefert die rechte Seite von (3.4.12) (bzw. die linke Seite in (3.4.14)) vielleicht ein einfacher zu lösendes Integral. Die Version (3.4.13) (oder (3.4.14) ausgehend von der linken Seite) benutzt man oft, wenn der Integrand $f(y)$ durch die Substitution $f(g(x))$ "einfacher" wird; dann besteht Hoffnung, dass die rechte Seite von (3.4.13) (bzw. die rechte Seite in (3.4.14)) "einfacher" wird; der rechts zusätzlich auftretende Faktor $g'(x)$ ist aber zu berücksichtigen und kann eine Vereinfachung auch wieder zunichte machen.

Beispiele:

1) Das unbestimmte Integral $\int dx \sin x \cos x$ können wir auch mit der Substitution $g(x) = \sin x$ lösen:

$$\int dx \sin x \cos x = \int dx \sin x \frac{d \sin x}{dx} = \int dx g(x) \frac{dg}{dx} = \int dgg = \frac{1}{2}g^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

Wir haben also die Substitutionsregel (3.4.14) von "rechts nach links" benutzt mit $f(g) = g$ benutzt und mussten am Ende wieder $g = g(x)$ einsetzen, um beide Seiten in der gleichen Variablen x auszudrücken. Wir haben außerdem $\int dgg = g^2/2$ benutzt (siehe (iv)).

2) Im unbestimmten Integral $\int dy y \sin(y^2 + 1)$ stört uns auf den ersten Blick die Funktion $y^2 + 1$ im Argument des Sinus. Also substituieren wir $x = y^2 + 1$ bzw. $y = (x - 1)^{1/2}$ mit $dy/dx = (1/2)(x - 1)^{-1/2}$

$$\begin{aligned} \int dy y \sin(y^2 + 1) &= \int dx \frac{dy}{dx} (x - 1)^{1/2} \sin x = \int dx \frac{1}{2(x - 1)^{1/2}} (x - 1)^{1/2} \sin x \\ &= \int dx \frac{1}{2} \sin x = -\frac{1}{2} \cos x = -\frac{1}{2} \cos(y^2 + 1) \end{aligned}$$

Wir haben also die Substitutionsregel (3.4.14) von “links nach rechts” benutzt und mussten am Ende wieder x durch y ausdrücken, um beide Seiten in der gleichen Variablen y zu haben. Bei der Rechnung hob sich $dy/dx = (1/2)(x - 1)^{-1/2} = 1/2y$ gerade mit dem Faktor y im Integranden, so dass die Substitution zu einer wirklichen Vereinfachung führt; bei einem Integral $\int dy \sin(y^2 + 1)$ hätte uns die Substitution deshalb nicht wirklich weitergebracht. Wir haben außerdem $\int dx \sin x = -\cos x$ benutzt.

(iv) Das wichtigste Beispiel ist wieder das **Integral von Potenzfunktionen**:

$$\boxed{\int dx x^r = \frac{1}{r+1} x^{r+1} \text{ für alle } r \in \mathbb{R}, r \neq -1} \quad (3.4.15)$$

Dies kann man sofort nachprüfen, indem man auf beiden Seiten differenziert.

3.4.4 Wichtige Funktionen und ihre Integrale

Aus den Ableitungen der wichtigsten Funktionen auf Seite 54 ergibt sich nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sofort eine entsprechende Tabelle für Stammfunktionen mit $F'(x) = f(x)$, die man ebenfalls auswendig wissen sollte:

$$\begin{array}{l} f(x) \rightarrow F(x) \\ x^r \rightarrow \frac{1}{r+1} x^{r+1} \quad (r \in \mathbb{R}, r \neq -1) \\ \frac{1}{x} \rightarrow \ln x \\ e^x \rightarrow e^x \\ \cos x \rightarrow \sin x \\ \sin x \rightarrow -\cos x \\ \sinh x \rightarrow \cosh x \\ \cosh x \rightarrow \sinh x \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \arcsin x \\ \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \arctan x \end{array}$$

3.4.5 Uneigentliche Integrale

Oft möchte man in der Physik den Integrationsbereich nicht nur über ein einfaches kompaktes Intervall $[a, b]$ erstrecken, sondern bis ins “Unendliche”, d.h. man möchte über Intervalle $] -\infty, b]$, $[a, \infty[$ oder auch über die gesamten reellen Zahlen $] -\infty, \infty[$ integrieren. Diese Integrale kann man über einen Grenzwertprozess definieren, bei dem die Integralgrenzen gegen unendlich oder minus

unendlich laufen:

$$\int_a^\infty dx f(x) \equiv \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x) \quad (3.4.16)$$

$$\int_{-\infty}^b dx f(x) \equiv \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b dx f(x) \quad (3.4.17)$$

Diese Integrale existieren natürlich nur, wenn der entsprechende Grenzwert auch existiert.

Ein einfaches Beispiel ist das Integral $\int_0^\infty dx e^{-x}$. Dies können wir berechnen, indem wir zunächst

$$\int_0^b dx e^{-x} = 1 - e^{-b}$$

berechnen. Wegen $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} = 0$ (siehe (3.3.13)) gilt dann

$$\int_0^\infty dx e^{-x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1$$

3.5 Folgen, Reihen, Potenzreihen und Taylorentwicklung

3.5.1 Folgen

Eine **Folge** a_1, a_2, a_3, \dots reeller Zahlen kann man mathematisch etwas abstrakter als eine Abbildung aus den **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ in den reellen Zahlenraum beschreiben:

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow a_n\end{aligned}$$

z.B. definiert $a_n = 1/n$ eine Folge von immer kleiner werdenden Zahlen, die sich offensichtlich der Null annähern. Den Begriff des "Annäherns" fasst man mathematisch genauer durch den Begriff der **Konvergenz**. Man sagt:

Eine Folge konvergiert gegen einen Grenzwert a , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass	(3.5.1)
$ a_n - a < \varepsilon \quad \forall n > n_0$	

Im obigen Beispiel $a_n = 1/n$ konvergiert die Folge gegen den Grenzwert $a = 0$: Für jedes kleine $\varepsilon > 0$, das wir uns setzen, gilt für alle natürlichen Zahlen $n > 1/\varepsilon$ dann $|a_n| = 1/n < \varepsilon$, d.h. die Folge liegt komplett in einer ε -Umgebung um den Grenzwert $a = 0$, wie in der Definition (3.5.1) verlangt. Wenn eine Folge a_n gegen den Grenzwert a konvergiert, schreibt man auch

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$	(3.5.2)
---------------------------------------	---------

Folgen sind eher eine Domäne der Mathematik und für die Physik-Vorlesung nicht zentral wichtig. In der Höma-Vorlesung werden Sie einige wichtige Sätze über Folgen kennenlernen, von denen wir hier nur einige wenige angeben werden.

Ein wichtiger Satz ist das sogenannte **Cauchy-Kriterium**, das es erlaubt, die Konvergenz einer Folge zu prüfen, *ohne* ihren Grenzwert zu kennen:

Eine Folge a_n **konvergiert** \iff
zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$ a_n - a_m < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0$	(3.5.3)
--	---------

Eine anschauliche Begründung (wir werden hier keinen Beweis führen) lautet: Wenn eine Folge konvergiert, können Folgenglieder nicht sehr verschieden sein.

Ein weiterer wichtiger Satz gibt ein sehr einfaches Kriterium für Konvergenz:

Beschränkte, monotone Folgen konvergieren	(3.5.4)
---	---------

Dabei heißt eine Folge **beschränkt** genau dann, wenn es Schranken A und B gibt, so dass $A \leq a_n \leq B$ für alle Folgenglieder a_n . Eine Folge heißt **monoton steigend** bzw. **fallend** genau dann, wenn für alle aufeinanderfolgenden Folgenglieder $a_{n+1} < a_n$ bzw. $a_{n+1} > a_n$ gilt. Eine anschauliche Begründung lautet hier: Wenn eine Folge immer steigt oder fällt, müssen sich die Folgenglieder irgendwann von unten bzw. oben einem Grenzwert annähern, wenn die Folge noch in ihre Schranken "passen" soll.

Mit konvergenten Folgen kann man außerdem "rechnen": Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, dann gilt auch

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= a + b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= ab \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n) &= \alpha a\end{aligned}$$

Außerdem gilt mit jeder *stetigen* Funktion $f(x)$ die sogenannte **Folgenstetigkeit**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$$

3.5.2 Reihen

Oft treten in der Mathematik und auch in der Physik Summationen von Folgengliedern auf, die man auch **Reihen** nennt. Endlichen Summen

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

nennt man **endliche Reihen** oder **Partialsommen**, daneben gibt es aber auch **unendliche Reihen**

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad (3.5.5)$$

Eine solche unendliche Reihe heißt konvergent wenn die Folge S_n der Partialsommen konvergiert.

Ein auch in der Physik extrem wichtiges Beispiel einer Reihe ist die **geometrische Reihe**

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k \quad (3.5.6)$$

Für diese Summe kann man eine geschlossene Formel finden. Dazu bilden wir

$$qS_n = \sum_{k=0}^n q^{k+1} \quad \text{Indexverschiebung} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n+1} q^k$$

nun bilden wir die Differenz

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= q^0 - q^{n+1} \\ \Rightarrow S_n(1 - q) &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

und damit

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (3.5.7)$$

Wenn wir den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ bilden, erhalten wir daraus auch eine geschlossene Formel für die **unendliche geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}}{1 - q}$$

Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}$ existiert aber nur für $|q| < 1$. Für $|q| > 1$ wächst $|q^{n+1}|$ ohne Beschränkung immer weiter an, während $|q^{n+1}|$ immer kleiner wird für $|q| < 1$. Damit gilt für $|q| < 1$ dann $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$ und damit für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \quad (\text{für } |q| < 1) \quad (3.5.8)$$

Mit Hilfe der geometrische Reihe lassen sich auch andere Reihen sehr erfolgreich abschätzen. Dazu gibt es in der Mathematik wieder eine Reihe von mathematischen Sätzen, von denen wir hier die wichtigsten kurz zusammenfassen wollen. Auch diese Sätze werden Sie noch ausführlich in der Höma-Vorlesung kennenlernen.

Zunächst ist eine Reihe konvergent, wenn Sie sich durch eine konvergent Reihe “majorisieren” lässt:

- **Definition:** Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.
- **Majorantenkriterium:**
Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist und $|b_k| \leq |a_k|$ für alle k gilt, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.

Mit der geometrischen Reihe als Majorante kann man dann folgende beiden wichtigen Konvergenzkriterien beweisen:

- **Quotientenkriterium:**
Wenn man ein $q < 1$ findet mit

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \quad \forall k > k_0,$$

ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

- **Wurzelkriterium:**
Wenn man ein $q < 1$ findet mit

$$(|a_k|)^{1/k} \leq q \quad \forall k > k_0,$$

ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Als **Beispiel** betrachten wir die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \tag{3.5.9}$$

eine sogenannte **Potenzreihe** (siehe auch nächster Abschnitt). Es gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|x|^{k+1} k!}{|x|^k (k+1)!} = \frac{|x|}{k+1} < \frac{1}{10} = q$$

wenn $k > 10|x|$. Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ damit konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ und definiert dort eine Funktion $f(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Es wird sich im nächsten Abschnitt zeigen, dass dies genau die Exponentialfunktion ist:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

3.5.3 Potenzreihen

Eine **Potenzreihe** ist definiert als ein “unendliches Polynom” der Form

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k} \tag{3.5.10}$$

Der Wert x_0 ist dabei der **Entwicklungspunkt** und man sagt auch (3.5.10) ist eine “Potenzreihe um x_0 ”; die a_k heißen **Koeffizienten** (wie bei einem Polynom).

Wenn eine Potenzreihe konvergiert, dann für genügend kleine $|x-x_0| < r$. Man nennt das größtmögliche r , so dass für alle $|x-x_0| < r$ Konvergenz vorliegt, auch den **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Innerhalb dieses Konvergenzradius um x_0 definiert die Potenzreihe (3.5.10) dann eine **Funktion**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad \text{für } |x-x_0| < r \quad (3.5.11)$$

Innerhalb des Konvergenzradius ist diese Funktion **unendlich oft differenzierbar** mit

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2}$$

usw.

Wir betrachten wieder das **Beispiel** (3.5.9) von oben:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (a_k = \frac{1}{k!}, x_0 = 0)$$

Oben hatten wir mit Hilfe des Quotientenkriteriums gezeigt, dass diese Reihe für *alle* $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, daher ist der Konvergenzradius $r = \infty$. Wir bilden nun die Ableitung

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1}$$

Indexverschiebung $\stackrel{=}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x)$

Außerdem gilt

$$f(0) = a_0 = 1$$

Die beiden Eigenschaften $f'(x) = f(x)$ und $f(0) = 1$ definieren aber gerade die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, siehe (3.3.10). Daher gilt

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \quad (3.5.12)$$

3.5.4 Taylorentwicklung

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass eine Potenzreihe (3.5.11) im Konvergenzradius r um den Entwicklungspunkt x_0 eine unendlich oft differenzierbare Funktion definiert.

Umgekehrt gilt auch (ohne Beweis): Ist eine Funktion unendlich oft differenzierbar in einem Intervall um x_0 , dann kann sie in eine Potenzreihe entwickelt werden, d.h. man kann Koeffizienten a_k finden, so dass (3.5.11) gilt.

Dies ist ein typischer mathematischer "Existenzsatz". Es bleibt allerdings die Frage, wie man denn die Koeffizienten a_k praktisch findet. Um darauf eine Antwort zu finden, betrachten wir die Ableitungen $f^{(n)}(x_0)$ einer durch eine Potenzreihe (3.5.11) dargestellten Funktion am Entwicklungspunkt

x_0 :

$$\begin{aligned}
 f(x_0) &= a_0 \quad (\text{nur der Term } k=0 \text{ "überlebt" bei } x = x_0) \\
 f'(x_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \Big|_{x=x_0} \\
 &= a_1 \quad (\text{nur der Term } k=1 \text{ "überlebt" bei } x = x_0) \\
 f''(x_0) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2} \Big|_{x=x_0} \\
 &= 2a_2 \\
 f^{(n)}(x_0) &= n(n-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_n = n! a_n
 \end{aligned}$$

Also gilt

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)} \quad (3.5.13)$$

und wir können die Koeffizienten a_n durch die n -ten Ableitungen bei x_0 bestimmen.

Wenn wir das Resultat (3.5.13) in (3.5.10) einsetzen, erhalten wir genau die sogenannte **Taylor-entwicklung** einer Funktion $f(x)$ um x_0 in eine **Taylorreihe**:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n \\
 &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots
 \end{aligned}
 } \quad (3.5.14)$$

Die unendliche Taylorreihe ergibt also genau die Funktion $f(x)$. In der Physik benutzt man sehr häufig, dass eine bei n abgebrochene Taylorreihe eine **Approximation** der Funktion $f(x)$ ergibt:

- Eine bei n abgebrochene Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ ergibt einer **Approximation** der Funktion in der Nähe von x_0 durch ein **Taylorpolynom n-ten Grades**. Dies ist in Fig. 3.5 für die Exponentialfunktion demonstriert.
- Die ersten beiden Terme $n = 0, 1$ ergeben genau die **Tangente** an $f(x)$ in x_0 , also die Approximation durch eine Gerade, d.h. ein Polynom ersten Grades.
- Die Approximation wird besser, je größer wir das n wählen, bei dem abgebrochen wird. Der Fehler dabei ist $\sim (x - x_0)^{n+1}$.
- Eine abgebrochene Taylorreihe um x_0 kann auch bei der Bildung von Grenzwerten $x \rightarrow x_0$ nützlich sein. Ein Beispiel dafür ist die **Regel von L'Hospital**, die eine Aussage über Brüche der Art "0/0" macht: Wenn wir zwei differenzierbare Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ haben, dann können wir diese in x_0 durch ihre Tangenten (Taylorpolynom ersten Grades) $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ bzw. $g(x) \approx g'(x_0)(x - x_0)$ annähern und erhalten die Regel von L'Hospital

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}} \quad (3.5.15)$$

Wir betrachten einige wichtige **Beispiele** für Taylorentwicklungen (3.5.14):

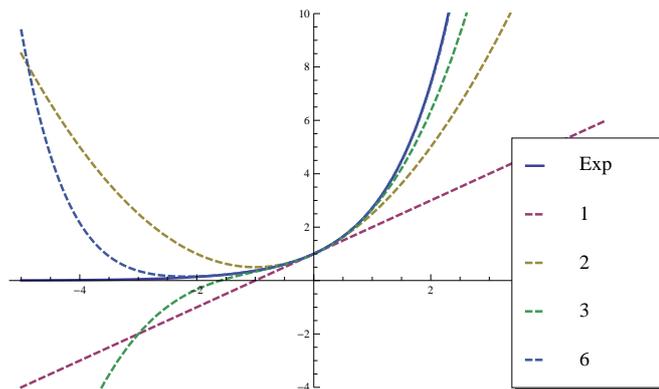


Abbildung 3.5: Approximation der Funktion $f(x) = e^x$ durch Taylorpolynome vom Grad $n = 1, 2, 3, 6$ um $x_0 = 0$.

Exponentialfunktion

Für die Taylorentwicklung von $f(x) = e^x$ benötigen wir die Ableitungen, die wegen $(e^x)' = e^x$ alle gleich der Exponentialfunktion sind:

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

Wenn wir eine Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ vornehmen wollen, benötigen wir die Ableitungen bei $x_0 = 0$:

$$f^{(n)}(x_0) = e^0 = 1 \quad \forall n$$

Einsetzen in die Taylorentwicklung (3.5.14) ergibt dann

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

wie auf anderem Wege schon in (3.5.12) gezeigt.

Wir können also die Exponentialfunktion e^x mit in der Nähe von 0 durch $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$ annähern.

Wir können auch um $x_0 = 1$ entwickeln mit

$$f^{(n)}(x_0) = e^1 = e \quad \forall n$$

Einsetzen in die Taylorentwicklung (3.5.14) ergibt dann

$$e^x = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}$$

Diese Gleichheit können wir auch auf anderem Wege verifizieren:

$$e^x = e^1 e^{x-1} = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}$$

Sinus

Für die Taylorentwicklung von $f(x) = \sin x$ benötigen wir die Ableitungen

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x, \dots$$

also

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{für } n = 2k \text{ gerade} \\ (-1)^k \cos x & \text{für } n = 2k + 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wenn wir eine Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ vornehmen wollen, benötigen wir die Ableitungen bei $x_0 = 0$:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2k \text{ gerade} \\ (-1)^k & \text{für } n = 2k + 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

Einsetzen in die Taylorentwicklung (3.5.14) ergibt dann

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \dots} \quad (3.5.16)$$

Es tauchen nur *ungerade* Terme auf (wegen Antisymmetrie $\sin(-x) = -\sin x$), und zwar mit alternierenden Vorzeichen.

Kosinus

Die Taylorreihe von $f(x) = \cos x$ um $x_0 = 0$ können wir nun zum einen durch gliedweises Differenzieren von (3.5.16) erhalten, $f(x) = \cos x = \sin' x$, was folgendes ergibt:

$$\cos x = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

also

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots} \quad (3.5.17)$$

Hier tauchen nur *gerade* Terme auf (wegen Symmetrie $\cos(-x) = \cos x$), und zwar wieder mit alternierenden Vorzeichen.

Zum anderen können wir die Taylorreihe (3.5.17) um $x_0 = 0$ auch direkt herleiten durch Berechnung der Ableitungen

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x, \quad f''''(x) = \cos x, \dots$$

also

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{für } n = 2k \text{ gerade} \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{für } n = 2k + 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

also bei $x_0 = 0$:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & \text{für } n = 2k \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n = 2k + 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

Einsetzen in die Taylorentwicklung (3.5.14) ergibt dann wieder die Taylorreihe (3.5.17).

Einige Taylorreihen wichtiger Funktionen sollte man durchaus auswendig wissen:

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \\
 \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \\
 \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots \\
 \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots \\
 \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \\
 \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \\
 (1+x)^r &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots
 \end{aligned}$$

wobei in der Physik oft die ersten ein bis zwei Glieder als Approximation genügen.

Die Taylorreihen der Hyperbelfunktionen $\sinh x$ bzw. $\cosh x$ sind bis auf die nicht alternierenden Vorzeichen identisch mit den Taylorreihen der entsprechenden trigonometrischen Funktionen $\sin x$ bzw. $\cos x$. Dies liegt daran, dass bis auf ein Vorzeichen analoge Beziehungen $\sinh' x = \cosh x$ und $\cosh' x = \sinh x$ für die Ableitungen gelten, was über die Definition (3.5.14) der Taylorentwicklung dann zu bis auf die Vorzeichen identischen Taylorreihen führt.

3.6 Übungen Kapitel 3

1. Differenzieren

Berechnen Sie für folgende Funktionen $f(x)$ jeweils die Ableitung $f'(x)$. Welche Regeln zum Differenzieren benutzen Sie dabei jeweils?

- (i) $f(x) = 3x^2 + 2x^3 + \cos(3x)$
- (ii) $f(x) = 3(x^2 + 1)^4 - 2 \sin(x/2)$
- (iii) $f(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x) - \exp(-x)}$
- (iv) $f(x) = \frac{\exp(-\cos(x))}{\sin(x)}$
- (v) $f(x) = x^{\exp(x)}$
- (vi) $f(x) = \ln(\ln(x))$

Überlegen Sie sich zusätzlich, an welchen Stellen $f(x)$ nicht differenzierbar ist.

2. Kurvendiskussion

Berechnen Sie Maxima, Minima und Wendepunkte der für $x \geq 0$ definierten Funktion

$$f(x) = a \ln x - 2bx + x^2$$

für $a, b > 0$. Skizzieren Sie den Funktionsverlauf.

3. Integrale

a) Berechnen Sie mit Hilfe partieller Integration folgende unbestimmte Integrale:

- (i) $\int dx x \sin x$
- (ii) $\int dx x^2 \cos x$
- (iii) $\int dx \ln x$ (Tipp: $= \int dx 1 \cdot \ln x$)
- (iv) $\int dx x^2 e^x$

Berechnen Sie auch die entsprechenden bestimmten Integrale von der unteren Grenze $x = 0$ bis zur oberen Grenze $x = 1$, also $\int_0^1 dx x \sin x$ usw.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel folgende unbestimmte Integrale:

- (i) $\int dx (x + 1)^r$
- (ii) $\int dx e^{3x}$
- (iii) $\int dx \sin^2 x \cos x$
- (iv) $\int dx \frac{\tan x}{\cos^2 x}$

Wenn Sie analog bestimmte Integrale berechnen, z.B.

$$(i) \int_0^1 dx(x+1)^r$$

$$(iii) \int_0^\pi dx \sin^2 x \cos x,$$

müssen auch die Integrationsgrenzen mittransformiert werden.

4. Folgen und Reihen

a) Bestimmen Sie die Grenzwerte einiger Folgen:

$$(i) a_n = e^{-n}$$

$$(ii) a_n = \cos(1/n)$$

$$(iii) a_n = (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n)^{1/n} \quad (0 < q < 1)$$

$$(iv) a_n = n \sin(1/n) \quad (\text{Tipp: Taylor})$$

b) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

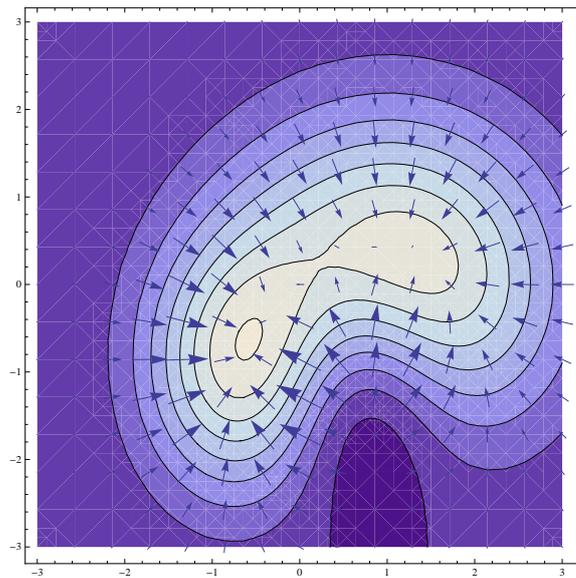
5. Taylorreihen

a) Bestimmen Sie die Taylorreihen von $f(x) = \ln x$ um $x_0 = 1$ und von $g(x) = \sinh x$ um $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $x \ln(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ bis zur dritten Ordnung.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $\sqrt{1+x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zur dritten Ordnung.

4 Mehrdimensionale Analysis (Differenzieren)



$$D_{\vec{v}}f(\vec{r}) = \vec{\nabla}f(\vec{r}) \cdot \vec{v}$$

4.1 Vektorwertige Funktionen

Vektorwertige Funktionen einer Variablen spielen in der Physik eine große Rolle, da sich alle Bewegungen im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 abspielen. So wird die Bewegung eines Partikels durch einen zeitabhängigen Vektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ beschrieben, der 3 kartesische Komponenten hat:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z.$$

Alle 3 kartesischen Komponenten können sich gleichzeitig ändern bei einer Bewegung auf einer beliebigen "krummen" Bahn.

4.1.1 Ableitung vektorwertiger Funktionen

Die Ableitung einer zeitabhängigen vektorwertigen Funktion $\vec{r}(t)$ nach der Zeit macht nun eine Aussage über den **Geschwindigkeitsvektor** des Partikels in 3 Dimensionen. Der Geschwindigkeitsvektor misst die Positionsänderung pro Zeit zur Zeit t_0 . Daher können wir den Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t_0 zunächst durch den dreidimensionalen **Differenzenquotienten** zur Zeit $t = t_0$

$$\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

approximieren. Dies ist ein Vektor, bei dem wir den bekannten Differenzenquotienten in

jeder Komponente bilden. Der Vektor ist parallel zum Verbindungsvektor von $\vec{r}(t_0)$ nach $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$.

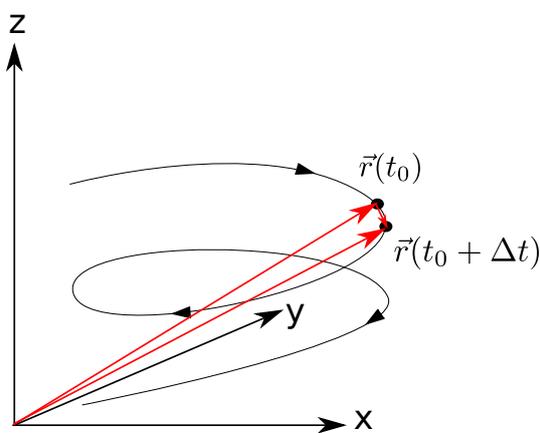
Im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ erhalten wir dann die *momentane* vektorielle Geschwindigkeit $\vec{v}(t_0)$ des Partikels, die die **vektorwertige Ableitung** des Bahnvektors $\vec{r}(t)$ nach der Zeit t definiert:

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_0} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} \quad (4.1.1)$$

(der "Punkt" steht wie üblich für eine Zeitableitung). Die vektorwertige Ableitung zeigt in Richtung der Tangente an die Bahn im Punkt $\vec{r}(t)$ und wird auch als **Tangentenvektor** an die Funktion $\vec{r}(t)$ in t_0 bezeichnet. Da wir den Differenzenquotienten komponentenweise bilden, heißt die Vorschrift (4.1.1), dass wir **komponentenweise ableiten** müssen

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z \quad (4.1.2)$$

um den Tangentenvektor zu erhalten. Diese wichtige Regel des komponentenweisen Differenzierens einer vektorwertigen Funktion gilt natürlich nicht nur für vektorwertige Funktionen der Zeit t im dreidimensionalen \mathbb{R}^3 , sondern ganz allgemein für jede vektorwertige Funktion $\vec{f} = \vec{f}(u)$, die von einer beliebigen skalaren Variable $u \in \mathbb{R}$ abhängt und deren Werte in einem beliebigen Vektorraum $\vec{f} \in \mathbb{R}^n$ liegen (lediglich die Schreibweise mit dem Punkt wird nur bei Zeitableitungen benutzt).



Bei der **Kinematik**, d.h., der Beschreibung von Bewegungen von Punkten auf Bahnen $\vec{r}(t)$ im dreidimensionalen Raum sind Zeitableitungen von vektorwertigen Funktionen zentral wichtig. Die erste Zeitableitung ergibt die momentane **Geschwindigkeit** $\vec{v}(t)$ des Punktes

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t), \quad (4.1.3)$$

die zweite Ableitung die momentane **Beschleunigung** $\vec{a}(t)$ des Punktes

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t), \quad (4.1.4)$$

Beispiel Kreisbahn

Eine Kreisbahn mit Radius R in der xy -Ebene, die mit konstanter **Winkelgeschwindigkeit** ω durchlaufen wird, hat die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

Der Punkt bewegt sich gegen den Uhrzeigersinn auf der Kreisbahn. Eine Umdrehung findet in einer Zeit $T = 2\pi/\omega$ statt (die Zeit, in der sich das Argument von \sin , \cos um $\omega T = 2\pi$ ändert). Geschwindigkeit und Beschleunigung erhält man durch komponentenweises Ableiten nach t als

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = -R\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -R\omega^2 \vec{r}(t)$$

Die Beschleunigung ist bei einer Kreisbewegung immer zur Kreismitte hin gerichtet ($\vec{a}(t) \parallel -\vec{r}(t)$); in der Physikl werden wir dies als *Zentripetalbeschleunigung* kennen lernen.

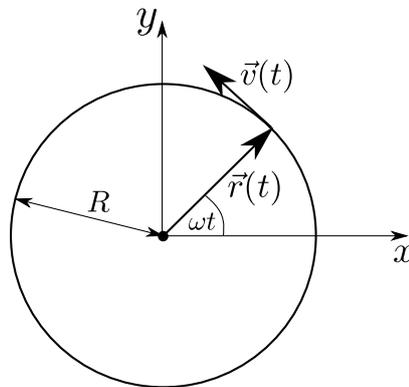


Abbildung 4.1: Kreisbahn mit Radius R und Winkelgeschwindigkeit ω .

Beispiel Funktionsgraphen

Das komponentenweise Differenzieren einer vektorwertigen Funktion gilt nicht nur für Ableitungen nach der Zeit und für beliebige Vektorräume \mathbb{R}^n . Wir können z.B. den Funktionsgraphen einer

Funktion $f(x)$ als Bahnkurve

$$\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^2 in Abhängigkeit von der Variable x auffassen. Die vektorwertige Ableitung nach x ist

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

und gibt die Richtung des Tangentenvektors an den Funktionsgraphen in x an. Die Steigung dieses Tangentenvektors ist dann das Verhältnis seiner y - zur x -Komponente, was $f'(x)/1 = f'(x)$ ist und damit wie gehabt die “normale” Ableitung der Funktion $f(x)$ ergibt.

4.1.2 Rechenregeln

Auch für vektorwertige Funktionen kann man Ableitungsregeln wie z.B. Produktregeln formulieren. Allerdings kann man mit Vektoren verschiedene Produkte wie Skalarprodukte und Kreuzprodukte bilden. Daher gibt es hier mehr Produktregeln:

- (i) Die Ableitung ist weiterhin **linear**:

$$\frac{d}{du}(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g})(u) = \alpha \frac{d\vec{f}}{du}(u) + \beta \frac{d\vec{g}}{du}(u) \quad (4.1.6)$$

wenn die Skalare α und β Konstanten sind.

- (ii) Es gelten nun aber **drei Produktregeln** ($\vec{f}(u)$ und $\vec{g}(u)$ sind vektorwertige Funktionen, $\alpha(u)$ eine skalare Funktion):

$$\frac{d}{du}(\alpha(u) \vec{f})(u) = \alpha'(u) \vec{f}(u) + \alpha(u) \frac{d\vec{f}}{du}(u) \quad (4.1.7)$$

$$\frac{d}{du}(\vec{f} \cdot \vec{g})(u) = \frac{d\vec{f}}{du}(u) \cdot \vec{g}(u) + \vec{f}(u) \cdot \frac{d\vec{g}}{du}(u) \quad (4.1.8)$$

$$\frac{d}{du}(\vec{f} \times \vec{g})(u) = \frac{d\vec{f}}{du}(u) \times \vec{g}(u) + \vec{f}(u) \times \frac{d\vec{g}}{du}(u) \quad (4.1.9)$$

Alle drei Produktregeln folgen durch komponentenweise Anwendung der “normalen” Produktregel (3.2.6). Man beachte, dass beim Kreuzprodukt immer die Reihenfolge der Vektoren \vec{f} und \vec{g} wichtig ist.

- (ii) Auch die **Kettenregel** bleibt gültig für eine Verknüpfung $(\vec{f} \circ g)(v) = \vec{f}(g(v))$ einer Funktion $\vec{f}(u)$ mit einer skalaren Funktion $g(v)$:

$$\frac{d}{dv} \vec{f}(g(v)) = \frac{d\vec{f}}{du}(g(v)) \frac{dg}{dv}(v) \quad (4.1.10)$$

4.1.3 Geometrie von Raumkurven*

Eine vektorwertige Funktion $\vec{r}(t)$ im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 beschreibt dort eine **Raumkurve**; $t = 0$ soll der Anfang und $t = T$ das Ende der Raumkurve sein. Oft interessiert man sich für **geometrische Größen** dieser Raumkurve. Besonders interessant sind Größen, die *nur* von der Geometrie der Raumkurve abhängen und nicht von der sogenannten **Parametrisierung** der Kurve, d.h. Größen die sich bei einer Umparametrisierung mit einer Funktion $t = f(\tilde{t})$ auf einer “neue Zeit” \tilde{t} mit $\vec{r}(t) = \vec{r}(f(\tilde{t})) \equiv \tilde{\vec{r}}(\tilde{t})$ nicht ändern. Beispielsweise könnten wir einfach eine doppelt so schnell laufende neue Zeit $\tilde{t} = 2t$ einführen mit $t = f(\tilde{t}) = \tilde{t}/2$; dann brauchen wir doppelt so lang, um die gleiche Kurve zu durchlaufen (wie laufen also langsamer).

Bogenlänge

Eine solche Größe ist die **Bogenlänge** $s(t)$, die die auf der Raumkurve bis zur Zeit t durchlaufene Länge beschreibt. Es ist einleuchtend, dass man diese Länge erhält, wenn man den Betrag des momentanen Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(\tau) = \dot{\vec{r}}(\tau)$ von $\tau = 0$ (Anfang der Kurve) bis $\tau = t$ aufintegriert:

$$s(t) = \int_0^t d\tau |\vec{v}(\tau)| = \int_0^t d\tau |\dot{\vec{r}}(\tau)| \quad (4.1.11)$$

(die Integrationsvariable τ muss hier von t unterschieden werden und bekam deshalb einen neuen Namen). Dies kann man sich auch klarmachen, indem man überlegt, dass die in einem kleinen Zeitintervall $\Delta\tau$ zurückgelegte Strecke gerade $\Delta s \approx |\vec{v}(\tau)|\Delta\tau$ ist. Addition aller Zeitintervalle und Grenzübergang zu infinitesimalen Zeitintervallen führt dann auf das Integral in (4.1.11).

Die Bogenlänge ist eine geometrische Größe, die nicht von der Parametrisierung abhängt: Durchlaufen wir die Raumkurve beispielsweise doppelt so langsam, indem wir die neue Zeit $\tilde{t} = 2t$ einführen, brauchen wir die doppelte Laufzeit $\tilde{T} = 2T$, damit halbiert sich aber auch die Geschwindigkeit $|\tilde{v}| = |\vec{v}|/2$ und das Integral (4.1.11) liefert das gleiche Ergebnis. Wir wollen dies ganz allgemein zeigen und durchlaufen die Kurve mit einer völlig beliebigen neuen Zeit \tilde{t} , die mit der alten Zeit durch eine Funktion $t = f(\tilde{t})$ zusammenhängt. Dann gilt $\tilde{r}(\tilde{t}) = \vec{r}(f(\tilde{t}))$ und damit für die neue Geschwindigkeit $\tilde{v}(\tilde{t}) = \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}} = \vec{v}(t) \frac{df}{d\tilde{t}}$ nach Kettenregel (4.1.10). Wir messen nun die Bogenlänge nach obiger Formel (4.1.11) bis zu einer Zeit $\tilde{t} = f^{-1}(t)$ (die Funktion f sollte dafür umkehrbar sein), die dem Raumpunkt $\tilde{r}(f^{-1}(t)) = \vec{r}(t)$ entspricht, und beginnen entsprechend bei $\tilde{t} = f^{-1}(0)$ beim Punkt $\tilde{r}(f^{-1}(0)) = \vec{r}(0)$:¹

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= \int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(t)} d\tilde{\tau} |\tilde{v}(\tilde{\tau})| = \int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(t)} d\tilde{\tau} \left| \vec{v}(\tau) \frac{df}{d\tilde{\tau}} \right| \\ &= \int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(t)} d\tilde{\tau} \left| \frac{df}{d\tilde{\tau}} \right| |\vec{v}(\tau)| = \int_0^t d\tau |\vec{v}(\tau)| \\ &= s(t) \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitution $\tau = f(\tilde{\tau})$ vorgenommen haben. Wir sehen, dass wir - unabhängig von der gewählten Zeit oder Parametrisierung - tatsächlich exakt immer die gleiche Bogenlänge erhalten.

Als **Beispiel** betrachten wir einen Halbkreisbogen in der Ebene \mathbb{R}^2 .

1) Wir können den Halbkreisbogen einmal in kartesischen Koordinaten beschreiben und ihn z.B. mit Hilfe des Koordinate x parametrisieren (x spielt also die Rolle von t in (4.1.11)):

$$\begin{aligned} \vec{r}(x) &= \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{R^2 - x^2} \end{pmatrix}, \quad x \in [-R, R] \\ \frac{d}{dx} \vec{r} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ \sqrt{R^2 - x^2} \end{pmatrix} \\ |\vec{v}(x)| &= \left| \frac{d}{dx} \vec{r} \right| = \left(1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} \right)^{1/2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \end{aligned}$$

¹ Wir werden uns auf monoton steigende Funktionen $f(\tilde{t})$ beschränken, um zusätzliche Fallunterscheidungen zu vermeiden: sonst gilt $f^{-1}(0) > f^{-1}(t)$, und wir müssen in der folgenden Formel die Integralgrenzen tauschen.

Dann ergibt sich für die Gesamtbogenlänge L des Halbkreisbogens nach (4.1.11):

$$\begin{aligned} L &= \int_{-R}^R dx |\vec{v}(x)| = \int_{-R}^R dx \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\ &\stackrel{u \equiv x/R}{=} R \int_{-1}^1 du \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} = R \arcsin u \Big|_{-1}^1 \\ &= \pi R \end{aligned}$$

wie erwartet.

2) Wir können den Halbkreisbogen aber auch ganz anders parametrisieren, nämlich durch eine Kreisbewegung mit fester Winkelgeschwindigkeit ω (siehe Beispiel oben):

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{\omega}] \\ \dot{\vec{r}} &= R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \\ |\vec{v}(t)| &= |\dot{\vec{r}}| = R\omega = \text{const} \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für die Gesamtbogenlänge L des Halbkreisbogens nach (4.1.11):

$$L = \int_0^{\pi/\omega} dt |\vec{v}(t)| = \int_0^{\pi/\omega} dt R\omega = \pi R$$

wieder wie erwartet und genauso wie in der Parametrisierung mit x .

Tangentenvektor, Normalenvektor, Krümmung

Wir haben oben bereits festgestellt, dass die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$ ein **Tangentenvektor** an die Bahnkurve ist. Wir können durch Normierung aus diesem Vektor einen **Tangenteneinheitsvektor** $\hat{\vec{t}}(t)$ an die Raumkurve bekommen:²

$$\boxed{\hat{\vec{t}}(t) \equiv \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}} \quad (4.1.12)$$

(Achtung: Der Vektor $\hat{\vec{t}}$ hat *nichts* mit der Zeit t zu tun, obwohl hier gleiche Buchstaben verwendet werden). Auch der Tangenteneinheitsvektor ist eine geometrische Größe, da bei einer Umparametrisierung $t = f(\tilde{t})$ die nach Kettenregel anfallenden Ableitungen $df/d\tilde{t}$ sich in Zähler und Nenner wegheben (wenn $f(\tilde{t})$ monoton steigend ist, so dass sich der Tangentenvektor nicht genau umdreht).

Man kann nun auch die Bogenlänge $s = s(t)$ selbst als "neue Zeit" benutzen. Diese Parametrisierung erhält man, wenn man die Umkehrung $t = t(s)$ bildet und einsetzt als $\vec{r}_s = \vec{r}_s(s) = \vec{r}(t(s))$; sie heißt auch **natürliche Parametrisierung**. In der natürlichen Parametrisierung wird der Weg an jeder Stelle mit der **Geschwindigkeit vom Betrag 1** durchlaufen:

$$\begin{aligned} |\vec{v}_s(s)| &= \left| \frac{d\vec{r}_s}{ds} \right| \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| \\ &\stackrel{(4.1.11)}{=} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \frac{1}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = 1 \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

² Ein "Dach" $\hat{\vec{t}}$ über einem Vektor benutzt man häufig, um zu zeigen, dass es sich um einen Einheitsvektor handelt mit $|\hat{\vec{t}}| = 1$.

wo wir im letzten Schritt $\frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}(t)|$ und damit $\frac{dt}{ds} = 1/|\dot{\vec{r}}|$ benutzt haben, was sofort aus (4.1.11) nach dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt. Da ein Geschwindigkeitsvektor in jeder Parametrisierung einen Tangentenvektor an die Bahn darstellt, ist der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_s(s)$ in der natürlichen Parametrisierung mit Bogenlänge immer schon der **Tangenteneinheitsvektor** $\hat{t}(s)$ an die Raumkurve:

$$\hat{t}(s) \equiv \vec{v}_s(s) = \frac{d\vec{r}_s}{ds} \text{ ist der Tangenteneinheitsvektor mit } |\hat{t}(s)| = 1. \quad (4.1.14)$$

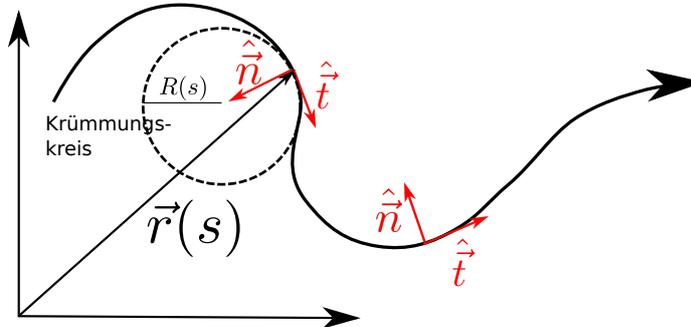


Abbildung 4.2: Bahnkurve $r(\vec{s})$. In zwei Punkten sind Tangenteneinheitsvektor $\hat{t}(s)$ und Normaleneinheitsvektor $\hat{n}(s)$ eingezeichnet, in einem Punkt auch der Krümmungskreis mit Krümmungsradius $R(s) = 1/\kappa(s)$.

Wir wollen nun diesen Tangenteneinheitsvektor $\hat{t}(s)$ nochmals nach der Bogenlänge s ableiten. Da sowohl der Tangenteneinheitsvektor \hat{t} als auch die Bogenlänge s geometrische Größen sind, wird auch diese Ableitung wieder eine geometrische Größe ergeben.

Wir wollen zeigen, dass der durch Ableiten entstehende Vektor immer *senkrecht* auf der Tangente $\hat{t}(s)$ steht. Dazu differenzieren wir die Beziehung $\hat{t}(s) \cdot \hat{t}(s) = 1$ für den Einheitsvektor $\hat{t}(s)$ auf beiden Seiten nach s und erhalten nach der Produktregel (4.1.8)

$$0 = \frac{d}{ds} (\hat{t}(s) \cdot \hat{t}(s))$$

$$\stackrel{(4.1.8)}{=} \frac{d\hat{t}}{ds} \cdot \hat{t}(s) + \hat{t}(s) \cdot \frac{d\hat{t}}{ds} = 2 \frac{d\hat{t}}{ds} \cdot \hat{t}(s)$$

Wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren aber 0 ergibt, stehen sie senkrecht aufeinander.

Der Vektor $\frac{d\hat{t}}{ds}$ zeigt also senkrecht zur Bahn (die ja lokal in Richtung der Tangente $\hat{t}(s)$ zeigt). Diese Richtung wird auch als **Normale** der Bahn bezeichnet. Normieren wir $\frac{d\hat{t}}{ds}$, erhalten wir den **Normaleneinheitsvektor**

$$\hat{n}(s) \equiv \frac{\frac{d\hat{t}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|} \text{ ist der Normaleneinheitsvektor} \quad (4.1.15)$$

der einen Einheitsvektor senkrecht zur Bahn darstellt. Wie bereits festgestellt, ist auch der Normalenvektor eine geometrische Größe.

Ebenso wie auch der Betrag von $\frac{d\hat{t}}{ds}$ eine geometrische Größe sein. Der Betrag von $\frac{d\hat{t}}{ds}$ ist ein Maß dafür, wie schnell sich der Tangentenvektor ändert, wenn man sich mit immer gleicher Geschwindigkeit 1 entlang der Raumkurve bewegt. Diese Änderung geschieht dann nur noch auf Grund der

Krümmung der Bahn. Daher definiert man:

$$\kappa(s) \equiv \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\vec{r}_s}{ds^2} \right| \text{ ist die lokale Krümmung der Bahnkurve} \quad (4.1.16)$$

Je größer die Krümmung, desto stärker gekrümmt ist die Bahnkurve. Die inverse Krümmung ist gleich dem lokalen **Krümmungsradius** $R(s)$ der Kurve:

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \text{ lokaler Krümmungsradius der Bahnkurve} \quad (4.1.17)$$

Dies ist der Radius eines Kreises, der sich im Punkt $\vec{r}_s(s)$ an die Bahnkurve "anschmiegt", siehe Abb. 4.2. Sowohl die Krümmung als auch der Krümmungsradius sind aus den bereits genannten Gründen geometrische Größen.

Es gilt also insgesamt mit diesen Bezeichnungen

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa(s)\hat{n}(s) \quad (4.1.18)$$

Dies ist die erste der wichtigen **Frenetschen Gleichungen** für Raumkurven in drei Dimensionen. Wir werden es an dieser Stelle bei der ersten Frenetschen Gleichung belassen (insgesamt gibt es in drei Raumdimensionen auch drei Frenetsche Gleichungen).

Man haben bereits gezeigt, dass Tangenteneinheitsvektor $\hat{t}(s)$, Normaleneinheitsvektor $\hat{n}(s)$ und auch die Krümmung $\kappa(s)$ echte geometrische Größen der Raumkurve sind, die *nicht* von der Parametrisierung abhängen, genau wie die Bogenlänge (da sie sich ja nach (4.1.14), (4.1.15) und (4.1.16) durch Ableitungen nach der geometrischen Größe Bogenlänge ausdrücken lassen).

Man kann die Vektoren \hat{t} und \hat{n} und die Krümmung κ auch direkt aus der ursprünglichen Parametrisierung mit einer beliebigen Zeit t bestimmen. Die Umrechnungen von Bogenlänge s zurück auf t mittels Kettenregeln produzieren wegen $\frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}(t)|$ (siehe (4.1.11)) viele Faktoren $\dot{\vec{r}}(t)$ und man erhält letztlich

$$\begin{aligned} \hat{t}(t) &= \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} \\ \hat{n}(t) &= \frac{(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)) \times \dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)| |\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{(\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)) \times \vec{v}(t)}{|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)| |\vec{v}(t)|} \\ \kappa(t) &= \frac{|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|^3} = \frac{|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)|}{|\vec{v}(t)|^3} \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

(hier ohne vollständigen Beweis und wie gesagt: Der Vektor \hat{t} hat *nichts* mit der Zeit t zu tun, obwohl hier gleiche Buchstaben verwendet werden).

Beispiel Kreisbahn

Wir betrachten nochmal unser obiges Beispiel einer Kreisbahn, siehe Fig. 4.1,

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Bogenlänge zu erhalten, berechnen wir zuerst den Betrag der Geschwindigkeit,

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\dot{v}(t)| = R\omega.$$

Die Geschwindigkeit ist also konstant. Daher kann man hier sehr einfach die Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t d\tau |\vec{v}(\tau)| = R\omega t$$

angeben und die Kreisbahn auf Bogenlänge umparametrisieren, indem wir $t(s) = s/R\omega$ benutzen:

$$\vec{r}_s(s) = \vec{r}(t(s)) = R \begin{pmatrix} \cos(s/R) \\ \sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann können wir nach (4.1.14) auch sofort den Tangenteneinheitsvektor $\hat{t}(s)$ und nach (4.1.16) und (4.1.15) die Krümmung $\kappa(s)$ und den Normaleneinheitsvektor $\hat{n}(s)$ berechnen:

$$\hat{t}(s) = \frac{d\vec{r}_s}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin(s/R) \\ \cos(s/R) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\sin(s/R) \\ \cos(s/R) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| = \frac{1}{R}$$

$$\hat{n}(s) = \frac{\frac{d\hat{t}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|} = - \begin{pmatrix} -\cos(s/R) \\ \sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor zeigt also immer in Richtung Kreismittelpunkt ($\hat{n}(s) \parallel -\vec{r}_s$) und die Krümmung ist genau der inverse Kreisradius $1/R$. Der Krümmungsradius ist hier also konstant gleich dem Kreisradius R , wie es sein sollte.

Tangential- und Normalzerlegung der Beschleunigung

Wir können den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$ einer **ebenen** Bahn $\vec{r}(t)$ (Gl. (4.1.4)) immer in eine Tangential- und Normalkomponente zerlegen:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{\text{tan}}(t) + \vec{a}_{\text{norm}}(t) = \vec{a}(t) \cdot \hat{t}(t) \hat{t}(t) + \vec{a}(t) \cdot \hat{n}(t) \hat{n}(t) \quad (4.1.20)$$

Dies ist ein nicht-triviales Ergebnis, da wir eigentlich immer eine Zerlegung in drei Komponenten brauchen bei einem Vektor im dreidimensionalen Raum. Wird werden sehen, dass die Beschleunigung tatsächlich immer in der von Tangential- und Normalenvektor aufgespannten Ebene liegt. Dazu schreiben wir

$$\vec{v}(t) = |\vec{v}(t)| \hat{t}(t) = v(t) \hat{t}(t)$$

und leiten auf beiden Seiten nach der Zeit t ab:

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) = \dot{v}(t)\hat{t}(t) + v(t)\frac{d\hat{t}}{dt} \\ &= \dot{v}(t)\hat{t}(t) + v(t)\underbrace{\frac{d\hat{t}}{ds}}_{=\kappa(t)\hat{n}(t)}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=v(t)} \\ &= \dot{v}(t)\hat{t}(t) + \kappa(t)v^2(t)\hat{n}(t).\end{aligned}$$

Wir sehen, dass wir nur Beschleunigungskomponenten in Tangential- und Normalenrichtung erhalten! Für die beiden Komponenten bekommen wir

$$a_{\text{tan}}(t) = \dot{v}(t), \quad (4.1.21)$$

$$a_{\text{norm}}(t) = \kappa(t)v^2(t) = \frac{\kappa(t)}{R^2(t)}, \quad (4.1.22)$$

wobei $R(t)$ der lokale Krümmungsradius (4.1.17) der Kurve ist. Da \hat{n} zum Mittelpunkt des Krümmungskreises zeigt (siehe Abb. 4.2), ist $a_{\text{norm}}(t)$ wieder die zu diesem Mittelpunkt hin gerichtete Zentripetalbeschleunigung, die wir für den Spezialfall einer Kreisbahn (4.1.5) schon einmal berechnet hatten; der Ausdruck (4.1.22) ist die verallgemeinerte Version davon.

4.2 Partielles Differenzieren

4.2.1 Felder

Im vorangehenden Abschnitt haben wir vektorwertige Funktionen *einer* Variable betrachtet. In der Physik gibt es aber auch sehr oft Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen, z.B. von den 3 Komponenten x , y und z eines Ortes im \mathbb{R}^3 . Diese werden in der Physik auch als **Felder** bezeichnet.

Es gibt **skalare Felder** $f(\vec{r})$, deren Wert an jedem Ort \vec{r} im Raum eine reelle Zahl ist. In der Physik1-Vorlesung wird beispielsweise die potentielle Energie $V(\vec{r})$ durch solch ein Feld beschrieben werden. Insbesondere wird in der Physik1 die potentielle Energie einer Masse m am Ort \vec{r} im Gravitationsfeld einer Masse M im Ursprung eine wichtige Rolle spielen; in diesem Fall ist

$$V(\vec{r}) = -GmM \frac{1}{|\vec{r}|} \quad (4.2.1)$$

wobei G die Gravitationskonstante ist.³

Daneben gibt es auch **Vektorfelder** $\vec{f}(\vec{r})$, deren Wert an jedem Ort \vec{r} im Raum selbst auch wieder ein Vektor ist. In der Physik1-Vorlesung werden Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r})$ eine zentrale Rolle spielen. Auch hier wird die Gravitationskraft am wichtigsten sein: Die anziehende Gravitationskraft, die eine Masse M im Ursprung auf eine Masse m am Ort \vec{r} ausübt, ist

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GmM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (4.2.2)$$

[Bemerkung: Die potentielle Gravitationsenergie $V(\vec{r})$ und die Gravitationskraft $\vec{F}(\vec{r})$ sehen nicht zufällig sehr ähnlich aus. Sie werden in der Physik1 lernen, dass diese Größen über den Gradienten $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, der in 4.3 unten eingeführt wird, miteinander zusammenhängen.]

³ $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$.

Vektorfelder werden durch Pfeile visualisiert. Wir malen auf einem repräsentativem Raster von Punkten \vec{r} Pfeile in Richtung $\vec{f}(\vec{r})$. Entweder wir tragen die Pfeile überall gleichmäßig ein und symbolisieren den Betrag $|\vec{f}(\vec{r})|$ durch die Länge der Pfeile an diesem \vec{r} oder wir wählen immer die gleiche Pfeillänge und symbolisieren den Betrag $|\vec{f}(\vec{r})|$ durch die Dichte der Pfeile an diesem \vec{r} .

4.2.2 Definition der partiellen Ableitung

Wir betrachten nun eine **reelle Funktion** f , die von **mehreren Variablen** abhängt, z.B. $f = f(x, y, z)$ (also ein skalares Feld). Dann können wir sowohl Ableitungen nach x bilden bei festem y und z oder Ableitungen nach y bei festem x und z usw. Diese Ableitungen heißen **partielle Ableitungen** und werden mit einem speziellen Symbol “ ∂ ” geschrieben. Wir können dann partielle Ableitungen definieren, indem wir Funktionen $f_{y_0, z_0}(x) \equiv f(x, y_0, z_0)$, $f_{x_0, z_0}(y) \equiv f(x_0, y, z_0)$ und $f_{x_0, y_0}(z) \equiv f(x_0, y_0, z)$ einführen, die nur noch von einer der Variablen abhängen, während die anderen beiden auf $x = x_0$, $y = y_0$ oder $z = z_0$ festgehalten werden:⁴

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{df_{y_0, z_0}}{dx}(x_0) = f'_{y_0, z_0}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{df_{x_0, z_0}}{dy}(y_0) = f'_{x_0, z_0}(y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{df_{x_0, y_0}}{dz}(z_0) = f'_{x_0, y_0}(z_0) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Ebenso kann man natürlich ganz allgemein für ein skalares Feld $f = f(x_1, \dots, x_n)$ im n -dimensionalen Raum $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ n partielle Ableitungen $\partial f / \partial x_i$ ($x_i = 1, \dots, n$) einführen.

Beispiele

1) Wir betrachten als erstes Beispiel $f(x, y, z) = x^2 + xyz + z^3$. Bei der Berechnung von $\partial f / \partial x$ betrachten wir y und z als Konstanten und erhalten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + yz.$$

Analog betrachten wir bei der Berechnung von $\partial f / \partial y$ die Variablen x und z als Konstanten,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz,$$

und bei der Berechnung von $\partial f / \partial z$ die Variablen x und y als Konstanten,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + 3z^2.$$

2) Ein anderes Beispiel, das in der Physik1 noch eine wichtige Rolle spielen wird, sind die partiellen Ableitungen der Funktion $g(x, y, z) = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, also der Betragsfunktion des Ortsvektors. Für diese erhalten wir (nach Kettenregel):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{|\vec{r}|} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2y) = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{y}{|\vec{r}|} \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{z}{|\vec{r}|} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

⁴ Wir werden auch oft kürzer $\partial_x f$ für $\partial f / \partial x$ für eine partielle Ableitung schreiben.

3) Nach Kettenregel können wir dann auch partielle Ableitungen einer beliebigen Funktion $V(x, y, z) \equiv h(|\vec{r}|)$ der Betragsfunktion des Ortsvektors berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= h'(|\vec{r}|) \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (2x) = h'(|\vec{r}|) \frac{x}{|\vec{r}|} \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= h'(|\vec{r}|) \frac{y}{|\vec{r}|} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= h'(|\vec{r}|) \frac{z}{|\vec{r}|}.\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

4.2.3 Höhere partielle Ableitungen, Satz von Schwarz

Ebenso, wie wir eine Funktion $f(x)$ mehrfach ableiten können, also $f'(x)$, $f''(x)$, usw. bilden können, können wir auch mehrfach partiell ableiten. Dabei können wir nun aber auch **gemischte Ableitungen** nach *verschiedenen* Variablen bilden. Bei einer Funktion $f(x, y)$ von zwei Variablen gibt es beispielsweise vier Kombinationen von möglichen zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

aber auch die 2 gemischten Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x, y) = x^2 + xy^2 + y^3$ und bilden alle möglichen zweiten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (2x + y^2) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} (2xy + 3y^2) = 2x + 6y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (2xy + 3y^2) = 2y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} (2x + y^2) = 2y\end{aligned}$$

Wir stellen fest dass $\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$, also dass die gemischten Ableitungen *vertauscht* werden können.

Dies gilt ganz allgemein und ist der **Satz von Schwarz**:

Wenn eine Funktion $f(x, y, z)$ 2-mal differenzierbar ist und die 2-ten Ableitungen stetig sind,
vertauschen die 2-ten Ableitungen,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}.$$

(4.2.6)

Da Funktionen in der Physik normalerweise unendlich oft differenzierbar sind und der Satz von Schwarz für p-mal stetig differenzierbare Funktionen auch für p-fache Ableitungen gilt, darf man in der Physik in der Regel immer alle auftretenden partiellen Ableitungen vertauschen.

4.2.4 Totales Differential

Als **totales Differential** wird die gesamte Änderung df einer reellen Funktion $f(x, y, z)$ von mehreren Variablen bezeichnet, wenn sich die Variablen um dx , dy und dz ändern,

$$\begin{aligned} df &= f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

wobei wir nur die führende lineare Ordnung im Limes kleiner $dx, dy, dz \rightarrow 0$ betrachten. Für kleine Änderungen der Variablen *addieren* sich also die verursachten Änderungen in df wegen:

$$\begin{aligned} df &= f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) \\ &= [f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y + dy, z + dz)] + \\ &\quad [f(x, y + dy, z + dz) - f(x, y, z + dz)] + [f(x, y, z + dz) - f(x, y, z)] \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, y + dy, z + dz) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z + dz) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz \end{aligned}$$

4.3 Gradient, Divergenz, Rotation

Gradient, Divergenz und Rotation sind die grundlegenden Ableitungsoperationen für *Felder*. Sie beruhen auf partiellen Ableitungen und werden mit Hilfe des sogenannten “Nabla-Operators” $\vec{\nabla}$ geschrieben.

4.3.1 Nabla-Operator

Der “Nabla-Operator” $\vec{\nabla}$ ist ein **vекtorieller Differentialoperator**, der in kartesischen Koordinaten zunächst einmal einfach eine Abkürzung für den Vektor der drei Ableitungsoperationen ist:⁵

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

Dieser Vektor kann nun auf skalare Felder $f(x, y, z)$ oder Vektorfelder $\vec{f}(x, y, z)$ angewendet werden. In welchen Formen dies möglich ist, wird in den nächsten Abschnitten deutlich.

4.3.2 Richtungsableitung und Gradient

Die **Richtungsableitung** $D_{\vec{v}}f(\vec{r})$ einer Funktion $f(\vec{r})$ im Ort \vec{r} in Richtung $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^t$ misst die Änderung der Funktion in dieser Richtung. Dazu bildet man die Funktion

$$g_{\vec{v}}(\lambda) \equiv f(\vec{r} + \lambda\vec{v}) \quad (4.3.2)$$

einer Variablen λ und leitet diese einfach nach λ ab bei $\lambda = 0$ (wo $\vec{r} + \lambda\vec{v} = \vec{r}$):

$$D_{\vec{v}}f(\vec{r}) \equiv \frac{dg_{\vec{v}}}{d\lambda}(0) = g'_{\vec{v}}(0). \quad (4.3.3)$$

⁵ $\partial_x f$ ist nur eine kürzere Schreibweise für $\partial f / \partial x$.

Um diese Ableitung zu berechnen, brauchen wir nun eine neue Form der Kettenregel für $g_{\vec{v}}(\lambda) = f(\vec{s}(\lambda))$, d.h. die Verknüpfung mit einer vektorwertigen Argumentfunktion $\vec{s}(\lambda) \equiv \vec{r} + \lambda\vec{v}$. Dazu können wir das totale Differential von f zusammen mit der Ableitung vektorwertiger Funktionen verwenden. Für die vektorwertige Argumentfunktion $\vec{s}(\lambda)$ gilt bei einer Änderung $d\lambda$

$$\frac{d\vec{s}}{d\lambda} = \vec{v} \quad \text{oder} \quad d\vec{s} = \vec{v}d\lambda.$$

Damit berechnet sich dg als totales Differential df nach (4.2.7) mit

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} d\lambda = \vec{v}d\lambda.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} dg_{\vec{v}} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{s}) v_1 d\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{s}) v_2 d\lambda + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{s}) v_3 d\lambda \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{s}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{s}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{s}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} d\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{s}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{s}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{s}) \end{pmatrix} \cdot \vec{v}d\lambda \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich das wichtige Ergebnis

$$D_{\vec{v}}f(\vec{r}) \equiv \frac{dg_{\vec{v}}}{d\lambda}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}) \end{pmatrix} \cdot \vec{v} \quad (4.3.4)$$

für die Richtungsableitung.

Dies lässt sich einfacher schreiben, wenn wir den sogenannten **Gradienten** $\vec{\nabla}f(\vec{r})$ des skalaren Feldes $f(\vec{r})$ einführen:

$$\text{grad } f \equiv \vec{\nabla}f \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.3.5)$$

Der vektorielle Nabla-Differentialoperator $\vec{\nabla}$ "wirkt" hier auf die skalare Funktion f , indem er in jeder seiner Komponenten auf f wirkt, was einen **Vektor** mit allen partiellen Ableitungen von f ergibt. Der Gradient $\vec{\nabla}f(\vec{r})$ einer skalaren Funktion $f(\vec{r})$ ist damit selbst eine **vektorwertige Funktion**.

Mit Hilfe des Gradienten lässt sich die Richtungsableitung (4.3.4) dann einfach als

$$D_{\vec{v}}f(\vec{r}) = \vec{\nabla}f(\vec{r}) \cdot \vec{v} \quad (4.3.6)$$

schreiben. Damit können wir auch die Richtung des Gradientenvektors $\vec{\nabla}f(\vec{r})$ etwas anschaulicher deuten: Die Richtungsableitung lässt sich nach (4.3.6) als Skalarprodukt des Gradienten $\vec{\nabla}f(\vec{r})$ mit der Richtung \vec{v} , in die abgeleitet wird, schreiben. Ein Skalarprodukt wird (i) maximal, wenn beide Vektoren parallel sind und in die gleiche Richtung zeigen, und es wird (ii) Null, wenn beide Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Daraus ergeben sich zwei wichtige Schlussfolgerungen:

- Wenn \vec{v} parallel und in Richtung des Gradienten $\vec{\nabla}f(\vec{r})$ zeigt, ist die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f(\vec{r})$ maximal. Das heißt aber:

Der Gradient $\vec{\nabla}f(\vec{r})$ zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion $f(\vec{r})$.

(4.3.7)

Die Länge des Gradientenvektors misst dabei die Steilheit des Anstiegs.

- Wenn \vec{v} senkrecht auf dem Gradienten $\vec{\nabla}f(\vec{r})$ steht, ist die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f(\vec{r})$ gleich Null. Das heißt aber, die Funktion $f(\vec{r})$ ändert sich in dieser Richtung nicht, also folgern wir:

Der Gradient $\vec{\nabla}f(\vec{r})$ steht senkrecht auf den Kontourlinien ("Höhenlinien") $f(\vec{r}) = \text{const}$.

(4.3.8)

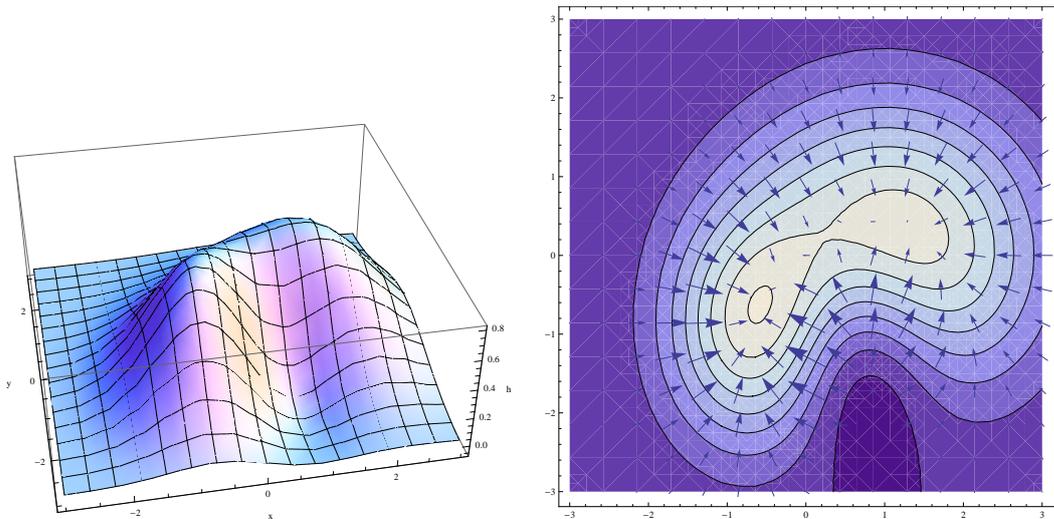


Abbildung 4.3: Links: 3D Plot der Funktion $h(x, y) = e^{-((x-1)^2+y^2)/3} - e^{-(x^2+(y+1)^2)/2} \sin x$. Rechts: Konturlinien ("Höhenlinien") $h(x, y) = \text{const}$ und Pfeile, die das Gradientenfeld $\vec{\nabla}h$ anzeigen. Man sieht: Der Gradient $\vec{\nabla}h$ steht immer senkrecht auf den Höhenlinien. Wo die Höhenlinien am dichtesten sind, steigt $h(x, y)$ am stärksten und sind die Gradientenpfeile am längsten

Beispiele

1) Der (zweidimensionale) Gradient der Funktion $h(x, y) = e^{-((x-1)^2+y^2)/3} - e^{-(x^2+(y+1)^2)/2} \sin x$ aus Abb. 4.3 ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} h &= -\frac{2}{3}(x-1)e^{-((x-1)^2+y^2)/3} + xe^{-(x^2+(y+1)^2)/2} \sin x - e^{-(x^2+(y+1)^2)/2} \cos x \\ \frac{\partial}{\partial y} h &= -\frac{2}{3}ye^{-((x-1)^2+y^2)/3} + (y+1)e^{-(x^2+(y+1)^2)/2} \sin x \\ \vec{\nabla}h &= -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} e^{-((x-1)^2+y^2)/3} + \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} e^{-(x^2+(y+1)^2)/2} \sin x \\ &\quad - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-(x^2+(y+1)^2)/2} \cos x \end{aligned}$$

2) Der Gradient von $f(x, y, z) = 3x^2 + xyz$ ist

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x + yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Die Richtungsableitung in eine Beispielrichtung $\vec{v} = (1, 1, 1)^t$ ist damit

$$D_{\vec{v}} f(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 6x + yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (6x + yz) + xz + xy$$

Rechenregeln Gradient

Wir leiten noch einige wichtige Rechenregeln für den Gradienten her.

- Ein wichtiges Beispiel in der Physik ist der Gradient des Betrages des Ortsvektors $|\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Mit den partiellen Ableitungen aus dem Beispiel (4.2.4) gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} |\vec{r}| = \frac{x}{|\vec{r}|}, \quad \frac{\partial}{\partial y} |\vec{r}| = \frac{y}{|\vec{r}|}, \quad \frac{\partial}{\partial z} |\vec{r}| = \frac{z}{|\vec{r}|},$$

also

$$\vec{\nabla} |\vec{r}| = \frac{1}{|\vec{r}|} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (4.3.9)$$

- Für Summen von skalaren Feldern $f(\vec{r})$ und $g(\vec{r})$ gilt **Linearität**:

$$\vec{\nabla}(\alpha f(\vec{r}) + \beta g(\vec{r})) = \alpha \vec{\nabla} f(\vec{r}) + \beta \vec{\nabla} g(\vec{r}). \quad (4.3.10)$$

Dies folgt für jede Komponente des Gradienten aus der Linearität der partiellen Ableitungen.

- Für Produkte von skalaren Feldern $f(\vec{r})$ und $g(\vec{r})$ gilt die **Produktregel**:

$$\vec{\nabla}(f(\vec{r})g(\vec{r})) = g(\vec{r})\vec{\nabla} f(\vec{r}) + f(\vec{r})\vec{\nabla} g(\vec{r}). \quad (4.3.11)$$

Auch diese folgt komponentenweise aus der Produktregel für partielle Ableitungen.

- Aus unserer Motivation des Gradienten über die Richtungsableitung folgt sofort eine **Kettenregel** für die Verkettung $f(\vec{s}(\lambda))$ eines Feldes $f(\vec{r})$ mit einer vektorwertigen Funktion $\vec{s}(\lambda)$ eines skalaren Parameters λ (siehe Gleichung (4.3.6) mit $\vec{v} = (d\vec{s}/d\lambda)(\lambda)$):

$$\frac{d}{d\lambda} f(\vec{s}(\lambda)) = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{s}}{d\lambda}(\lambda) \quad (4.3.12)$$

Oft wird $\lambda = t$ eine Zeitabhängigkeit sein in der Physik1.

- Für den Gradienten der Verkettung $f(g(\vec{r}))$ einer skalaren Funktion $f(x)$ mit einem skalaren Feld $g(\vec{r})$ gibt es eine weitere **Kettenregel**:

$$\vec{\nabla} f(g(\vec{r})) = f'(g(\vec{r})) \vec{\nabla} g(\vec{r}). \quad (4.3.13)$$

Auch diese Rechenregel folgt komponentenweise aus der Kettenregel für partielle Ableitungen.

- Mit (4.3.9) und (4.3.13) gilt für den Gradienten einer Funktion $V(\vec{r}) \equiv h(|\vec{r}|)$ des Betrages des Ortsvektors $|\vec{r}|$:

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \vec{\nabla} h(|\vec{r}|) = h'(|\vec{r}|) \vec{\nabla} |\vec{r}| = h'(|\vec{r}|) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad (4.3.14)$$

siehe auch (4.2.5).

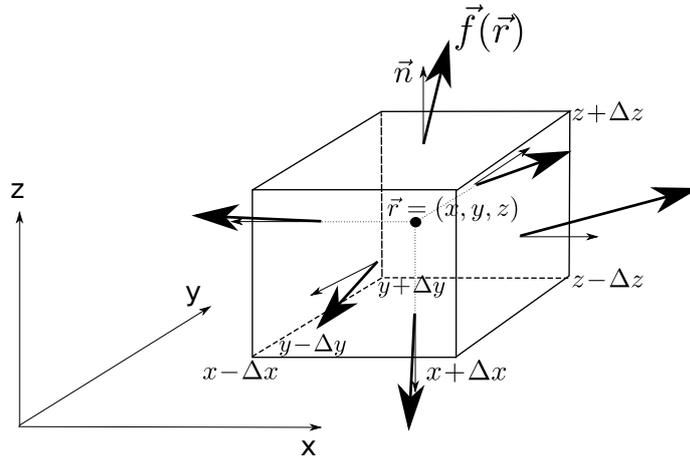
4.3.3 Divergenz*

Die **Divergenz** eines **Vektorfeldes** $\vec{f}(\vec{r}) = (f_x(\vec{r}), f_y(\vec{r}), f_z(\vec{r}))^t$ ist definiert als

$$\text{div } \vec{f} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x(\vec{r}) \\ f_y(\vec{r}) \\ f_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (4.3.15)$$

Die Divergenz ist also selbst wieder ein **Skalarfeld**. Die Divergenz hat die Bedeutung einer **Quellstärke** und wird in der Physik2 (E-Dynamik) eine sehr wichtige Rolle spielen.

Wir wollen uns die Definition (4.3.15) als Quellstärke eines Vektorfeldes veranschaulichen: Man sagt, ein Vektorfeld hat eine Quelle im Punkt \vec{r} , wenn wir einen kleinen Würfel um den Punkt legen können und dort in der Summe Vektorpfeile oder **Fluss** aus der Oberfläche "entspringen" ($\text{div} > 0$) oder "verschwinden" ($\text{div} < 0$). Dazu messen wir die Summe der *nach außen* gerichteten Pfeilkomponenten. Im Bild rechts ist eine Situation gezeigt, wo alle Pfeile des Feldes \vec{f} auf den Quaderoberflächen nach außen zeigen; damit sollte in \vec{r} eine Quelle des Vektorfeldes sitzen, also $\text{div } \vec{f}(\vec{r}) > 0$ sein.



Wir legen also einen infinitesimal kleinen Quader

$$[x - \Delta x, x + \Delta x] \times [y - \Delta y, y + \Delta y] \times [z - \Delta z, z + \Delta z]$$

mit Kantenlängen $2\Delta x$, $2\Delta y$ und $2\Delta z$ um den Punkt $\vec{r} = (x, y, z)$. Die Quaderoberfläche besteht aus sechs rechteckigen Flächen mit Flächeninhalten $\Delta F = 4\Delta x\Delta y$ (oben, unten), $\Delta F = 4\Delta x\Delta z$ (vorne, hinten) und $\Delta F = 4\Delta y\Delta z$ (rechts, links). Der **Fluss** eines Vektorfeldes \vec{f} über eine dieser kleinen Oberfläche ΔF in Richtung der *nach außen* gerichteten Normale \vec{n} (mit $|\vec{n}| = 1$) ist definiert als $\Delta F \vec{n} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ mit $\vec{n} = \pm \vec{e}_z$ (oben, unten), $\vec{n} = \pm \vec{e}_y$ (vorne, hinten) und $\vec{n} = \pm \vec{e}_x$ (rechts, links). Die Gesamtfluss $\Phi_{\vec{f}}(\vec{r})$ der aus der Quaderoberfläche *nach außen* austretenden Vektorpfeile ist dann

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{f}}(\vec{r}) &= [4\Delta x\Delta y f_z(x, y, z + \Delta z) - 4\Delta x\Delta y f_z(x, y, z - \Delta z)] + \\ &\quad [4\Delta x\Delta z f_y(x, y + \Delta y, z) - 4\Delta x\Delta z f_y(x, y - \Delta y, z)] + \\ &\quad [4\Delta y\Delta z f_x(x + \Delta x, y, z) - 4\Delta y\Delta z f_x(x - \Delta x, y, z)] \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} 8\Delta x\Delta y\Delta z \frac{\partial f_z}{\partial z}(\vec{r}) + 8\Delta x\Delta y\Delta z \frac{\partial f_y}{\partial y}(\vec{r}) + 8\Delta x\Delta y\Delta z \frac{\partial f_x}{\partial x}(\vec{r}) \\ &= \Delta V (\vec{\nabla} \cdot \vec{f})(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

also gleich dem Produkt aus Quadervolumen ΔV und Divergenz $(\vec{\nabla} \cdot \vec{f})(\vec{r})$ des Vektorfeldes im Ort \vec{r} . Der nach außen austretende Fluss $\Phi_{\vec{f}}(\vec{r})$ über die Oberfläche des kleinen Quaders ist ein Maß für die Quellstärke des Vektorfeldes \vec{f} bei \vec{r} . Daher ist nach (4.3.16) auch die Divergenz ein (auf das Quadervolumen bezogenes) Maß für diese Quellstärke.

Unsere Umformungen in (4.3.16) sind im Prinzip bereits der Kern eines Beweises für den **Gaußschen Integralsatz** (für ein Integral eines Vektorfeldes über eine kleine Quaderoberfläche), wie Sie in den Physik1- und Physik2-Vorlesungen noch sehen werden.

Beispiele

1) Die Divergenz von $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)^t$ ist

$$\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} xy + \frac{\partial}{\partial y} yz + \frac{\partial}{\partial z} xz = y + z + x$$

2) Die Divergenz von $\vec{r} = (x, y, z)^t$ ist

$$\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z = 3 \quad (4.3.17)$$

Rechenregeln Divergenz

Auch für die Divergenz gibt es einige Rechenregeln.

- Für Summen von Vektorfeldern $\vec{f}(\vec{r})$ und $\vec{g}(\vec{r})$ gilt **Linearität**:

$$\vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) = \alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \beta \vec{\nabla} \cdot \vec{g}. \quad (4.3.18)$$

Dies folgt aus der Linearität der partiellen Ableitungen.

- Für Produkte von von skalaren Funktionen mit Vektorfeldern $f(\vec{r})\vec{g}(\vec{r})$ gilt eine **Produktregel**:

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{g}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{g} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) \quad (4.3.19)$$

wo $\vec{\nabla} f$ der Gradient ist. Diese Rechenregel folgt komponentenweise aus der Produktregel für partielle Ableitungen.

- Für Kreuzprodukte von Vektorfeldern $\vec{f}(\vec{r}) \times \vec{g}(\vec{r})$ gilt eine weitere **Produktregel**:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g}) \quad (4.3.20)$$

Hier taucht bei einem Term ein Minuszeichen auf, da im Prinzip in einem Spatprodukt antizyklisch vertauscht wurde. Diese Rechenregel folgt auch komponentenweise aus der Produktregel für partielle Ableitungen.

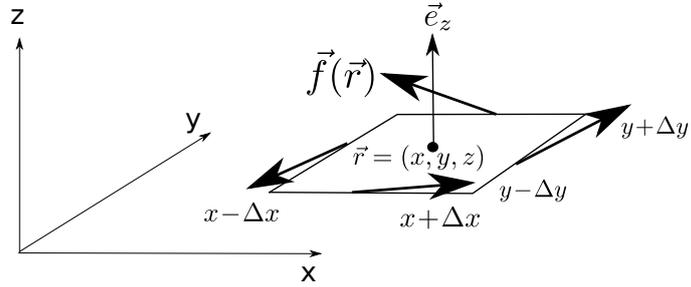
4.3.4 Rotation*

Die **Rotation** eines **Vektorfeldes** $\vec{f}(\vec{r}) = (f_x(\vec{r}), f_y(\vec{r}), f_z(\vec{r}))^t$ ist definiert als

$$\text{rot } \vec{f} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{f} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_x(\vec{r}) \\ f_y(\vec{r}) \\ f_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.3.21)$$

Die Rotation ist also selbst wieder ein **Vektorfeld**. Die Rotation hat die Bedeutung einer **Wirbelstärke** und wird in Physik1 und Physik2 noch wichtig werden.

Wir wollen uns die Definition (4.3.21) als Wirbelstärke eines Vektorfeldes veranschaulichen: Man sagt, ein Vektorfeld hat einen Wirbel z.B. in z -Richtung im Punkt \vec{r} , wenn wir eine kleine Quadrat parallel zur xy -Ebene (die die z -Richtung als Normale hat) um den Punkt legen können und dort in der Summe Vektorpfeile links ($(\text{rot}_z > 0)$) oder rechts ($(\text{rot}_z < 0)$) um das Quadrat, also um die z -Richtung, "herumlaufen" oder "zirkulieren". Dazu messen wir die Summe der *gegen den Uhrzeigersinn* gerichteten Pfeilkomponenten, die parallel zu den Quadratseiten verlaufen. Im Bild rechts ist eine Situation gezeigt, wo die Pfeile des Feldes \vec{f} links herum zirkulieren; damit sollte in \vec{r} $(\text{rot } \vec{f})_z(\vec{r}) > 0$ sein. Entsprechend kann man Quadrate in der xz -Ebene für die y -Komponente der Rotation (Wirbelstärke in y -Richtung) und in der yz -Ebene für die x -Komponente der Rotation (Wirbelstärke in x -Richtung) betrachten.



Wir legen also ein infinitesimal kleines Rechteck um $\vec{r} = (x, y, z)^t$ parallel zur xy -Ebene mit jeweils 2 Kanten der Länge $2\Delta x$ (vorne, hinten) und $2\Delta y$ (rechts, links). Die **Zirkulation** eines Vektorfeldes \vec{f} entlang einer Rechteck-Kante der Länge ΔL in Richtung \vec{s} (mit $|\vec{s}| = 1$) ist definiert als $\Delta L \vec{s} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ mit $\vec{s} = \pm \vec{e}_x$ (vorne, hinten) und $\vec{s} = \pm \vec{e}_y$ (rechts, links). Die Gesamtzirkulation $C_{\vec{f},z}(\vec{r})$ des Vektorfeldes entlang des Rechtecks parallel zur xy -Ebene und damit um die z -Richtung herum ist dann

$$\begin{aligned}
 C_{\vec{f},z}(\vec{r}) &= 2\Delta y[f_y(x + \Delta x, y, z) - f_y(x - \Delta x, y, z)] \\
 &\quad + 2\Delta x[f_x(x, y - \Delta y, z) - f_x(x, y + \Delta y, z)] \\
 &\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} 4\Delta x \Delta y \frac{\partial f_y}{\partial x}(\vec{r}) - 4\Delta x \Delta y \frac{\partial f_x}{\partial y}(\vec{r}) \\
 &= \Delta F (\vec{\nabla} \times \vec{f})_z(\vec{r})
 \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

also gleich dem Produkt aus Rechteckfläche ΔF und der z -Komponenten der Rotation $(\vec{\nabla} \times \vec{f})_z(\vec{r})$ des Vektorfeldes im Ort \vec{r} . Die Zirkulation $C_{\vec{f},z}(\vec{r})$ um das kleine Rechteck parallel zur xy -Ebene ist ein Maß für die Wirbelstärke des Vektorfeldes \vec{f} bei \vec{r} um die z -Richtung.

Daher ist nach (4.3.22) auch die Rotation in z -Richtung ein (auf die Rechteckfläche bezogenes) Maß für diese Wirbelstärke in der xy -Ebene. Ebenso zeigt man, dass die Zirkulation $C_{\vec{f},y}(\vec{r})$ um ein kleines Rechteck in der xz -Ebene ein Maß für die Wirbelstärke des Vektorfeldes \vec{f} bei \vec{r} um die y -Richtung ist und dass die Zirkulation $C_{\vec{f},x}(\vec{r})$ um ein kleines Rechteck in der yz -Ebene ein Maß für die Wirbelstärke des Vektorfeldes \vec{f} bei \vec{r} um die x -Richtung ist. Dies motiviert die Einführung der Rotation als *Vektor*, der die Wirbelstärken eines Vektorfeldes in allen drei möglichen Richtungen zusammenfasst.

Unsere Umformungen in (4.3.22) sind im Prinzip bereits der Kern eines Beweises für den **Integral-satz von Stokes** (für das Wegintegral eines Vektorfeldes längs einer kleinen Rechteckkurve), wie Sie in den Physik1- und Physik2-Vorlesungen noch sehen werden.

Beispiele

1) Die Rotation von $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)^t$ ist

$$\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} xz - \frac{\partial}{\partial z} yz \\ \frac{\partial}{\partial z} xy - \frac{\partial}{\partial x} xz \\ \frac{\partial}{\partial x} yz - \frac{\partial}{\partial y} xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Rechenregeln Rotation

Auch für die Rotation gibt es einige Rechenregeln.

- Für Summen von Vektorfeldern $\vec{f}(\vec{r})$ und $\vec{g}(\vec{r})$ gilt **Linearität**:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times (\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) = \alpha \vec{\nabla} \times \vec{f} + \beta \vec{\nabla} \times \vec{g}.} \quad (4.3.23)$$

Dies folgt aus der Linearität der partiellen Ableitungen.

- Für Produkte von von skalaren Funktionen mit Vektorfeldern $f(\vec{r})\vec{g}(\vec{r})$ gilt eine **Produktregel**:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times (f \vec{g}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{g} + f(\vec{\nabla} \times \vec{g})} \quad (4.3.24)$$

wo $\vec{\nabla} f$ der Gradient ist. Diese Rechenregel folgt komponentenweise aus der Produktregel für partielle Ableitungen.

4.3.5 Kombinationen von Gradient, Rotation und Divergenz*

Gradientenfelder sind rotationsfrei

Wir berechnen die Rotation eines **Gradientenfeldes** $\vec{\nabla} V$, dass sich als Gradient einer skalaren Funktion $V(\vec{r})$ schreiben lässt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} V - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} V \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} V - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} V \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} V - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} V \end{pmatrix} \text{Satz v. Schwarz } \underline{\underline{0}} \quad (4.3.25)$$

Dies ist im Prinzip die Identität $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, wobei $\vec{\nabla}$ die Rolle von \vec{a} spielt. Wir sehen also: Gradientenfelder sind immer rotationsfrei.

In Physik1 und Physik2 wird in der Theorie der Potentiale dann noch die wichtige Frage beantwortet, ob denn auch umgekehrt alle rotationsfreien Felder als Gradientenfelder geschrieben werden können.

Wirbelfelder sind quellfrei

Wir berechnen die Divergenz eines **Wirbelfeldes** $\vec{\nabla} \times \vec{A}$, das sich als Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}) = (A_x(\vec{r}), A_y(\vec{r}), A_z(\vec{r}))^t$ schreiben lässt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &\stackrel{\text{Satz v. Schwarz}}{=} 0 \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

Dies ist im Prinzip die Identität $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{a}) = 0$, wobei wir im Spatprodukt zyklisch vertauscht haben, siehe (2.6.2); dabei spielt $\vec{\nabla}$ die Rolle von \vec{a} . Wir sehen also: Wirbelfelder sind immer quellfrei.

In der Physik2 wird in der Theorie der Vektorpotentiale (des Magnetfeldes) dann auch die Frage beantwortet, ob denn auch alle quellfreien Felder als Rotationsfelder geschrieben werden können.

Laplace-Operator

Der **Laplace-Operator** Δ ist ein Operator, der zweimal differenziert, und ist definiert als

$$\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.3.27}$$

Er hängt mit Gradient und Divergenz zusammen (siehe Übung):

$$\text{div}(\text{grad } V) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \Delta V$$

Produkt- und andere Rechenregeln für div, grad, rot

Hier eine Zusammenfassung diverser Rechenregeln, die man alle in mehr oder weniger langen Rechnungen verifizieren kann (was wir teilweise auch schon getan haben). $f(\vec{r})$ ist ein Skalarfeld, $\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$ sind Vektorfelder:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} A &= \Delta A \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) &= \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\ \vec{\nabla} \times (f \vec{A}) &= \vec{\nabla} f \times \vec{A} + f(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \end{aligned}$$

4.4 Krummlinige Koordinaten*

Bisher haben wir alle Rechnungen in **kartesischen Koordinaten** durchgeführt. In diesem einfachen Koordinatensystem haben wir *gerade* Koordinatenachsen in Richtung der drei Einheitsvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z , die paarweise senkrecht aufeinander stehen und im ganzen Raum *konstant* sind.

Oft hat man es allerdings in der Physik auch mit “runden” Objekten oder Bahnen von Bewegungen zu tun. Dann stellt es sich als zweckmäßig heraus, etwas kompliziertere **krummlinige Koordinaten** zu verwenden. Diese haben die Eigenschaft, dass die Koordinatenachsen, also die Linien auf denen sich nur eine Koordinate ändert *keine Geraden* mehr sind. Das bedingt auch, dass sich die Einheitsvektoren, die an jedem Punkt des Raumes in Richtung der Koordinatenachsen zeigen, im Raum *ändern*. Bei den hier vorgestellten krummlinigen Koordinatensystemen wird es aber zumindest so bleiben, dass die Einheitsvektoren in jedem Punkt des Raumes aufeinander senkrecht stehen.

Wichtige Beispiele solcher krummlinigen Koordinatensysteme sind **Polarkoordinaten** im \mathbb{R}^2 , **Zylinderkoordinaten** im \mathbb{R}^3 und **Kugelkoordinaten** im \mathbb{R}^3 .

4.4.1 Kartesische Koordinaten

Normalerweise werden Vektoren im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 durch Angabe der kartesischen Koordinaten x , y und z angegeben,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z. \quad (4.4.1)$$

Die drei Richtungen, entlang der sich die Koordinaten ändern, können zur Definition der kartesischen Einheitsvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z benutzt werden. Bei kartesischen Koordinaten sind dies genau die **konstanten Einheitsvektoren**

$$\vec{e}_x = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Auch in krummlinigen Koordinaten kann man auf diese Art Einheitsvektoren definieren, deren Richtung im Raum sich allerdings von Punkt zu Punkt ändert.

Man sollte im Folgenden immer beachten, dass sich die Spaltenvektorschreibweise in Gl. (4.4.1) immer auf die kartesischen Koordinaten bezieht. In krummlinigen Koordinaten werden wir Vektoren immer analog zur rechten Schreibweise in (4.4.1) explizit mit Hilfe der entsprechenden Einheitsvektoren angeben.

4.4.2 Polarkoordinaten

In der Ebene \mathbb{R}^2 kann man einen Vektor \vec{r} nicht nur durch Angabe seiner kartesischen Koordinaten x und y angeben, sondern auch durch Angabe seiner **Länge** r ($r \in [0, \infty[$) und des **Winkels** φ , den er mit der x -Achse einschließt (mit $\varphi \in [0, 2\pi[$), siehe Abb. 4.4. Die beiden Koordinaten r und φ nennt man **Polarkoordinaten** des Vektors \vec{r} .

Man kann nun die kartesischen Koordinaten x und y durch die Polarkoordinaten ausdrücken:

$$\vec{r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

Natürlich kann man auch umgekehrt Formeln für die beiden Polarkoordinaten als Funktion der

kartesischen Koordinaten x und y angeben:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{r}| \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Die Koordinatenlinien mit konstanter Koordinate r sind also **Kreise** (siehe auch Abb. 4.4) und damit gekrümmt. Weil der Tangens π -periodisch ist und \arctan daher nur Werte $\in]-\pi/2, \pi/2[$ annehmen kann, während φ Werte $\in]0, 2\pi]$ annimmt, müssen wir noch eine Fallunterscheidung führen, um explizit nach φ aufzulösen:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{wenn } x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{wenn } x < 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{wenn } x > 0, y < 0 \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Der Winkel φ springt dann entlang der positiven reellen Achse ($x > 0, y = 0$) von 2π nach 0 .

Die **Einheitsvektoren** \vec{e}_r und \vec{e}_φ , entlang denen sich der Radius r bzw. der Winkel φ ändern, sind dann

$$\vec{e}_r \equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}(r, \varphi)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}(r, \varphi) \right|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi \equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(r, \varphi)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right|} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (4.4.5)$$

Mit dem Einheitsvektor \vec{e}_r gilt in Polarkoordinaten damit immer

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad \text{oder} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (4.4.6)$$

Die Einheitsvektoren ändern sich offensichtlich, wenn sich φ ändert, d.h. sie hängen vom Punkt \vec{r} ab, an dem sie betrachtet werden. Sie folgen dabei immer den "krummen" Koordinatenlinien und zeigen nicht in eine konstante Richtung wie die kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_{x,y,z}$. Daher kann man auch die Einheitsvektoren nach φ ableiten und bekommt folgende Rechenregeln für diese Operation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_r &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = -\vec{e}_r. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Wir sehen aber, dass trotzdem beide Einheitsvektoren in jedem Punkt im Raum senkrecht aufeinander stehen, also ein **lokales Zweibein** bilden:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = -\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi = 0. \quad (4.4.8)$$

\vec{e}_r und \vec{e}_φ bilden daher in jedem Punkt (für jedes r und φ) eine Basis des \mathbb{R}^2 .

Beispiel: Kreisbewegung

Wir betrachten wieder die Bewegung auf einer Kreisbahn in der xy -Ebene mit Radius R mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω ,

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (4.4.9)$$

vgl. auch (4.1.5) oben. In Polarkoordinaten können wir die gleiche Bewegung auch einfach als

$$\begin{aligned} r(t) &= R = \text{const}, \quad \varphi(t) = \omega t \\ \vec{r}(t) &= R\vec{e}_r(\varphi(t)) \end{aligned}$$

beschreiben. Auch Zeitableitungen lassen sich oft einfacher in Polarkoordinaten durchführen, wenn man beachtet, dass sich die krummlinigen Einheitsvektoren “mitbewegen” und die Rechenregeln (4.4.7) für deren Ableitungen verwendet. Damit ergibt sich für Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= R\vec{e}_r(\varphi(t)) \\ \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) &= R\dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_r(\varphi(t)) = R\omega\vec{e}_\varphi(\varphi(t)) \\ \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) &= R\omega\dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi(\varphi(t)) = -R\omega^2\vec{e}_r(\varphi(t))\end{aligned}$$

was wir auch schon oben berechnet hatten.

Beispiel: Allgemeine Bewegung in Polarkoordinaten

Wir können jede *beliebige* Bewegung in der Ebene durch Angabe der Funktionen $r(t)$ und $\varphi(t)$ beschreiben. Dann gilt

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= r(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} = r(t)\vec{e}_r \\ \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \stackrel{(4.4.7)}{=} \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + (\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi \\ &\stackrel{(4.4.7)}{=} (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Wir haben hier benutzt, dass wegen (4.4.7) $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ und $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$ gilt.

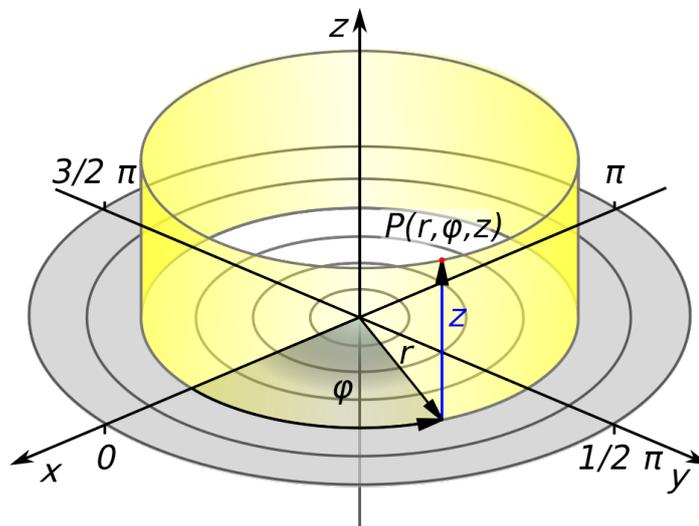


Abbildung 4.4: Dreidimensionale Zylinderkoordinaten bzw. zweidimensionale Polarkoordinaten (für $z = 0$). (Quelle: Wikipedia).

4.4.3 Zylinderkoordinaten

Im Raum \mathbb{R}^3 kann man einen Vektor \vec{r} dann auch durch Angabe seiner **Polarkoordinaten** in der xy -Ebene und einer zusätzlichen **Höhe** z ($z \in]-\infty, \infty[$) angeben, also

$$\vec{r}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.4.10)$$

Die drei Koordinaten r , φ und z nennt man dann **Zylinderkoordinaten** des Vektors \vec{r} . Die Koordinate z ist also identisch mit der kartesischen Koordinate z . Die anderen beiden Polarkoordinaten r und φ kann man dann auch wieder umgekehrt mittels (4.4.3) und (4.4.4) als Funktion der kartesischen Koordinaten x und y schreiben. Die Koordinatenlinien mit konstanter Koordinate r sind in Zylinderkoordinaten **Zylinderoberflächen** (gelb eingefärbt in Abb. 4.4) und damit gekrümmt.

In vielen Büchern wird die Koordinate r in Zylinderkoordinaten auch ρ genannt. Der Grund dafür ist, dass in Zylinderkoordinaten

$$|\vec{r}| = (r^2 + z^2)^{1/2} \neq r \quad (4.4.11)$$

gilt (im Gegensatz zu (4.4.3) in Polarkoordinaten) und damit die Bezeichnung r potentiell verwirrend sein kann (wenn man den Pfeil über einem Vektor weglässt, bezeichnet man damit normalerweise den Betrag des Vektors, also $a = |\vec{a}|$ usw.). Auf der anderen Seite bietet sich die Bezeichnung r aus Analogiegründen zu den eng verwandten Polarkoordinaten an.

Die drei **Einheitsvektoren** \vec{e}_r , \vec{e}_φ und \vec{e}_z , entlang denen sich der Radius r , der Winkel φ und die Höhe z ändern, sind dann

$$\vec{e}_r \equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}(r, \varphi, z)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}(r, \varphi, z) \right|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.12)$$

$$\vec{e}_\varphi \equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(r, \varphi, z)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(r, \varphi, z) \right|} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.13)$$

$$\vec{e}_z \equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}(r, \varphi, z)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}(r, \varphi, z) \right|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.4.14)$$

Mit den Einheitsvektoren \vec{e}_r und \vec{e}_z gilt in Zylinderkoordinaten daher

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \quad (4.4.15)$$

Auch hier ändern sich die Einheitsvektoren, wenn sich φ ändert, d.h. sie hängen vom Punkt \vec{r} ab, an dem sie betrachtet werden und folgen dabei den "krummen" Koordinatenlinien. Auch in Zylinderkoordinaten gelten die Ableitungsregeln (4.4.7) für \vec{e}_r und \vec{e}_φ , während der kartesische Einheitsvektor \vec{e}_z ja konstant ist.

Alle drei Einheitsvektoren stehen aber wieder in jedem Punkt im Raum senkrecht aufeinander, bilden also ein **lokales Dreibein**:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi &= -\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi = 0 \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z &= 0, \quad \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = 0. \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

\vec{e}_r , \vec{e}_φ und \vec{e}_z bilden daher in jedem Punkt (für jedes r , φ und z) eine Basis des \mathbb{R}^3 .

Beispiel: Schraubenbewegung

Als Beispiel betrachten wir hier die Bewegung auf einer Schraubenbahn, die sich als Überlagerung einer Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω und Radius R einer Bewegung in z -Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v_z ergibt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ v_z t \end{pmatrix} \quad (4.4.17)$$

In Zylinderkoordinaten können wir die gleiche Bewegung auch einfach als

$$\begin{aligned} r(t) &= R = \text{const}, \quad \varphi(t) = \omega t, \quad z(t) = v_z t \\ \vec{r}(t) &= R\vec{e}_r(\varphi(t)) + v_z t \vec{e}_z \end{aligned}$$

beschreiben. Auch in Zylinderkoordinaten können wir die Ableitungsregeln (4.4.7) für \vec{e}_r und \vec{e}_φ nutzen, um Geschwindigkeit und Beschleunigung zu berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= R\vec{e}_r(\varphi(t)) + v_z t \vec{e}_z \\ \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) &= R\dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_r(\varphi(t)) + v_z \vec{e}_z = R\omega \vec{e}_\varphi(\varphi(t)) + v_z \vec{e}_z \\ \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) &= R\omega \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi(\varphi(t)) = -R\omega^2 \vec{e}_r(\varphi(t)) \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung sagt genau aus, dass bei der Schraubenbewegung der Kreisgeschwindigkeit eine konstante Geschwindigkeit in z -Richtung überlagert ist.

Beispiel: Allgemeine Bewegung in Zylinderkoordinaten

Wir können jede *beliebige* Bewegung im Raum durch Angabe der Funktionen $r(t)$, $\varphi(t)$ und $z(t)$ beschreiben. Dies entspricht dann einer zweidimensionalen Bewegung in Polarkoordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$ (die wir schon oben behandelt haben) und einer zusätzlichen Bewegung in z -Richtung $z(t)$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi(t) \\ r(t) \sin \varphi(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = r(t)\vec{e}_r + z(t)\vec{e}_z$$

Wir benutzen wieder $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ und $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_r$, was wie bei Polarkoordinaten gilt, und $\dot{e}_z = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z \end{aligned}$$

4.4.4 Kugelkoordinaten

Im Raum \mathbb{R}^3 kann man einen Vektor \vec{r} aber auch durch Angabe des **Radius** r ($r \in [0, \infty[$), eines **Azimuthwinkels** φ ($\varphi \in [0, 2\pi[$) und eines zweiten **Polarwinkels** ϑ ($\vartheta \in [0, \pi]$) angeben,

$$\vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (4.4.18)$$

siehe Abb. 4.5. ⁶ Man kann auch wieder umgekehrt Formeln für die drei Kugelkoordinaten als Funktion der kartesischen Koordinaten x , y und z angeben:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{r}|$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (4.4.19)$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (4.4.20)$$

wobei wir $\varphi \in [0, 2\pi[$ dann wieder über die Fallunterscheidung (4.4.4) erhalten und

$$\vartheta = \arccos \frac{z}{r} \quad (4.4.21)$$

wenn wir den Wertebereich des $\arccos x$ als $[0, \pi]$ wählen (rote durchgezogene Linie in Abb. 3.4). Die Koordinatenlinien mit konstanter Koordinate r sind in Kugelkoordinaten **Kugeloberflächen** (siehe auch Abb. 4.5) und damit gekrümmt. Man beachte, dass in Kugelkoordinaten (im Gegensatz zu Zylinderkoordinaten, aber wie bei Polarkoordinaten) wieder $r = |\vec{r}|$ für die Koordinate r gilt.

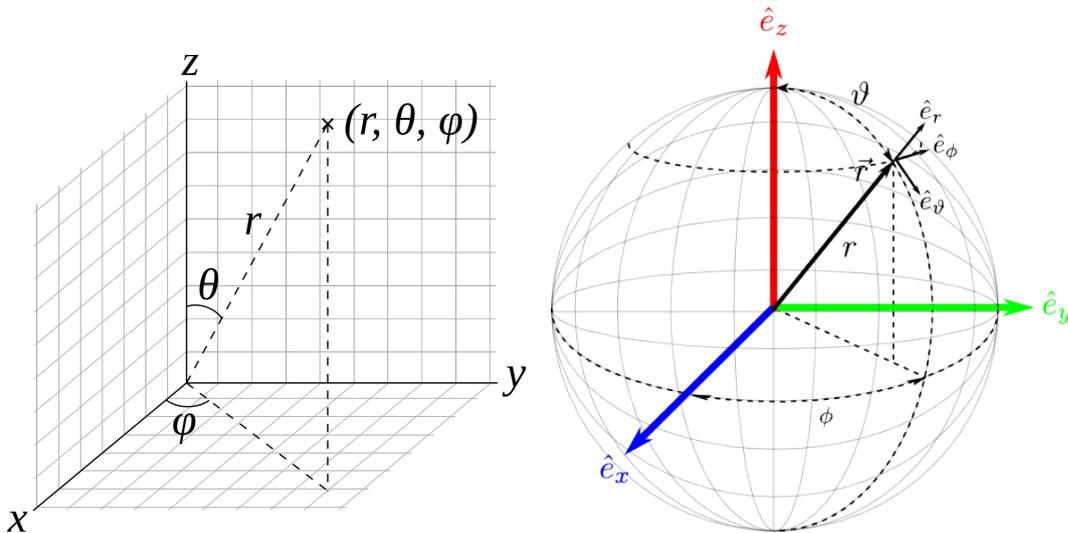


Abbildung 4.5: Kugelkoordinaten und Einheitsvektoren. (Quelle: Wikipedia).

Die drei **Einheitsvektoren** \vec{e}_r , \vec{e}_φ und \vec{e}_ϑ , entlang denen sich der Radius r , der Winkel φ und die Höhe z ändern, sind dann

$$\vec{e}_r \equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}(r, \vartheta, \varphi)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}(r, \vartheta, \varphi) \right|} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (4.4.22)$$

$$\vec{e}_\varphi \equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(r, \vartheta, \varphi)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(r, \vartheta, \varphi) \right|} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.23)$$

$$\vec{e}_\vartheta \equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}(r, \vartheta, \varphi)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}(r, \vartheta, \varphi) \right|} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (4.4.24)$$

⁶ Bitte aufpassen: die Koordinate "r" in Kugelkoordinaten (Abstand vom Ursprung) und die Koordinate "r" in Zylinderkoordinaten (Abstand von der z-Achse) bedeuten etwas *verschiedenes*, obwohl hier oft der gleiche Buchstabe verwendet wird. Manchmal benutzt man deshalb auch ein ρ statt r in Zylinderkoordinaten.

Mit dem Einheitsvektor \vec{e}_r gilt in Kugelkoordinaten damit wieder

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad \text{oder} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (4.4.25)$$

Auch in Kugelkoordinaten ändern sich die Einheitsvektoren, und zwar sowohl wenn sich φ als auch wenn sich ϑ ändern, d.h. sie hängen vom Punkt \vec{r} ab, an dem sie betrachtet werden, siehe Abb. 4.5.

Daher kann man hier die Einheitsvektoren sowohl nach φ als auch nach ϑ ableiten und bekommt folgende Rechenregeln für diese Operationen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_r &= \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \sin \vartheta \vec{e}_\varphi, & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \vec{e}_r &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} = \vec{e}_\vartheta \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin \vartheta \vec{e}_r - \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta, & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \vec{e}_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\vartheta &= \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \vartheta \vec{e}_\varphi, & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta &= \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix} = -\vec{e}_r \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Auch in Kugelkoordinaten stehen alle drei Einheitsvektoren in jedem Punkt im Raum senkrecht aufeinander, bilden also ein **lokales Dreibein**:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi &= -\sin \vartheta \cos \varphi \sin \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi = 0 \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\vartheta &= \sin \vartheta \cos \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \cos \vartheta \sin \vartheta = 0 \\ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\vartheta &= -\sin \varphi \cos \vartheta \cos \varphi + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \varphi = 0 \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

\vec{e}_r , \vec{e}_φ und \vec{e}_ϑ bilden daher in jedem Punkt (für jedes r , φ und ϑ) eine Basis des \mathbb{R}^3 .

4.5 Übungen Kapitel 4

1. Partielle Ableitungen

Gegeben sind folgende Funktionen:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \exp(xy) + x^2 - y^2 \\g(x, y, z) &= \sin(xy) + y^3 z^2 - 2 \ln(x) \\h(x, y, z, t) &= \tan(x) + y^2 z^3 t^4 + 4 \sinh(x) + a^y, \quad \text{wobei } a = \text{const.}\end{aligned}$$

Bestimmen Sie

- alle ersten partiellen Ableitungen,
- das totale Differential von $f(x, y)$,
- alle zweiten partiellen Ableitungen von $f(x, y)$.

2. Richtungsableitung

Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f(\vec{r})$ von

$$f(x, y, z) = ze^{3(x^2+y^2)}$$

in $\vec{r} = \vec{0}$ für die Richtungen

$$\text{(i) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In welche Richtung \vec{v} ist die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f(\vec{0})$ maximal?

3. Gradient I

Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion $h(x, y) = x^2 + 2y^2$ und die Gradientenvektoren.

4. Gradient II

Berechnen Sie den Gradienten folgender Funktionen:

- $V(x, y, z) = 2x + 2y^2 + 8z$ und $W(x, y, z) = 9xy^2 + \sin(z^2) + xyz$
- $V(\vec{r}) = |\vec{r}|^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$
- $V(\vec{r}) = |\vec{r}|^{-1}$

5. Rotation, Divergenz

Berechnen Sie Rotation und Divergenz folgender Vektorfelder:

a) $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r}$

b) $\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ x^2z \\ 3xye^z \end{pmatrix}$

6. $\vec{\nabla}$ -Rechenregeln (schwierig)

Das Skalarfeld $V(x, y, z)$ und das Vektorfeld \vec{v} sind gegeben. Zeigen Sie:

a)

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \Delta V \quad \text{mit}$$

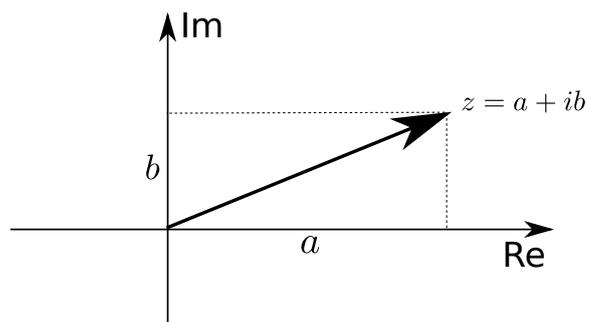
$$\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{Laplace-Operator})$$

b)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \Delta \vec{v}$$

Tipp: bac-cab Formel $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, siehe (2.6.7).

5 Komplexe Zahlen



$$i^2 = -1$$
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

5.1 Definition

Der Zahlraum \mathbb{C} der komplexen Zahlen erweitert den reellen Zahlraum \mathbb{R} . Wir geben zwei Motivationen, warum wir diese Erweiterung vornehmen wollen.

- 1) Die übliche Motivation ist, dass im reellen Zahlraum nicht alle algebraischen Gleichungen lösbar sind. eine **algebraische Gleichung** ist eine Gleichung, die mit Polynomen formuliert wird. Die einfachste solche Gleichung, die mit reellen Zahlen nicht lösbar ist, ist

$$x^2 = -1.$$

Der Zahlraum der komplexen Zahlen wird genau so definiert sein, dass alle algebraischen Gleichung lösbar sind. So wird die imaginäre Einheit $x = i$ gerade obige Gleichung lösen.

- 2) Wir können komplexe Zahlen auch so motivieren, dass wir doch versuchen im Vektorraum \mathbb{R}^2 (der zweidimensionalen Zahlenebene) eine "echte" Multiplikation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.1)$$

einzuführen, die auch immer eindeutig nach $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ aufgelöst werden kann, d.h. wo für jeden Vektor auch wirklich ein Inverses existiert (so dass durch diese Vektoren dann auch tatsächlich "geteilt" werden kann).

Wir wollen uns überzeugen, dass dies durch die Vorschrift

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}} \quad (5.1.2)$$

möglich ist, die folgende Eigenschaften besitzt:

- Wenn die zweite Komponente =0 ist, erhalten wir die gewohnte reelle Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Das neutrale Element der Multiplikation (5.1.2) ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Es existiert *immer* in **Inverses**, und zwar

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.3)$$

Dies prüfen wir leicht durch explizite Probe:

$$\frac{1}{y_1^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \stackrel{(5.1.2)}{=} \frac{1}{y_1^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} y_1^2 + y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit kann in (5.1.1) immer nach $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ aufgelöst werden.

Man nennt

- $$\boxed{\begin{array}{l} 1. \text{ Komponente} = \text{Realteil} \\ 2. \text{ Komponente} = \text{Imaginärteil} \end{array}}$$

und schreibt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= a + ib \quad , \text{ also} \\ i &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Die Zahl i heißt **imaginäre Einheit**. Mit (5.1.2) erhalten wir

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{(5.1.2)}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also

$$\boxed{i^2 = -1} \tag{5.1.5}$$

d.h. die imaginäre Einheit löst also genau die algebraische Gleichung $x^2 = -1$, zu der wir im Raum der reellen Zahlen keine Lösung finden konnten.

Alle Zahlen $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ bilden den Körper der **komplexen Zahlen** \mathbb{C} . Man nennt

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re} z = \mathbf{Realteil} \text{ von } z \\ b &= \operatorname{Im} z = \mathbf{Imaginärteil} \text{ von } z \end{aligned}$$

Man stellt die komplexen Zahlen dann auch oft wie Vektoren aus dem \mathbb{R}^2 in der sogenannten **komplexen Ebene** dar mit der realen Achse als x-Achse und der imaginären Achse als y-Achse, siehe Abb. 5.1.

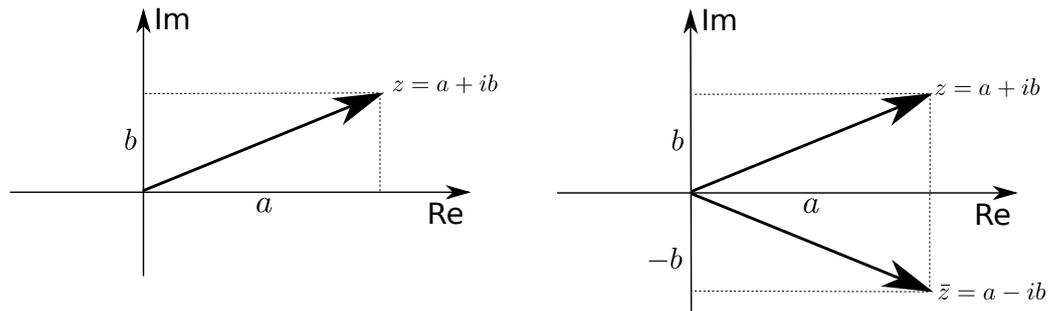


Abbildung 5.1: Links: Darstellung der komplexen Zahl $z = a + ib$ in der komplexen Ebene. Rechts: Das komplex konjugierte $\bar{z} = a - ib$ in der komplexen Ebene.

5.2 Rechenregeln

Mit komplexen Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ kann man letztlich wie mit reellen Zahlen rechnen, wobei man nur beachten muss, dass Real- und Imaginärteil wie zwei Komponenten eines Vektors im \mathbb{R}^2 getrennt behandelt werden und nur bei der Multiplikation wegen $i^2 = -1$ "mischen". Das Endergebnis einer Rechnung wird im Normalfall auch wieder in die Form $a + ib$ gebracht, d.h. nach Realteil und Imaginärteil sortiert. Wie rechnen also wie mit reellen Zahlen und verwenden $i^2 = -1$, um das Ergebnis letztlich wieder als $a + ib$ zu schreiben (d.h. es sollen keine Potenzen i^2 , i^3 , usw. oder imaginäre Anteile in Nennern auftauchen).

5.2.1 Addition, Multiplikation

Die **Addition** erfolgt dann getrennt für Real- und Imaginärteil (wie bei zweidimensionalen Vektoren)

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Die **Multiplikation** ist dann

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1), \end{aligned}$$

wobei wir nur ausmultipliziert haben und $i^2 = -1$ benutzt haben, um das Ergebnis wieder in die Form $a + ib$ zu bringen.. Dies ist die gleiche Vorschrift wie in (5.1.2) oben.

Gleichheit zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 liegt genau dann vor, wenn Realteil *und* Imaginärteil gleich sind:

$$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \text{ und } b_1 = b_2.$$

Jede komplexe Gleichung beinhaltet also zwei reelle Gleichungen.

Rechenbeispiele

Wir berechnen als Beispiele einige elementare Summen und Produkte komplexer Zahlen:

$$\begin{aligned} (3 + 4i) + (1 - 3i) &= (3 + 1) + (4 - 3)i = 4 + i \\ (3 + 4i) \cdot (1 - 3i) &= 3 + 4i - 9i - 12i^2 = 15 - 5i \\ (2 + i) + (2 - i) &= 4 \\ (2 + i) - (2 - i) &= 2i \\ (2 + i) \cdot \frac{2 - i}{5} &= \frac{4 - i^2}{5} = 1 \\ (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) &= 9 - 16i^2 = 25 \end{aligned}$$

5.2.2 Konjugation, Betrag, Inverses

Eine beim Rechnen wichtige Operation mit komplexen Zahlen ist die **Konjugation**. Man nennt

$$\boxed{\bar{z} = z^* \equiv a - ib} \tag{5.2.1}$$

die **komplex konjugierte** komplexe Zahl \bar{z} oder z^* zu $z = a + ib$. Es gilt also $\operatorname{Re}z^* = \operatorname{Re}z$ und $\operatorname{Im}z^* = -\operatorname{Im}z$. In der komplexen Zahlenebene bedeutet die Konjugation einer Zahl, dass der entsprechende Vektor an der reellen Achse gespiegelt wird, siehe Abb. 5.1, rechts.

Der **Betrag** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + ib$ ist definiert als die Länge des Vektors z in der komplexen Zahlenebene, also

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{zz^*}} \quad (5.2.2)$$

Für Beträge gilt bei Multiplikation dann

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

wie bei reellen Zahlen.

Schließlich gibt es zu jeder komplexen Zahl ein **Inverses**, siehe (5.1.3) oben:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

wo wir mit $z^* = a - ib$ erweitert haben, um einen reellen Nenner zu bekommen.

Rechenbeispiele

Wir betrachten wieder einige Rechenbeispiele:

$$\begin{aligned} \overline{3 + 4i} &= 3 - 4i \\ |3 + 4i| &= \sqrt{(3 + 4i)(3 + 4i)} = \sqrt{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \sqrt{25} = 5 \\ \frac{1}{3 + 4i} &= \frac{3 - 4i}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{3 - 4i}{25} \\ \frac{1}{2 + i} &= \frac{2 - i}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i}{5} \\ \frac{2 + i}{2 - i} &= \frac{(2 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{3 + 2i}{5} \end{aligned}$$

Damit können wir nun auch *jede* quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ lösen:

$$x = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{wenn } p^2 > 4q \\ -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} & \text{wenn } p^2 < 4q \end{cases}$$

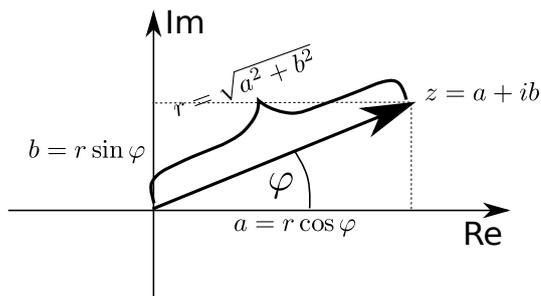
5.3 Polardarstellung

5.3.1 Definition

Ein beliebiges $z = a + ib \in \mathbb{C}$ lässt sich auch als

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (5.3.1)$$

schreiben mit dem **Betrag** $r = |z| > 0$ und dem **Polarwinkel** φ , der auch **Argument** von z , $\varphi = \arg(z)$ genannt wird. Um alle Zahlen in der komplexen Zahlenebene darstellen zu können, muss offensichtlich $\varphi = \arg(z) \in]-\pi, \pi]$ gelten, damit $\cos \varphi + i \sin \varphi$ den gesamten komplexen Einheitskreis abdeckt.



Die Polardarstellung ist völlig analog zu Polarkoordinaten in der komplexen Zahlenebene. Für Real- und Imaginärteil gilt dann

$$a = r \cos \varphi$$

$$b = r \sin \varphi$$

Umgekehrt können wir auch r und φ durch a und b ausdrücken:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (5.3.2)$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}$$

Weil der Tangens π -periodisch ist und \arctan daher nur Werte $\in]-\pi/2, \pi/2[$ annehmen kann, während φ Werte $\in]-\pi, \pi]$ annimmt, müssen wir noch eine Fallunterscheidung führen, um nach φ aufzulösen:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{wenn } a > 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a} & \text{wenn } a < 0, b \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{b}{a} & \text{wenn } a < 0, b < 0 \end{cases} \quad (5.3.3)$$

Das Argument $\arg(z)$ *springt* dann entlang der negativen reellen Achse ($a < 0, b = 0$) von $-\pi$ nach π .

Beispiel

Wir wandeln $1 + i$ in Polardarstellung um:

$$r^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \quad \text{also } r = \sqrt{2}$$

$$\tan \varphi = 1, \quad \text{also } \varphi = \pi/4$$

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

5.3.2 Euler-Formel

Für komplexe Zahlen gilt die berühmte **Euler-Formel**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (5.3.4)$$

Wir wollen im Folgenden Funktionen wie die Exponentialfunktion $e^{i\varphi}$ mit einem komplexen Argument immer über ihre Taylorreihe auch in der komplexen Ebene definieren. Dies ist auch für andere Funktionen wie Sinus, Cosinus und Logarithmus usw. die übliche Vorgehensweise. Dies hat die wichtige Konsequenz, dass die uns bekannten Rechenregeln für solche Funktionen, wie $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ oder auch die Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen auch im Komplexen erhalten bleiben, da Sie sich letztlich auch aus den entsprechenden Taylorreihen herleiten lassen.

Daher beweisen wir die Euler-Formel über die Potenzreihen (3.5.12) von $\exp x$, (3.5.16) von $\sin x$ und (3.5.17) von $\cos x$ beweisen wollen, die auch für komplexe $x \in \mathbb{C}$ ihre Gültigkeit behalten sollen. Es gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad \text{also}$$

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n \varphi^n$$

Für i^n gilt

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \dots, \quad \text{also}$$

$$i^n = \begin{cases} n = 2k \text{ gerade} : & (-1)^k \\ n = 2k + 1 \text{ ungerade} : & i(-1)^k \end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} i^{2k} \varphi^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} i^{2k+1} \varphi^{2k+1} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k \varphi^{2k}}_{=\cos \varphi} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k \varphi^{2k+1}}_{=\sin \varphi} \\ &= \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned}$$

Oder wenn wir die Taylorreihe ausschreiben:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi + \frac{1}{2!} i^2 \varphi^2 + \frac{1}{3!} i^3 \varphi^3 + \frac{1}{4!} i^4 \varphi^4 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2!} \varphi^2 + \frac{1}{4!} \varphi^4 - \dots + i \left(\varphi - \frac{1}{3!} \varphi^3 + \dots \right) \\ &= \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned}$$

Aus der Euler-Formel folgt insbesondere

$$\boxed{|e^{i\varphi}|^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1} \quad (5.3.5)$$

d.h. $e^{i\varphi}$ liegt immer auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene. Weiter gilt (siehe Abb. 5.2)

$$\begin{aligned} e^{i\pi/2} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \\ e^{i\pi} &= \cos \pi + i \sin \pi = -1 \\ e^{i\frac{3}{2}\pi} &= -i \\ e^{2\pi i} &= 1 \end{aligned}$$

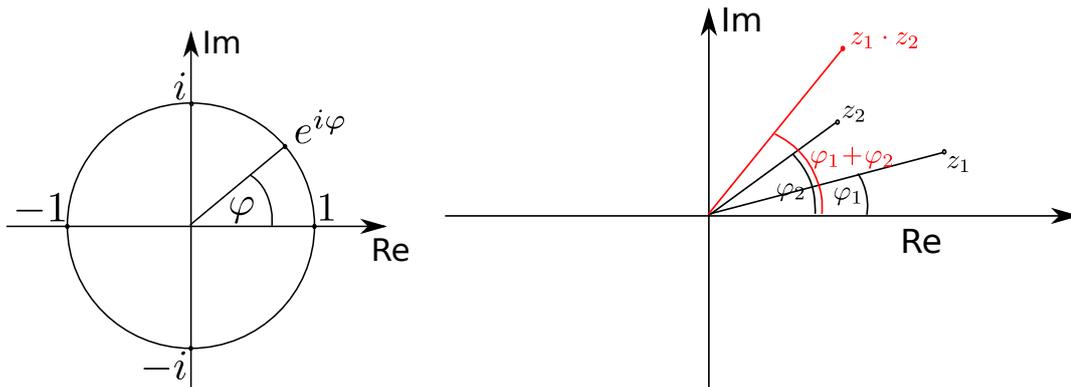


Abbildung 5.2: Links: Lage der Zahlen $e^{i\varphi}$, 1 , i , -1 , $-i$ auf dem komplexen Einheitskreis. Rechts: Multiplikation zweier Zahlen $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ in der komplexen Ebene.

Die Euler-Formel erlaubt es auch, die Polardarstellung (5.3.1) als

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi} \quad (5.3.6)$$

zu schreiben.

Die Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ist extrem wichtig in der Physik. Sie erlaubt es, durch sin- und cos-Funktionen beschriebene harmonische Schwingungen (wo $\varphi = \omega t$) als Real- oder Imaginärteil einer durch eine Exponentialfunktion beschriebenen Kreisbewegung auf dem komplexen Einheitskreis aufzufassen. Davon werden wir in den Physik-Vorlesungen bei der Beschreibung von Schwingungsvorgängen oft Gebrauch machen. Obwohl dies auf den ersten Blick vielleicht nicht einleuchtet, erleichtert diese Darstellung viele Rechnungen erheblich, wenn man erstmal etwas Übung im Umgang mit komplexen Zahlen hat.

5.3.3 Multiplikation, Wurzeln

Wir veranschaulichen uns jetzt noch die **Multiplikation** zweier komplexer Zahlen $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ in der Polardarstellung. Da die Rechenregeln für die Exponentialfunktion auch im Komplexen erhalten bleiben, gilt

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (5.3.7)$$

Daher entspricht die Operation “ $\cdot z_2$ ” in der komplexen Zahlenebene anschaulich (a) einer Drehung um φ_2 plus (b) einer Streckung um den Faktor r_2 , siehe Abb. 5.2

Im reellen Zahlraum hat die Gleichung

$$z^n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

höchstens die zwei Lösungen $z = 1$ und $z = -1$. Dies ändert sich im Komplexen. Dort hat diese Gleichung *immer* n verschieden Lösungen mit $|z| = 1$:

$$w_{k,n} = e^{i \frac{2\pi}{n} k} \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.3.8)$$

Dies folgt sofort durch direkte Probe:

$$w_{k,n}^n = e^{n \left(i \frac{2\pi}{n} k \right)} = e^{2\pi i k} = 1$$

Man nennt die $w_{k,n}$ auch die n **Einheitswurzeln**.

Für $n = 4$ bekommen wir beispielsweise die vier Einheitswurzeln $w_{0,4} = 1$, $w_{1,4} = e^{i\pi/2} = i$, $w_{2,4} = e^{i\pi} = -1$ und $w_{3,4} = e^{i(3\pi/2)} = -i$, die auch in Abb. 5.2 dargestellt sind.

Entsprechend ist auch die **n-te Wurzel** $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ einer komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$ nicht eindeutig bestimmt und wir haben n n-te Wurzeln

$$\boxed{z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\varphi/n} w_{k,n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)} \quad (5.3.9)$$

5.4 Übungen Kapitel 5

1. Rechnen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie jeweils $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$ und z/w für

- (i) $z = 8 + 6i$, $w = 3 - 2i$
- (ii) $z = 5 - 2i$, $w = 1 - 5i$
- (iii) $z = \overline{1 + i}$, $w = \overline{1 - i}$
- (iv) $z = e^{i\pi/2}$, $w = e^{i\pi}$

Berechnen Sie i^i .

2. Komplexe Gleichungen

Berechnen Sie die *alle* komplexen Lösungen z folgender Gleichungen:

- (i) $z^2 - 2z + 4 = 0$
- (ii) $z^4 = 1$
- (iii) $z^2 = 2i$

Geben Sie alle Lösungen auch in der Form $z = x + iy$ an.

3. Additionstheoreme

Zeigen Sie zuerst

$$\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$$

indem Sie die komplexe e-Funktion verwenden.

Beweisen Sie damit das Additionstheorem

$$\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

Tipp: $\cos(\alpha) = \operatorname{Re}(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ benutzen.

4. Konjugation und Betrag

Zeige Sie für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ |z + w|^2 + |z - w|^2 &= 2(|z|^2 + |w|^2) \end{aligned}$$