

**Zur Existenz der
Vortex-Glas-Phase
in Schichtsystemen**

Diplomarbeit
von
Jan Kierfeld

Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Juni 1993

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Elastische Konstanten des Flußliniengitters in einer Schicht	7
1.1 Das Flußliniengitter und sein Magnetfeld	7
1.2 Elastische Energie des Flußliniengitters	13
1.3 Elastische Matrix und elastische Konstanten des Flußliniengitters	18
1.4 Zusammenfassung	27
2 Grundzustandskonfiguration	29
2.1 Struktur der zu untersuchenden Zustände und ihre Energie	29
2.2 Stabilitätsuntersuchung	36
2.2.1 Übergangsabstand l^*	39
2.2.2 Schermodul-Abschätzung	40
3 Vortex-Glas-Phase im Schichtsystem	42
3.1 Elastisches Modell mit Unordnung (nahe H_{c1}) und Abbildung auf XY-Modell	43
3.2 Renormierungsgruppenfluß	48
3.3 uu-Korrelationen	52
3.3.1 Effektiver Hamiltonian auf Skalen $> 1/q$	52
3.3.2 Störungstheorie in \tilde{y}_Δ^*	56
3.4 Ordnungsparameter für die Glas-Phase	62
3.5 Elastisches Modell mit Unordnung für $H_{c1} \ll H_a \ll H_{c2}$	64
3.6 Zusammenfassung	66

4	Vortex-Glas-Phase in einem dreidimensionalen System aus gekoppelten Schichten	69
4.1	Replikahamiltonian für System aus gekoppelten Schichten	70
4.2	Untersuchung mithilfe der Ergebnisse aus Kapitel 3.3	74
4.3	RG-Rechnung nach MFA und Abbildung auf Coulombgas	76
4.3.1	MFA	76
4.3.2	Abbildung auf ein Coulombgas	77
4.3.3	RG-Gleichungen	81
4.3.4	Diskussion des RG-Flusses	85
4.4	Zusammenfassung	87
5	Vortex-Glas-Phase in zwei gekoppelten Schichten	89
5.1	Replikahamiltonian für zwei gekoppelte Schichten und Abbildung auf ein Coulombgas	90
5.2	RG-Gleichungen für zwei Schichten	95
5.3	Diskussion des RG-Flusses	101
5.4	Untersuchung des Bereiches starker Kopplung	106
5.5	Untersuchung des 2-Schicht-Systems mit FRG	108
5.6	Zusammenfassung	111
	Zusammenfassung und Ausblick	113
	Literaturverzeichnis	115
A	zu Kapitel 1	117
A.1	Fouriertransformation von ϕ^{ij} , 1.12	117
A.2	Herleitung von 1.16	118
A.3	Berechnung der Integrale I_s^r aus 1.20	119
A.4	Herleitung von 1.24	120
B	zu Kapitel 2	122
B.1	Anhang zur Berechnung von T_1	122
B.2	Anhang zur Berechnung von T_2	123
C	zu Kapitel 3	125
C.1	Sammlung oft benutzter Formeln	125

C.2	Berechnung der Selbstenergien aus Kapitel 3.3.2	127
D	zu Kapitel 4	130
D.1	Herleitung der RG-Gleichungen 4.12–4.15	130
D.2	Herleitung der RG-Gleichungen 4.16,4.17	135
Danksagung		137
Erklärung		138

Einleitung

Typ-II Supraleiter zeigen keinen abrupten Übergang von der Meißner-Phase, in der kein Magnetfeld in den Supraleiter eindringt, zur normalleitenden Phase. Vielmehr zeigte A.A. Abrikosov [16], daß sich dieser Übergang für Typ-II Supraleiter allmählich vollzieht über ein Intervall von magnetischen Feldern $H_{c1} < H < H_{c2}$, in denen eine sogenannte Mischphase vorliegt (siehe Phasendiagramm in Abbildung 1). Dort dringt magnetischer Fluß in Quanten $\phi_0 = \frac{ch}{2e}$ in Form von Flußlinien in den Supraleiter ein, ohne den supraleitenden Zustand völlig zu zerstören (siehe Abbildung 1), wobei die Flußlinien in einem Bulk-Supraleiter ein hexagonales Gitter bilden.

Abbildung 1: Phasendiagramm für Typ-II Supraleiter und schematische Darstellung der drei Phasen

Eine bemerkenswerte Eigenschaft dieses Flußliniengitters besteht darin, daß in der Mischphase ein Strom nicht mehr widerstandslos fließt. Ein Strom senkrecht zu den Flußlinien verursacht aufgrund der Lorentzkraft eine Bewegung der Flußlinien; die Flußlinien (die ja jeweils ein magnetisches Flußquant tragen) stellen nun ein (etwa mit Geschwindigkeit \vec{v}) bewegtes magnetisches Feld dar, was zufolge $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$ ein elektrisches Feld hervorruft. Dieses elektrische Feld bewirkt einen Spannungsabfall längs des Stromes, so daß ein Widerstand auftritt (siehe Abbildung 2).

Das Auftreten dieses Widerstands kann jedoch (bis zu einer kritischen Strom-

Abbildung 2: Zustandekommen eines Widerstands durch Bewegung der Flußlinien

dichte) verhindert werden, wenn die Flußlinien “gepinnt” werden, indem in den Supraleiter gezielt Verunreinigungen eingebracht werden. Solche Verunreinigungen kann man sich meist als punktförmige Defekte im supraleitenden Zustand vorstellen; für die Flußlinie ist es energetisch günstiger, durch diesen Defekt zu laufen, so daß die Flußlinie anschaulich gesprochen “gepinnt” wird. Solange die dadurch auftretende Pinningkraft größer ist als die Lorentzkraft, die auf die Flußlinien wirkt, ruft ein Strom keine Bewegung der Flußlinien hervor und damit tritt auch kein Widerstand auf. Solche Mechanismen sind auch in der technischen Anwendung der Supraleiter von Bedeutung, weshalb der Einfluß von Unordnung auf die statistische Physik des Flußliniengitters von großem Interesse ist.

Die Untersuchung der Eigenschaften des Flußliniengitters bekam mit der Entdeckung der Hoch- T_c Supraleiter [1] noch größere Bedeutung, da bei diesen Materialien aufgrund der hohen Sprungtemperatur und sehr kleiner Kohärenzlängen neben der Unordnung auch thermische Fluktuationen einen starken Einfluß auf das Flußliniengitter bekommen.

So tritt neben dem oben geschilderten Möglichkeit der Flußlinienbewegung aufgrund der Lorentzkraft auch eine thermisch aktivierte Bewegung der Flußlinien auf, ein sogenanntes “Flußkriechen” (Flux Creep), das die Spannungs-Strom-Charakteristik stark beeinflussen kann.

Ein anderes wichtiges Phänomen, das infolge der großen thermischen Fluktuationen

nen auftritt, ist ein Schmelzen des Flußliniengitters unterhalb der oberen kritischen Feldstärke; dies führt zu Phasendiagrammen, in denen neben einer Gitterphase auch eine sogenannte Flußlinienflüssigkeit (Flux Liquid) auftritt.

Es ist allerdings noch nicht vollständig aufgeklärt, wie Phasendiagramme, die das Verhalten der Hoch- T_c Supraleiter beschreiben können, im Detail aussehen (Abbildung 3 aus [4] zeigt von Nelson und Le Doussal angegebene Phasendiagramme); besonders im Fall, wo Unordnung in das System eingebracht wird, bestehen noch große Unklarheiten. Dieser Fall ist aber, wie oben erläutert, vor allem für die Dynamik des Flußliniengitters und damit für sein Widerstandsverhalten von großer Bedeutung.

Für einen solchen ungeordneten Hoch- T_c Supraleiter ist insbesondere noch un-

Abbildung 3: Phasendiagramme für HTC-Supraleiter für (a) eine reine Probe, (b) Probe mit Unordnung

geklärt, ob das Flußliniengitter unterhalb der Schmelztemperatur in eine *Vortex-Glas-Phase* übergeht im Gegensatz zum reinen Supraleiter, der in die Gitterphase übergeht. Dabei ist auch nicht ganz klar, wie eine solche Vortex-Glas-Phase gegenüber den anderen Phasen zu charakterisieren ist (der Begriff selber ist aus der Theorie der Spin-Gläser entlehnt und beschreibt dort einen frustrierten Zustand des Systems). Das Auftreten einer solchen neuen Phase in ungeordneten Supraleitern wurde erstmals von M.P.A. Fisher [2] 1989 vorgeschlagen.

Ziel dieser Arbeit soll es sein, das Auftreten einer solchen Vortex-Glas-Phase zu untersuchen. Und zwar soll dies an einem möglichst einfachen System geschehen; es wird ein zweidimensionales Flußliniengitter in einer Typ-II supraleitenden Schicht mit parallelem Magnetfeld betrachtet (siehe auch Abbildung 1.1). In ei-

nem solchen System haben die Flußlinienelemente senkrecht zum Magnetfeld nur einen Freiheitsgrad (wenn man eine hinreichend dünne Schicht wählt). Damit erhält man ein System, das durch ein eindimensionales Auslenkungsfeld, welches auf lediglich zwei Raumdimensionen definiert ist, beschrieben werden kann.

Es gibt eine ganze Reihe von Zugängen zur statistischen Physik von Flußliniengittern in Zufallspotentialen, die die Unordnung beschreiben. Ein solches System kann beispielsweise durch Abbildung auf die Weltlinien von wechselwirkenden Bosonen (oder auch freien Fermionen) in einer um 1 kleineren Raumdimension in zeitlich und räumlich ungeordneten Potentialen untersucht werden [3],[9]. Andere Möglichkeiten sind die Untersuchung durch einen Variationsansatz für die Freie Energie, der Replikasymmetriebrechung in Betracht zieht [8],[10] oder mittels funktionaler Renormierung [10] oder die direkte Untersuchung eines elastischen Modells [5],[24],[12], was auch in dieser Arbeit die Vorgehensweise sein wird.

Um die statistische Physik eines Flußliniengitters zu untersuchen, muß das Flußliniengitter durch einen Hamiltonian beschrieben werden, der die Energieänderung bei kleinen Auslenkungen der Flußlinien gegenüber dem Grundzustand gerader Flußlinien angibt. In der niedrigsten Ordnung in den Auslenkungen führt das zunächst zu einem *elastischen Modell* des Flußliniengitters, das bei nahezu allen theoretischen Zugängen zu dem Problem (bis auf das Bosonenmodell) angewendet wird.

Im hier untersuchten zweidimensionalen System mit uniaxialen Auslenkungen kann ein solches elastisches Modell sogar direkt auf ein zweidimensionales XY-Modell abgebildet werden (ohne Vortizes), wobei die Auslenkung die Rolle des Spinwinkels übernimmt; wird das Flußliniengitter im Zufallspotential untersucht, ist eine entsprechende Abbildung auf ein XY-Modell im Zufallsfeld möglich [5]. Das XY-Modell im Zufallsfeld wurde jedoch bereits in einer Renormierungsgruppenrechnung von Cardy und Ostlund untersucht [20]. Das eröffnet für das hier betrachtete niedrigdimensionale Flußliniengitter mit Unordnung die Möglichkeit, bei einer Beschreibung als elastisches Modell, die Existenz einer Vortex-Glas-Phase über diese Renormierungsgruppenrechnung zu zeigen.

Daher ist es nötig, für die Typ-II supraleitende Schicht *elastische Konstanten* auszurechnen; dies soll im **ersten Kapitel** im London-Limes sehr kleiner Kohärenzlängen geschehen. Für die hier vorliegende Schichtgeometrie sind solche Berechnungen der elastischen Konstanten bisher noch nicht durchgeführt worden, es existieren lediglich Arbeiten von Brandt [14],[15], in denen andere Geometrien betrachtet wurden. Bei der Berechnung der elastischen Konstanten treten prinzipiell zwei Grenzfälle auf, zum einen derjenige sehr großer Flußlinienabstände ($l \gg \lambda$ mit l als Flußlinienabstand) und zum anderen derjenige sehr kleiner Flußlinienabstände ($l \ll \lambda$); außerdem können die elastischen Konstanten Dispersion aufweisen. Diese auch im Hinblick auf die statistische Physik des Flußliniengitters wichtigen Aspekte können in der Rechnung berücksichtigt werden.

Im **zweiten Kapitel** wird noch einmal genauer untersucht, unter welchen Bedingungen tatsächlich nur uniaxiale Auslenkungen in der Schicht auftreten. Zu diesem Themenbereich gibt es bereits Arbeiten [18],[19], in denen jedoch keine einfachen Kriterien angegeben werden, was hier geleistet werden soll.

Das **dritte Kapitel** wendet sich dann schließlich dem zentralen Thema der Arbeit zu, der Untersuchung der Vortex-Glas-Phase in dem zweidimensionalen Flußliniengitter mit Unordnung. Für den Fall großer Flußlinienabstände ($l \gg \lambda$) haben bereits Nattermann *et al.* mittels der oben erwähnten Abbildung auf ein XY-Modell im Zufallsfeld gezeigt [5], daß bei Anwesenheit von Unordnung eine Vortex-Glas-Phase vorliegt. Mit den im ersten Kapitel berechneten elastischen Konstanten soll hier auch der Fall größerer Flußliniendichten ($l \ll \lambda$) betrachtet werden; auch in diesem Fall kann unterhalb einer Temperatur T_G ein Übergang in eine Vortex-Glas-Phase gezeigt werden. Ebenfalls basierend auf den Resultaten aus dem ersten Kapitel wird der Einfluß der Dispersion der elastischen Konstanten auf die statistische Physik untersucht.

In [2] und [7] wurde vermutet, daß sich eine Vortex-Glas-Phase über ihre nicht-replikadiagonalen Phasenkorrelationen der Phase des Ginzburg-Landau-Ordnungsparameters charakterisieren läßt. Hier wird ein Ordnungsparameter für den Übergang von einer Phase ohne relevante Unordnung zur Vortex-Glas-Phase vorgeschlagen, der diese Phasenkorrelationen ausnutzt.

Für das zweidimensionale Flußliniengitter ist es also möglich, auf dem oben kurz geschilderten Weg mit einer Renormierungsgruppenrechnung die Existenz einer Vortex-Glas-Phase nachzuweisen. Im **vierten Kapitel** soll versucht werden, auch für ein dreidimensionales System die Vortex-Glas-Phase nachzuweisen; und zwar wird dazu ein System aus gestapelten Schichten untersucht, wobei die Kopplung von Flußlinien in verschiedenen Schichten ausschließlich eine magnetische sein soll im Limes großer Flußlinienabstände ($l \gg \lambda$). Ein solches System erhält man beispielsweise, wenn die Typ-II supraleitenden Schichten durch Typ-I supraleitende Schichten genügender Dicke getrennt werden (siehe Abbildung 4); auch in Bezug auf Hoch- T_c Supraleiter ist eine solche geschichtete Struktur von Interesse.

Für dieses geschichtete System mit Unordnung kann im vierten Kapitel mit Renormierungsgruppenrechnungen gezeigt werden, daß bei einer schwachen Kopplung zwischen den Schichten tatsächlich eine Vortex-Glas-Phase vorliegt; und zwar derart, daß das System in quasi-ungekoppelte Schichten zerfällt, die sich jeweils in einer Vortex-Glas-Phase befinden. An diesem Verhalten eines dreidimensionalen Flußliniengitters ist sowohl der Aspekt des Zerfalls in quasi-ungekoppelte zweidimensionale Systeme als auch das Vorliegen eines glasartigen Zustands bemerkenswert und neuartig.

Die Resultate des vierten Kapitels werden im wesentlichen durch Methoden gewonnen, die auf sehr schwache magnetische Kopplungen zwischen den Schichten beschränkt sind aufgrund verwendeter Approximationen. Daher wird im **fünften**

Abbildung 4: System aus gestapelten Schichten

Kapitel ein nur aus zwei Schichten bestehendes System betrachtet, für das aber eine möglichst exakte Rechnung angestrebt wird, um auch im Bereich größerer Kopplungen zwischen den beiden Schichten Aussagen über dort auftretende Phasen treffen zu können und die Resultate aus dem vierten Kapitel zu bestätigen, was auch gelingt.

Kapitel 1

Elastische Konstanten des Flußliniengitters in einer Schicht

Das Flußliniengitter in einer Schicht aus Typ-II supraleitendem Material mit parallelem Magnetfeld kann als elastisches System beschrieben werden. Dazu müssen geeignete elastische Konstanten definiert und berechnet werden. Dies soll in diesem Kapitel im Rahmen der Ginzburg-Landau-Theorie im London-Limes geschehen, d.h. bei $\lambda \gg \xi$, wobei ξ die Kohärenzlänge und λ die Londonsche (Bulk-)Eindringtiefe ist; außerdem sollen die Abstände der Flußlinienkerne groß sein relativ zu ihrem Radius ξ .

Es ist möglich, die elastischen Konstanten dieses Systems sowohl für den Fall kleiner Flußliniendichten ($l \gg \lambda$) als auch für den Fall großer Flußliniendichten ($l \ll \lambda$) zu berechnen; auch die Dispersion der elastischen Konstanten kann ermittelt werden.

1.1 Das Flußliniengitter und sein Magnetfeld

In diesem Kapitel wird für beliebig geformte Flußlinien das Magnetfeld innerhalb und außerhalb der Schicht im London-Limes berechnet¹. Dies ist notwendig, um im Anschluß daran die Freie Energie des Flußliniengitters aus dem Magnetfeld zu bestimmen, aus deren elastischem Anteil bei kleinen Auslenkungen der Flußlinien die elastischen Konstanten gewonnen werden können.

Zunächst einmal muß jedoch eine geeignete Parametrisierung des Problems vorgenommen werden:

Die Schicht soll in der xz -Ebene liegen, wobei das äußere Magnetfeld $\vec{H}_a \parallel \vec{e}_z$ in z -Richtung verläuft. Die *Schichtdicke* sei d und die Schicht soll dann durch $|y| \leq d/2$ beschrieben werden.

¹Die Rechnungen dieses Abschnitts lehnen sich an eine Arbeit von Brandt [15] an.

Abbildung 1.1: zweidimensionales FL-Gitter in einer Schicht mit parallelem Magnetfeld

Die Flußlinien sollen mit ν indiziert und durch die parallel zum Magnetfeld laufende z -Koordinate parametrisiert werden, d.h.

$$\vec{R}_\nu = \vec{R}_\nu(z) = (X_\nu(z), Y_\nu(z), z)$$

für beliebig geformte Flußlinien. Die Grundzustandskonfiguration wird mit

$$\vec{R}_\nu^0(z) = (X_\nu^0, Y_\nu^0, z)$$

bezeichnet. Es wird davon ausgegangen, daß im Grundzustand aufgrund der repulsiven, zentralen Wechselwirkung zwischen den Flußlinien (siehe effektive Wechselwirkung auf Seite 19) *gerade, äquidistante* ($X_\nu^0 = ml$, $m \in \mathbb{Z}$) Flußlinien vorliegen mit *Flußlinienabstand* l .

Außerdem wird $Y_\nu^0 = 0$ *fest* gewählt. Wie sich jedoch im Kapitel 2, in dem die Grundzustandskonfiguration des Gitters untersucht wird, herausstellen wird, repräsentiert diese Konfiguration nur dann einen stabilen Zustand, wenn (in relativ grober Näherung) eine Relation $l > d$ erfüllt ist (siehe Gleichung 2.14).

Die Flußlinien bilden dann im Grundzustand in jeder Höhe z ein auf der x -Achse angeordnetes 1-dimensionales Gitter mit Gitterkonstante l .

Im London-Limes $\kappa = \lambda/\xi \gg 1$ müssen dann für zunächst einmal beliebig geformte FL's folgende Gleichungen gelöst werden zur Berechnung des *Magnetfeldes* $\vec{H}(\vec{r})$, das hier das mikroskopische, lediglich über atomare Skalen gemittelte Magnetfeld darstellen soll. (Im folgenden sind alle Formeln in *Gauß'schen Einheiten* angegeben.) :

- die *London-Gleichung* (L), die nach Brandt bzw. Abrikosov (s. [14] oder [16]) im London-Limes aus der zweiten Ginzburg-Landau-Gleichung erhalten werden kann für $\langle |\psi|^2 \rangle \simeq 1$, wobei ψ der (normierte) Ordnungsparameter der GL-Theorie ist. $\langle |\psi|^2 \rangle \simeq 1$ ist immer bei $l \gg \xi$ und $d \gg \xi$ erfüllt, wenn der Radius ξ der Flußlinienkerne also klein ist im Vergleich zu ihrem

Abstand l (Bei Brandt [14] wird $\kappa > 3$ und $b = B/H_{c2} \leq 0.2$ als Gültigkeitsbereich für (L) im Bulk-Supraleiter angegeben.), und die Flußlinienkerne weit von der Schichtoberfläche entfernt sind im Vergleich zu ihrem Radius. In der London-Gleichung treten die Flußlinien als Singularitäten in Form von δ -förmigen Inhomogenitäten der Stärke ϕ_0 auf, die die Phasenänderung des Ordnungsparameters ψ um 2π beschreiben bei Umlaufung einer Flußlinie.

- die *Maxwell-Gleichungen* (M) für $div \vec{H}$ innerhalb und außerhalb der Schicht und für $rot \vec{H}$ außerhalb der Schicht (innerhalb der Schicht gilt (L).)
- die *Randbedingungen* (R) aus der Elektrodynamik und den GL-Gleichungen für \vec{H} . Da auf atomaren Skalen hier keine Oberflächenströme fließen (die Supraleitungs-Abschirmströme fließen in Bereichen, die typischerweise die Größenordnung $\lambda, d \gg \xi$ haben), ist aufgrund der Maxwellgleichungen die Stetigkeit von \vec{H} zu fordern. Aus den GL-Gleichungen ergibt sich die Randbedingung, daß die Normalkomponente der Rotation von \vec{H} (bzw. die Normalkomponente des Stromes) an der Schichtoberfläche verschwindet. Außerdem muß im Unendlichen $\vec{H} = \vec{H}_a$ gelten.

Explizit lauten alle Gleichungen² :

$ y < \frac{d}{2} : -\lambda^2 \nabla^2 \vec{H} + \vec{H} = \phi_0 \sum_{\nu} \int d\vec{R}_{\nu} \delta(\vec{r} - \vec{R}_{\nu})$	(L)
$div \vec{H} = 0$	(M)
$ y = \frac{d}{2} : \vec{H} \text{ stetig} \quad , \quad \vec{e}_y \cdot rot \vec{H} = 0$	(R)
$ y > \frac{d}{2} : div \vec{H} = 0 \quad , \quad rot \vec{H} = 0$	(M)
$\vec{H}(x = \pm\infty) = \begin{cases} \vec{H}_a \\ 0 \end{cases}$	(R)

(1.1)

Nun zur Lösung dieser Gleichungen:

Da es sich hier um *lineare* Differentialgleichungen handelt, kann die Lösung zerlegt werden in $\vec{H} = \vec{H}_L + \vec{H}_F$. Dabei ist \vec{H}_L der auch ohne FL's vorhandene, das Eindringen des homogenen äußeren Magnetfeldes \vec{H}_a beschreibende Teil der Lösung mit

$$\begin{aligned}
 |y| \geq \frac{d}{2} : \quad \vec{H}_L &= \vec{H}_a \\
 |y| \leq \frac{d}{2} : \quad \vec{H}_L &= \vec{H}_a \frac{\cosh y/\lambda}{\cosh d/2\lambda} \quad .
 \end{aligned}$$

² $\int d\vec{R} = \int dz \frac{d}{dz} \vec{R}$

Trennt man diesen Teil der Lösung ab, erhält man für \vec{H}_F eine 0 in der letzten Gleichung in 1.1 , wie dies auch dort angedeutet ist.

Im Bereich $|y| > d/2$ ist eine Lösung für \vec{H}_F in 1.1 offensichtlich

$$\vec{H}_F = 0 \quad .$$

Im Bereich $|y| < d/2$ erhält man die Lösung \vec{H}_F für 1.1 auf folgende Weise: Die London-Gleichung (L) kann für eine einzelne FL ν durch *Fouriertransformation* gelöst werden mit dem Resultat

$$\vec{H}_F(\vec{q}) = \frac{\phi_0}{1 + q^2 \lambda^2} \int d\vec{R}_\nu e^{-i\vec{q}\vec{R}_\nu} \quad ,$$

bzw. nach Rücktransformation

$$\vec{H}_F(\vec{r}) = \int \frac{d^3q}{8\pi^3} \vec{H}_F(\vec{q}) e^{i\vec{q}\vec{r}} = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda^2} \int d\vec{R}_\nu \frac{e^{-|\vec{r}-\vec{R}_\nu|/\lambda}}{|\vec{r}-\vec{R}_\nu|} \quad .$$

Diese Lösung erfüllt auch bereits (M), d.h. $\text{div} \vec{H}_F = 0$, für beliebiges y . Da (L) und (M) linear sind, entsteht die Lösung für beliebig viele FL's durch *Superposition* der Anteile jeder einzelnen FL :

$$\vec{H}_F(\vec{q}) = \frac{\phi_0}{1 + q^2 \lambda^2} \sum_\nu \int d\vec{R}_\nu e^{-i\vec{q}\vec{R}_\nu} \quad ,$$

bzw. nach Rücktransformation

$$\vec{H}_F(\vec{r}) = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda^2} \sum_\nu \int d\vec{R}_\nu \frac{e^{-|\vec{r}-\vec{R}_\nu|/\lambda}}{|\vec{r}-\vec{R}_\nu|} \quad .$$

Jetzt müssen in 1.1 noch die Randbedingungen (R) bei $|y| = d/2$ erfüllt werden. Da die Lösung außerhalb der Schicht $\vec{H}_F = 0$ lautet, heißt (R) also mit anderen Worten, daß \vec{H}_F stetig verschwinden muß auf der Schichtoberfläche, ebenso wie die Tangentialkomponente der Rotation von \vec{H}_F . Ein solcher Typ von Randwertproblem ist aus der Elektrostatik bekannt (z.B. das Problem einer Ladung zwischen zwei Metallplatten) . Völlig analog zur dortigen Lösung kann man auch das Randwertproblem für die Flußlinien durch Einführung von *Spiegel-Flußlinien* alternierenden Fluß-Vorzeichens lösen.

So wird für jede Flußlinie und jede der beiden Schichtgrenzflächen eine symmetrisch bezüglich der Schichtgrenzfläche gelegene Spiegel-FL mit entgegengesetztem Fluß-Vorzeichen eingeführt (siehe Abbildung 1.2). Dies wird offensichtlich zur Erfüllung der Randbedingungen (R) auf der Oberfläche führen. Da man zwei Grenzflächen hat, generiert allerdings jede neue Bild-FL durch Spiegelung an der jeweils anderen Grenzfläche ihrerseits wieder eine Bild-FL mit entgegengesetztem

Abbildung 1.2: FL-Gitter mit Bild-FL's

Vorzeichen. Dadurch gelangt man schließlich zu unendlich vielen alternierenden Bild-FL's für jede reale FL, wie dies auch in der Abbildung gezeigt wird.

An dieser Stelle muß man jedoch anmerken, daß die Einführung von Spiegel-FL's, wie sie oben geschildert wurde, das Randwertproblem nicht in jedem Falle vollständig löst, sondern nur, wenn die Auslenkungen

$$\vec{u}_\nu(z) = \vec{R}_\nu(z) - \vec{R}_\nu^0(z) = (u_\nu^1(z), u_\nu^2(z), 0)$$

keine y -Komponente besitzen, d.h. wenn $u_\nu^2 = 0$. Ist das nämlich nicht der Fall, besitzt das Magnetfeld \vec{H}_F auch eine y -Komponente normal zur Schichtoberfläche. Wird eine gespiegelte FL mit entgegengesetztem Fluß eingeführt, überlegt man sich leicht, daß die Normalkomponenten des von den beiden FL's erzeugten Magnetfeldes sich nicht wegheben auf der Schichtoberfläche (wie das die anderen Komponenten von \vec{H}_F bzw. die Normalkomponente von $\text{rot } \vec{H}_F$ tun) sondern gleichgerichtet sind.

Wir wollen hier jedoch in einem quasi-2-dimensionalen System, nämlich einer dünnen Schicht arbeiten. Dann kann man zeigen, wie das im Kapitel 2.2.2 getan wird, daß im Falle genügend dünner Systeme mit

$$l \gg d \quad , \quad \lambda > d \tag{1.2}$$

Auslenkungen in y -Richtung energetisch so ungünstig sind, daß sie vernachlässigt werden können. Daher werde wir im folgenden ausgehen von

$$u_\nu^2 \equiv 0 \quad , \text{ bzw. } Y_\nu \equiv Y_\nu^0 \quad ,$$

d.h. einem echtem 2-dimensionalem System unter Beachtung der oben angegebenen Ungleichungen für l , d und λ . Die FL's können dann nur noch in x -Richtung ausgelenkt werden, so daß die FL's ein 1-dimensionales Gitter mit *uniaxialen longitudinalen FL-Auslenkungen* bilden.

Sind die realen FL's im Grundzustand, erhält man also zwei gegeneinander um $d\vec{e}_y$ verschobene rechteckige Untergitter von FL's jeweils gleichen Vorzeichens

mit erzeugenden Gittervektoren $l\vec{e}_x$ und $2d\vec{e}_y$.

Es wird im Laufe der weiteren Rechnung an einigen Stellen zweckmäßig sein, in einem der Untergitter aus bzgl. des Vorzeichens äquivalenten FL's zu rechnen. Daher soll zur besseren Unterscheidung im Weiteren das volle Gitter aus positiven und negativen FL's mit Tilde-“ \sim ”-Indizes versehen werden, also

$$\begin{aligned} \vec{R}_\nu^0(z) &= \vec{R}_{\tilde{m}\tilde{n}}^0(z) = (\tilde{m}l, \tilde{n}d, z) & \tilde{m}, \tilde{n} \in \mathbb{Z} \\ \text{bzw. } \vec{R}_\nu(z) &= \vec{R}_{\tilde{m}\tilde{n}}(z) = (X_{\tilde{m}}(z), \tilde{n}d, z) & . \end{aligned}$$

Das nur von positiven FL's besetzte Untergitter wird mit Indizes ohne Tilde versehen:

$$\begin{aligned} \vec{R}_\nu^0(z) &= \vec{R}_{mn}^0(z) = (ml, n2d, z) & m, n \in \mathbb{Z} \\ \text{bzw. } \vec{R}_\nu(z) &= \vec{R}_{mn}(z) = (X_m(z), n2d, z) & . \end{aligned}$$

Da die Spiegel-FL's sich “mitbewegen”, wenn die realen FL's ausgelenkt werden, gilt auch im vollen Gitter mit realen und Spiegel-FL's $u_\nu^2 \equiv 0$. Außerdem sind aus diesem Grunde $X_m(z)$ und $X_{\tilde{m}}(z)$ unabhängig von n bzw. \tilde{n} .

Das Auslenkungsfeld \vec{u} besitzt also alles in allem in unserem Fall die Form

$$\boxed{\vec{u}_\nu(z) = \vec{u}_{\tilde{m}}(z) = (u_{\tilde{m}}^1(z), 0, 0)} \quad .$$

Die Lösung \vec{H}_F von 1.1 innerhalb der Schicht, die den Randbedingungen (R) bei $|y| = d/2$ für $\vec{H}_F = 0$ außerhalb der Schicht genügt, wird man nach oben Gesagtem als Lösung einer um die Anteile der Spiegel-FL's erweiterten London-Gleichung (L)

$$-\lambda^2 \nabla^2 \vec{H}_F + \vec{H}_F = \phi_0 \sum_{\tilde{\nu}} \int d\vec{R}_{\tilde{\nu}} \text{sgn}(FL\tilde{\nu}) \delta(\vec{r} - \vec{R}_{\tilde{\nu}}) \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

erhalten. ((L) bleibt weiterhin erfüllt, da in $|y| < d/2$ nur die δ -Funktionen realer FL's einen Beitrag liefern; auch (M) bleibt in $|y| < d/2$ erfüllt, da auch die Spiegel-FL's dies erfüllen.) Diese Gleichung kann man genauso wie oben durch Fouriertransformation und Superposition lösen mit dem Ergebnis:

$$\vec{H}_F(\vec{k}) = \frac{\phi_0}{1 + k^2\lambda^2} \sum_{\tilde{\nu}} \int d\vec{R}_{\tilde{\nu}} \text{sgn}(FL\tilde{\nu}) e^{-i\vec{k}\vec{R}_{\tilde{\nu}}}$$

bzw. nach Rücktransformation

$$\vec{H}_F(\vec{r}) = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda^2} \sum_{\tilde{\nu}} \int d\vec{R}_{\tilde{\nu}} \text{sgn}(FL\tilde{\nu}) \frac{e^{-|\vec{r}-\vec{R}_{\tilde{\nu}}|/\lambda}}{|\vec{r}-\vec{R}_{\tilde{\nu}}|}$$

Diese Lösung für \vec{H}_F innerhalb der Schicht erfüllt nun tatsächlich die Randbedingungen auf der Grenzfläche, wie man auch leicht explizit nachrechnen könnte.

Insgesamt bekommt man also als Ergebnis für das Magnetfeld \vec{H} , das allen Differentialgleichungen und Randbedingungen in 1.1 genügt:

$$\begin{aligned}
|y| \geq \frac{d}{2} : \quad \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}_a && + && 0 \\
|y| \leq \frac{d}{2} : \quad \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}_a \frac{\cosh y/\lambda}{\cosh d/2\lambda} && + && \\
&&& + \frac{4\pi}{\phi_0} \sum_{\vec{\nu}} \int d\vec{R}_{\vec{\nu}} \operatorname{sgn}(FL\vec{\nu}) V(\vec{r} - \vec{R}_{\vec{\nu}}) && \\
&= \vec{H}_a \frac{\cosh y/\lambda}{\cosh d/2\lambda} && + && \\
&&& + \frac{4\pi}{\phi_0} \sum_{\vec{\nu}} \int d\vec{R}_{\vec{\nu}} \left(V(\vec{r} - \vec{R}_{\vec{\nu}}) - V(\vec{r} - \vec{R}_{\vec{\nu}} - \vec{d}) \right) &&
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Hier stellt der erste Summand jeweils \vec{H}_L und der zweite \vec{H}_F dar, und V (die Bedeutung von V als Wechselwirkungspotential wird im nächsten Kapitel 1.2 klar, hier dient es zunächst nur der besseren Übersicht) ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{\phi_0^2}{(4\pi\lambda)^2} \frac{e^{-r/\lambda}}{r} && \text{bzw.} && \\
V(\vec{q}) &= \int d^3r V(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\vec{r}} = \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{1}{1 + \lambda^2 q^2} && &&
\end{aligned} \tag{1.6}$$

1.2 Elastische Energie des Flußliniengitters

Die Freie Energie des Flußliniengitters kann im London-Limes allein aus dem Magnetfeld bestimmt werden. Dies soll in diesem Kapitel geschehen, insbesondere soll der elastische Anteil der Energie bei kleinen Auslenkungen der FL's berechnet werden mithilfe des Magnetfeldes 1.5.

Im London-Limes $\kappa = \lambda/\xi \gg 1$ und im Bereich großer Abstände l der Flußlinienkerne relativ zu ihrem Radius ξ kann man die *Freie Energie* F des Flußliniengitters berechnen nach der Formel (siehe [14],[15] oder [17]) :

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_{|y| \geq d/2} d^3r (\vec{H} - \vec{H}_a)^2 + \frac{1}{8\pi} \int_{|y| \leq d/2} d^3r [(\vec{H} - \vec{H}_a)^2 + \lambda^2 (\operatorname{rot} \vec{H})^2]$$

Der erste Summand ergibt 0 wegen $\vec{H} = \vec{H}_a$ außerhalb der Schicht (siehe Gleichung 1.5). Der zweite Summand läßt sich nach Zerlegung $\vec{H} = \vec{H}_L + \vec{H}_F$ und unter Ausnutzung der Eigenschaften von \vec{H}_L und \vec{H}_F als Lösungen von 1.1 umformen

zu

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_{|y| \leq d/2} d^3r [(\vec{H}_L - \vec{H}_a)^2 + \lambda^2(\text{rot } \vec{H}_L)^2] - \frac{1}{4\pi} \vec{H}_a \int_{|y| \leq d/2} d^3r \vec{H}_F + \frac{1}{8\pi} \int_{|y| \leq d/2} d^3r [\vec{H}_F^2 + \lambda^2(\text{rot } \vec{H}_F)^2]$$

Der erste Summand ist unabhängig von den FL-Positionen und somit für die elastischen Eigenschaften des FL-Gitters unwichtig und wird daher im Folgenden als Konstante F_0 mitgeführt.

Der zweite Summand hängt nur von den y-Komponenten der FL-Koordinaten ab; denn in

$$- \frac{1}{4\pi} \vec{H}_a \int_{|y| \leq d/2} d^3r \vec{H}_F \stackrel{1.5}{=} - \frac{H_a}{\phi_0} \sum_{\tilde{\nu}} L \int_{|y| \leq d/2} d^3r V(\vec{r} - \vec{R}_{\tilde{\nu}})$$

(wobei $L = \int dz$ die *Länge* der Flußlinien ist) kann in den V-Integralen die Abhängigkeit von den x-Komponenten der FL-Koordinaten wegen der Translationsinvarianz der Schicht in x-Richtung heraussubstituiert werden. Da die y-Komponente der FL-Koordinaten aber erst einmal als $Y_{\nu}^0 \equiv 0$ für reale FL's, bzw. $Y_{mn}^0 \equiv n 2d$ im FL-Untergitter aus realen und Bild-FL's *festgehalten* werden, kann auch dieser Term bei der Berechnung der elastischen Eigenschaften des FL-Gitters in F_0 absorbiert werden. Man erhält dann, wiederum unter Verwendung der Eigenschaften aus 1.1 bzw. 1.3 und durch Einsetzen der Lösung 1.5, Folgendes:

$$\begin{aligned} F &= F_0 + \frac{1}{8\pi} \int_{|y| \leq d/2} d^3r [\vec{H}_F^2 + \lambda^2(\text{rot } \vec{H}_F)^2] \\ &= F_0 + \frac{1}{8\pi} \int_{|y| \leq d/2} d^3r \vec{H}_F (\vec{H}_F - \lambda^2 \nabla^2 \vec{H}_F) \\ &= F_0 + \frac{\phi_0}{8\pi} \int_{|y| \leq d/2} d^3r \vec{H}_F(\vec{r}) \sum_{\tilde{\nu} \text{ Bild} + \text{real}} \int d\vec{R}_{\tilde{\nu}} \text{sgn}(FL\tilde{\nu}) \delta(\vec{r} - \vec{R}_{\tilde{\nu}}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F &= F_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\tilde{\nu} \text{ real} \\ \tilde{\mu} \text{ Bild} + \text{real}}} \iint d\vec{R}_{\tilde{\nu}} d\vec{R}_{\tilde{\mu}} \text{sgn}(FL\tilde{\nu}) \text{sgn}(FL\tilde{\mu}) V(\vec{R}_{\tilde{\nu}} - \vec{R}_{\tilde{\mu}}) \\ &= F_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\nu \text{ real} \\ \mu \text{ Bild} + \text{real}}} \iint d\vec{R}_{\nu} d\vec{R}_{\mu} (V(\vec{R}_{\nu} - \vec{R}_{\mu}) - V(\vec{R}_{\nu} - \vec{R}_{\mu} + \vec{d})) \end{aligned}} \quad (1.7)$$

Dieser Ausdruck läßt die einfache Interpretation zu, daß alle Linienelemente realer FL's untereinander und Linienelemente realer FL's mit Linienelementen von Bild-FL's mit einem Potential V (siehe 1.6) wechselwirken (ähnliches erhielt Brandt

[14],[15] für andere Geometrien).

Obiger Ausdruck enthält aber nicht nur die Wechselwirkungsenergien im FL-Gitter sondern auch die Selbstenergien der realen FL's. Diese erhält man durch Aufsummieren der Wechselwirkung einer realen FL mit den von ihr erzeugten Bild-FL's und eines Termes mit $\tilde{\nu} = \tilde{\mu}$. (Dieser ist hier auf den ersten Blick unendlich, da $V(0) = \infty$. Dem ist aber nicht so, da die Singularitäten in der London-Gleichung (L) aus 1.1 in Form der δ -Funktionen eigentlich eine endliche Breite ξ besitzen, die die Ausdehnung des FL-Kerns charakterisiert. Daher muß V bei ξ abgeschnitten werden bei der Berechnung dieses Terms.)

Mit

$$\begin{aligned} W(\vec{r}) &:= V(\vec{r}) - V(\vec{r} + \vec{d}) \quad , \text{ also} \\ W(\vec{q}) &= V(\vec{q}) (1 - e^{i\vec{q}\vec{d}}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

erhält man schließlich den etwas symmetrischeren Ausdruck

$$\boxed{\begin{aligned} F &= F_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\nu \text{ real} \\ \mu \text{ Bild+real}}} \iint d\vec{R}_\nu d\vec{R}_\mu W(\vec{R}_\nu - \vec{R}_\mu) \\ &= F_0 + \frac{1}{N_i} \frac{1}{2} \sum_{\substack{\nu \text{ Bild+real} \\ \mu \text{ Bild+real}}} \iint d\vec{R}_\nu d\vec{R}_\mu W(\vec{R}_\nu - \vec{R}_\mu) \end{aligned}} \quad , \quad (1.9)$$

wobei für alles Weitere

$$\begin{aligned} N_r &= \text{Anzahl realer FL's} \quad , \quad n_r = 1/l \\ &= \text{Anz. Gitterpkte. in x-Richtung} \\ N_i &= \text{Anz. imaginärer FL's} \quad , \quad n_i = 1/2d \\ &= \text{Anz. Untergitterpkte. in y-Richtung} \\ N &= N_r N_i \quad , \quad n = n_r n_i \end{aligned}$$

definiert wird.

Durch Einführung des auf dem Untergitter der positiven FL's wirksamen Potentials W hat man die Wechselwirkungen wie in Abbildung 1.3 skizziert zusammengefaßt. Dies ermöglicht eine für die weiteren Rechnungen sehr bequeme Formulierung, die in weiten Teilen der Beschreibung eines 2-dimensionalen Rechteckgitters entspricht.

Mit Hilfe des Ausdrucks 1.9 für die freie Energie des FL-Gitters soll nun das *elastische Verhalten des Gitters* untersucht werden, d.h. Energieänderungen infolge kleiner Auslenkungen \vec{u}_ν der (realen) FL's aus ihrem Gleichgewicht im Grundzustand.

$$\vec{u}_\nu(z) = u_\nu^1(z) \vec{e}_x = \vec{R}_\nu(z) - \vec{R}_\nu^0 \quad .$$

Mit $\frac{d}{dz} \vec{R}_\nu(z) = \vec{e}_z + \frac{d}{dz} \vec{u}_\nu(z)$ erhält man dann für die Energieänderung ΔF in 1.9

$$\Delta F = \frac{1}{N_i} \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \iint dz dz' \times$$

Abbildung 1.3: In W zusammengefaßte Wechselwirkungen

$$\times \left\{ \left(\vec{e}_z + \frac{d}{dz} \vec{u}_\nu(z) \right) \left(\vec{e}_z + \frac{d}{dz} \vec{u}_\mu(z') \right) W(\vec{R}_\nu - \vec{R}_\mu + \vec{u}_\nu(z) - \vec{u}_\mu(z')) - W(\vec{R}_\nu - \vec{R}_\mu) \right\} .$$

Dies wird für kleine Auslenkungen \vec{u}_ν entwickelt. Da es sich um Auslenkungen aus dem Gleichgewicht handelt, verschwinden dabei die 1. Ordnungen in den \vec{u}_ν . In 2. Ordnung und nach partieller Integration bzgl. z und z' ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{1}{N_i} \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \int \int dz dz' \sum_{i, j=1}^2 \left\{ -u_\nu^i(z) u_\mu^j(z') \delta^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} W \right) (\vec{R}_\nu - \vec{R}_\mu) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} W \right) (\vec{R}_\nu - \vec{R}_\mu) (u_\mu^i(z) u_\mu^j(z') - u_\mu^i(z) u_\nu^j(z')) \right\} \\ &= \frac{1}{N_i} \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \int \int dz dz' \sum_{i, j=1}^2 \phi^{ij}(\vec{R}_\nu - \vec{R}_\mu) u_\nu^i(z) u_\mu^j(z') \end{aligned}$$

mit

$$\phi^{ij}(\vec{R}_\nu) = \begin{cases} -\delta^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} W \right) (\vec{R}_\nu) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} W \right) (\vec{R}_\nu) & \text{für } \nu \neq 0 \\ -\delta^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} W \right) (\vec{R}_0) + \sum_{\mu \neq 0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} W \right) (\vec{R}_\mu) & \text{für } \nu = 0 \end{cases} . \quad (1.10)$$

ϕ^{ij} spielt dabei die Rolle einer *elastischen Matrix* für das FL-Gitter. Da sie ortsabhängig ist, zeigen die elastischen Anregungen des Gitters *Dispersion*. Nach einer Fouriertransformation sollen durch Vergleich mit Ansätzen für die elastische Energie aus der *lokalen Elastizitätstheorie* aus der elastischen Matrix *elastische Konstanten* berechnet werden. Da die elastischen Anregungen des FL-Gitters eine andere Dispersion haben können als die der lokalen Elastizitätstheorie zugrunde liegende (quadratische Dispersion: $\phi(\vec{k}) \propto k^2$), werden die auf diese Weise definierten elastischen Konstanten i.a. *dispersiv*, d.h. *nicht-lokal* sein.

Dazu muß obige Gleichung zunächst fouriertransformiert werden. Dabei treten aufgrund der oben geschilderten Besonderheiten (siehe Seite 12) in unserem speziellen Fall Vereinfachungen auf:

Wegen fehlender y-Auslenkung der FL's, d.h. $u_\nu^2 \equiv 0$, kann man sich auf $i = j = 1$ beschränken. Da sich außerdem die Bild-FL's "mitbewegen", d.h. $u_\nu^1(z) = u_m^1(z)$ unabhängig vom Index n der Gitterpunkte in y-Richtung, erhält man bei Fouriertransformation immer $\overline{k_y = 0}$ im zum Gitter reziproken k-Raum.

Im einzelnen bekommt man mit

$$\begin{aligned} u^1(\vec{k}) &= \sum_{(X_\mu^0, Y_\mu^0)} \int_{-\infty}^{\infty} dz u_\mu^1(z) e^{-i\vec{k}\vec{R}_\mu^0} \\ &= (2\pi n_i \delta(k_y)) \sum_{X_\mu^0} \int dz e^{-i(k_x X_\mu^0 + k_z z)} \\ \phi^{11}(\vec{k}) &= \sum_{(X_\mu^0, Y_\mu^0)} \int_{-\infty}^{\infty} dz \phi^{11}(\vec{R}_\mu^0) e^{-i\vec{k}\vec{R}_\mu^0} \end{aligned}$$

schließlich (zur Fouriertransformation von ϕ^{ij} siehe Anhang A.1; außerdem können im folgenden bei Integralen und Summen über den gesamten Impulsraum Divergenzen auftreten, weil die endliche Breite ξ der FL-Kerne, bzw. der Singularitäten in der London-Gleichung (L) vernachlässigt wurde. Dies führt dazu, daß im Impulsraum divergierende Summen und Integrale zu regularisieren sind, indem sie bei $1/\xi$ abgeschnitten werden. Die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} dk_z$ und Summen $\sum_{\vec{Q}}$ sind in diesem Sinne zu verstehen.)

$$\Delta F = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 n_r} \int_{1.BZ} dk_x \int_{1.BZ} dk_y \delta(k_y) \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \phi^{11}(\vec{k}) u^1(-\vec{k}) u^1(\vec{k}) \quad (1.11)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi^{11}(\vec{k}) &= n \sum_{\vec{Q}} k_z^2 W(\vec{k} + \vec{Q}) + \\ &+ n \sum_{\vec{Q}} \left\{ (k_x + Q_x)^2 W(\vec{k} + \vec{Q}) - Q_x^2 W(k_z \vec{e}_z + \vec{Q}) \right\} \end{aligned}}, \quad (1.12)$$

wobei die

$$\vec{Q}_\nu = \vec{Q}_{mn} = m \frac{2\pi}{l} \vec{e}_x + n \frac{\pi}{d} \vec{e}_y$$

das zu den \vec{R}_ν^0 inverse Gitter bilden.

Auf der anderen Seite hat man in der *lokalen Elastizitätstheorie für ein 2-dimensionales System*, wie es hier wegen $u_y \equiv 0$ und $\partial_y u_x \equiv 0$ (siehe Seite 12) vorliegt, folgenden Ausdruck für die Energieänderung bei kleinen Auslenkungen der FL's (c_{11} ist der *Kompressionsmodul* und c_{44} der *Neigungsmodul* des FL-Gitters):

$$\Delta F = \frac{1}{2} \int d^2 r \left(c_{11} (\partial_x u_x)^2 + c_{44} (\partial_z u_x)^2 \right)$$

bzw. nach Fouriertransformation und unter Berücksichtigung der Gitterstruktur

$$\Delta F = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 n_r} \int_{1.BZ} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \left(\frac{1}{n_r} c_{11} k_x^2 + \frac{1}{n_r} c_{44} k_z^2 \right) u^1(-\vec{k}) u^1(\vec{k}) \quad (1.13)$$

Durch Vergleich der beiden Ausdrücke 1.11 und 1.13 für ΔF kann man nun *nichtlokale elastische Konstanten* $c_{11}(k)$ und $c_{44}(k)$ aus der elastischen Matrix $\phi^{11}(\vec{k})$ berechnen :

$$\begin{array}{l} c_{11}(k) = \phi^{11}(k, 0, 0) \frac{1}{l k^2} \\ c_{44}(k) = \phi^{11}(0, 0, k) \frac{1}{l k^2} \end{array} \quad (1.14)$$

An dieser Stelle ist noch anzumerken, daß man im Fall $d \neq \lambda$ (im Gegensatz zur oben genannten Bedingung 1.2) nicht mehr von $u^2 \equiv 0$ ausgehen kann und daher kein echtes 2-dimensionales System vorliegt, so daß man auch einen endlichen *Schermodul* c_{66} in der Elastizitätstheorie zu berücksichtigen hätte. Trotzdem würde sich an den obigen Formeln 1.14 zur Berechnung von c_{11} und c_{44} auch in diesem Fall nichts ändern (vgl. [14]). Aus diesem Grund soll im folgenden nur noch die Bedingung

$$l > d \quad (1.15)$$

für die Stabilität (siehe Seite 8) der vorausgesetzten Grundzustandskonfiguration beibehalten werden (dies spielt im nächsten Kapitel nur in den Fällen II, IIIb eine Rolle, vergleiche auch Abbildung 1.4).

Um diese Formeln auszuwerten, muß zunächst nach Gleichung 1.12 die elastische Matrix berechnet werden. Dies soll im nächsten Kapitel geschehen.

1.3 Elastische Matrix und elastische Konstanten des Flußliniengitters

Der Ausdruck 1.12 für die elastische Matrix $\phi^{11}(\vec{k})$ soll im zur Berechnung der elastischen Konstanten $c_{11}(k)$ und $c_{44}(k)$ relevanten Fall $k_y = 0$ (siehe Gleichung 1.14) ausgewertet werden. Dazu werden in 1.12 W bzw. V aus den Gleichungen 1.8 bzw. 1.6 eingesetzt.

Eine etwas längere Rechnung, die im Anhang A.2 durchgeführt ist, ergibt folgen-

des Resultat:

$$\begin{aligned}
\phi^{11}(\vec{k}, k_y = 0) &= \frac{\phi_0^2}{4\pi^3} \frac{d}{l\lambda^2} \left\{ \sum_m k_z^2 \frac{\pi}{2A} \tanh \frac{\pi A}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_m \left\{ (k_x + Q_{x,m})^2 \frac{\pi}{2A} \tanh \frac{\pi A}{2} - Q_{x,m}^2 \frac{\pi}{2B} \tanh \frac{\pi B}{2} \right\} \right\} \\
\text{mit} \\
A^2 &:= \frac{d^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + (k_x + Q_{x,m})^2 + k_z^2 \right) \quad , \quad B^2 := \frac{d^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + Q_{x,m}^2 + k_z^2 \right) \\
(Q_{x,m} &= m \frac{2\pi}{l})
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Wie man sieht, ist die Summation über die von den Bild-FL herrührende Koordinate des reziproken Gitters in Gleichung 1.12 ausgeführt. Interessanterweise kann die rechte Seite von 1.16 jetzt wieder in eine Form, analog zur rechten Seite der Ausgangsgleichung 1.12 gebracht werden, wobei die Summation aber nur noch über das zum Gitter der realen FL's reziproke Gitter läuft:

$$\begin{aligned}
\phi^{11}(\vec{k}, k_y = 0) &= n_r \sum_{Q_x} k_z^2 V_{eff}(\vec{k} + Q_x \vec{e}_x) \\
&\quad + n_r \sum_{Q_x} \left\{ (k_x + Q_x)^2 V_{eff}(\vec{k} + Q_x \vec{e}_x) - Q_x^2 V_{eff}(k_z \vec{e}_z + Q_x \vec{e}_x) \right\} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei ein *effektives Potential* V_{eff} eingeführt wurde, dessen Fouriertransformierte man durch Vergleich mit 1.16 abliest als

$$V_{eff}(\vec{q}) = V_{eff}(q_x, q_z) = \frac{\phi_0^2}{8\pi\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 q^2}} \tanh \frac{d}{2\lambda} \sqrt{1 + \lambda^2 q^2} \quad . \tag{1.17}$$

Dieses Potential beschreibt nun die Wechselwirkung von Linienelementen realer FL's, wobei die Effekte, die von den Randbedingungen auf der Schichtoberfläche herrühren, bereits im Potential enthalten sind. Mit anderen Worten enthält V_{eff} bereits alle von der Schichtgeometrie kommenden Effekte des Problems. Man kann sich als Ersatzkonfiguration für die FL's in der Schicht also auch eine Kette von FL's (auf der x-Achse "aufgereiht") in einem Bulk-Supraleiter (d.h. in einem

echten 3-dimensionalen System) vorstellen, wobei für das Wechselwirkungspotential für FL-Linienelemente V_{eff} zu nehmen ist.

Zum Vergleich kann man eine solche FL-Kette in einem Bulk-Supraleiter betrachten, wobei die FL-Linienelemente aber mit einem in 3 Dimensionen definierten Potential

$$V_3(\vec{q}) = V_3(q_x, q_y, q_z) = \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{1}{1 + \lambda^2 q^2} \quad (\stackrel{1.6}{=} V(\vec{q}))$$

wechselwirken, wie es Brandt [14] für die 3-dimensionale Geometrie berechnet hat (und es auch im Ausdruck 1.7 für F auftaucht). Vergleichbar mit V_{eff} ist dann der in der xz -Ebene wirksame Teil

$$V_3(y=0, q_x, q_z) = \int dq_y V_3(\vec{q}) = \frac{\phi_0^2}{8\pi\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 q^2}} \quad .$$

Vergleich mit 1.17 zeigt, daß die Schichtgeometrie die repulsive, abstoßende Wechselwirkung V_3 um einen Faktor $\tanh \frac{d}{2\lambda} \sqrt{1 + \lambda^2 q^2}$ reduziert. Für $d \rightarrow \infty$ wird dieser Faktor wieder 1, für $d \ll \lambda$ wird er jedoch klein. Dies zeigt schon, daß das FL-Gitter in der dünnen Schicht vergleichsweise “weich” gegenüber den FL-Gittern in Bulk-Supraleitern ist.

Außerdem kann man an dieser Stelle Anschluß an die Resultate von Abrikosov [17] gewinnen, der auf etwas andere Art und Weise die Wechselwirkungsenergiegerichte gerader FL's in der Grundzustandskonfiguration für die supraleitende Schicht berechnet hat. Der Ausdruck

$$\frac{1}{2Vol} \sum_{\nu \neq \mu} \int \int dz dz' V_{eff}(X_\nu^0 - X_\mu^0, z - z') = \frac{1}{4\pi dl} \int dq V_{eff}(q, 0) \sum_{m \neq 0} e^{iqml}$$

(mit $Vol = L N_r l d$), den man dafür unter Verwendung von V_{eff} erhält, stimmt mit dem Resultat von Abrikosov in [17] überein.

I Mit der Gleichung 1.16 können nun bereits die elastischen Konstanten für den Fall *kleiner FL-Abstände* l , d.h. $d < l \ll \lambda$ (siehe Abbildung 1.4) unter Berücksichtigung der oben gemachten Voraussetzung $l > d$ aus 1.15, erhalten werden. In diesem Fall tragen aus den m -Summen in 1.16 hauptsächlich die ersten Summanden bei, wenn man sich auf nicht zu große Werte von k_x beschränkt (etwa k_x in 1.BZ, $|k_x| \leq Q_{x,1}/2 = \pi/l$), da $Q_{x,m}$, A und B sehr schnell mit m wachsen. Physikalisch liegt dies daran, daß $V_{eff}(\vec{q})$ eine Reichweite $\propto 1/\lambda \ll 1/l$ hat bzw. $V_{eff}(\vec{r})$ eine Reichweite $\propto \lambda \gg l$ im Ortsraum haben wird, d.h. jede FL spürt das Potential sehr vieler Nachbarn, so daß eine Kontinuumsapproximation sinnvoll erscheint, was wiederum der Beschränkung auf die ersten Summanden in den $Q_{x,m}$ -Summen entspricht. Behält man nur den ersten Summanden mit $Q_{x,0} = 0$, erhält man auf diese Art folgende Näherungen für ϕ^{11} und damit via 1.14 für die c 's:

$$\phi^{11}(\vec{k}, k_y = 0) \simeq \frac{\phi_0^2}{8\pi} \frac{1}{l\lambda} k^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 k^2}} \tanh \frac{d}{2\lambda} \sqrt{1 + \lambda^2 k^2} \quad \text{bzw.}$$

$$\boxed{
\begin{aligned}
c_{11}(k) = c_{44}(k) &= \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{1}{l} \frac{2\pi\lambda}{l} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 k^2}} \tanh \frac{d}{2\lambda} \sqrt{1 + \lambda^2 k^2} \\
&\stackrel{d \ll \lambda}{=} \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{1}{l} \frac{\pi d}{l}
\end{aligned}
} \tag{1.18}$$

Dieser Kontinuumsrenzfall liefert identische Werte für $c_{11}(k)$ und $c_{44}(k)$. Ein Kippen des FL-Gitters ist also energetisch gleichbedeutend mit einer Kompression, was man sich dadurch veranschaulichen kann, daß im Kontinuumsliches das Kippen des Gitters als Kompression in z-Richtung aufgefaßt werden kann [14].

Wegen genügend großer Schichtdünne ($d \ll \lambda$) ist in 1.18 die Entwicklung des tanh-Faktors möglich, und es tritt *keine* Dispersion mehr auf. Dies könnte seinen Grund darin haben, daß nun durch die Dünne der Schicht die Eindringtiefe des Magnetfeldes effektiv so weit verkleinert wird, daß es den Fluktuationen der FL-Kerne leicht “folgen” kann und so keine nichtlokalen Effekte mehr auftreten.

Außerdem stellt man auch hier (siehe Diskussion von V_{eff} auf Seite 19) wieder fest, daß das FL-Gitter in einer sehr dünnen (d.h. $d \ll l \ll \lambda$) Schicht weich ist. Dies bewirkt auch in 1.18 der tanh-Faktor, der für $d \ll \lambda$ sehr klein ist, so daß die elastischen Konstanten und damit die zur Deformation nötige Energie proportional zu d/l sehr klein werden.

II Als nächstes soll $c_{44}(k)$ für *große FL-Abstände* l , d.h. $l \gg \lambda$, $l > d$ (siehe Abbildung 1.4), ausgewertet werden. In diesem Limes liegen die $Q_{x,m}$ dicht und man kann $\phi^{11}(0, 0, k)$ und damit nach 1.14 auch $c_{44}(k)$ durch Umwandlung der $Q_{x,m}$ -Summen aus 1.16 in Integrale berechnen. Die entstehenden Integrale im Impulsraum können divergieren aufgrund der schon erwähnten Tatsache, daß die eigentlich endliche Breite ξ der Singularitäten in der London-Gleichung (L) aus 1.1 vernachlässigt wurde. Im Impulsraum divergente Integrale müssen daher bei $1/\xi$ abgeschnitten werden. Auf diese Weise erhält man:

$$\begin{aligned}
\phi^{11}(0, 0, k) &= \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{d}{\lambda^2 l} \sum_m k^2 \frac{1}{2d\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + Q_{x,m}^2 + k^2}} \tanh \frac{d}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + Q_{x,m}^2 + k^2} \\
&\simeq \frac{\phi_0^2}{8\pi} \frac{1}{\lambda^2 l} k^2 \frac{l}{2\pi} \int_{(-1/\xi)}^{(1/\xi)} dQ_x \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + Q_x^2 + k^2}} \tanh \frac{d}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + Q_x^2 + k^2}
\end{aligned}$$

und damit

$$c_{44}(k) = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{1}{l} \left\{ 2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa^2} + k^2 \xi^2}}{\sqrt{\frac{1}{\kappa^2} + k^2 \xi^2}} - 2 \int_0^\infty dQ_x \left(1 - \tanh \frac{d}{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + Q_x^2 + k^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + Q_x^2 + k^2}} \right\} \quad (1.19)$$

Man kann auch hier wieder den Fall einer sehr dünnen ($d \ll \lambda$) Schicht betrachten und den tanh-Faktor in der Gleichung für ϕ^{11} entwickeln mit dem Ergebnis

$$c_{44}(k) = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{1}{l} \frac{d}{\xi} \quad .$$

Wie oben wird die elastische Konstante mit abnehmender Schichtdicke d immer kleiner, und es tritt auch keine Dispersion mehr auf.

Im hier betrachteten Fall großer l spürt jede FL nur das Potential seiner nächsten Nachbarn oder kann sogar als *isoliert* betrachtet werden, was sich bei der Untersuchung von c_{44} als zulässig und zweckmäßig erweist, da c_{11} exponentiell mit l verschwindet (siehe III) und damit $c_{11} \ll c_{44}$.

Im lokalen Limes $k \rightarrow 0$, der einer homogenen Neigung des Gitters entspricht, sollte sich dann folgende Deutung der Ergebnisse ergeben :

Für weitestgehend als isoliert zu betrachtende FL's ergibt sich die Energieänderung infolge einer homogenen Neigung mit dem *Neigungswinkel* Θ einzig und allein aus der Selbstenergieänderung durch die mit dem Neigen verbundenen Längenänderung der Linien. Mithilfe von dem oben in 1.17 gefundenen V_{eff} hat man für die (*Selbst-)Energie pro Länge* ϵ einer isolierten FL $\epsilon = V_{eff}(\xi)$, und die Änderung der Freien Energie läßt sich in diesem Falle offensichtlich schreiben als

$$\begin{aligned} \Delta F &= N_r \frac{1}{2} V_{eff}(\xi) \Delta(L^2) \\ &= N_r \frac{\epsilon}{L} (L^2 \Theta^2) \quad . \end{aligned}$$

Andererseits erhält man

$$\Delta F = \frac{1}{2} N_r l L c_{44} \Theta^2 \quad ,$$

was durch Vergleich auf die Beziehung

$$c_{44}(k=0) = \frac{2}{l} \epsilon$$

führt, die es ermöglicht, aus $c_{44}(k=0)$ die Energie pro Länge ϵ einer FL zu bestimmen. Tut man dies mit Beziehung 1.19 für c_{44} unter Beachtung von $\kappa \gg 1$,

erhält man (nach Überführung des Integrals aus 1.19 in eine unendliche Reihe)³:

$$\epsilon = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left\{ \ln 2\kappa + \left(\ln \frac{\gamma d}{4\pi\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{2\pi\lambda}\right)^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2}} - \frac{1}{n} \right] \right) \right\}$$

Im Fall $d \ll \lambda$ konvergiert die Summe in führender Ordnung gegen $2 \ln 2$ und man bekommt mit dem bekannten Resultat [16] $\epsilon(d = \infty) = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \kappa$:

$$\epsilon = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \frac{\gamma d}{\pi\xi} \quad \text{bzw.}$$

$$\epsilon = \epsilon(d = \infty) + \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \frac{\gamma d}{\pi\lambda}$$

Dies stimmt mit einem Ergebnis von Abrikosov [17] überein und bestätigt so Gleichung 1.19.

Desweiteren ist auch hier wieder für $d \ll \lambda$ anzumerken, daß ϵ bzw. c_{44} bei dünnen Schichten kleiner werden im Vergleich zum Bulk-Supraleiter und damit das Gitter weicher wird.

III Nun soll $\phi^{11}(k, 0, 0)$ und damit gemäß 1.14 auch $c_{11}(k)$ im Bereich *größerer FL-Abstände* l betrachtet werden. Dazu wird in 1.16 eine Taylorentwicklung um $k = 0$ vorgenommen.

$$\begin{aligned} \phi^{11}(k, 0, 0) &= \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{1}{l\lambda^2} \left\{ \sum_m \left[Q_x^2 \frac{1}{2\tilde{Q}_x} \tanh \frac{d}{2} \tilde{Q}_x \right] \Big|_{Q_{x,m}}^{k+Q_{x,m}} \right\} \\ &= \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{1}{l\lambda^2} \left\{ \sum_{r \text{ gerade} \geq 2} \frac{1}{r!} k^r \sum_m \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} \left[Q_x^2 \frac{1}{2\tilde{Q}_x} \tanh \frac{d}{2} \tilde{Q}_x \right] \right\} \\ (\text{hier ist } \tilde{Q}_x &:= \frac{1}{\lambda^2} + Q_x^2 \text{)} \end{aligned}$$

Die Terme für ungerades r fallen bei Summation über $Q_{x,m}$ aus Symmetriegründen weg.

Als nächstes soll die Summe über m mittels Poisson-Summation ausgeführt werden. Dabei ist zu beachten, daß der Summand mit der 0-ten Fourierkomponente

$$\phi^{11}(k, 0, 0) = \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{1}{l\lambda^2} \left\{ \int dm \left[Q_x^2 \frac{1}{2\tilde{Q}_x} \tanh \frac{d}{2} \tilde{Q}_x \right] \Big|_{Q_x}^{k+Q_x} \right\}$$

nicht konvergiert. Das Auftreten dieses Summanden ist jedoch ein Artefakt der Rechnung, in der in 1.16 zwei selber nicht konvergente Summen voneinander subtrahiert werden. Diese nicht wohldefinierte Subtraktion ist derart durchzuführen,

³ $\gamma = e^C = 1,78$

daß physikalisch sinnvolle Ergebnisse erhalten werden. In unserem Fall heißt das, daß sich aufgrund der Tatsache, daß die Wechselwirkungsenergie gerader FL's mit wachsendem Abstand exponentiell abnehmen sollte (vgl. z.B. [17]), auch ein c_{11} bzw. ϕ^{11} ergeben sollte, das exponentiell mit l abnimmt. Dies ist nur dann gegeben (s.u. 1.22), wenn der obige Term keinen Beitrag leistet in der Poisson-Summe. Dies ist auch mathematisch nachzuvollziehen, da man nach einer Substitution sieht, daß die obigen divergenten integralen Anteile der beiden nicht konvergenten Summen sich gegeneinander wegheben. Man bekommt also

$$\begin{aligned}\phi^{11}(k, 0, 0) &= \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \sum_{r \text{ ger.} \geq 2} \frac{1}{r!} k^r \left(\sum_m \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} [\dots] - \int dm \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} [\dots] \right) \right\} \\ &= \frac{\phi_0^2}{8\pi^2} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \sum_{r \text{ ger.} \geq 2} \frac{1}{r!} k^r \sum_{s \neq 0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dQ_x e^{iQ_x l s} \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} [\dots]}_{I_s^r} \right\} \quad (1.20)\end{aligned}$$

Die Integrale I_s^r können in der komplexen Ebene geschlossen und mittels Residuensatz ausgewertet werden mit dem Ergebnis (siehe Anhang A.3)

$$I_s^r = I_{-s}^r = \sum_{n \text{ ungerade} \geq 1} 2\pi i \frac{r_n}{d} \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} e^{iQ_x l s} \Big|_{Q_x=r_n} \quad \text{mit} \quad r_n := i \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2 \frac{\pi^2}{d^2}} \quad (1.21)$$

und damit

$$\begin{aligned}\phi^{11}(k, 0, 0) &= \frac{\phi_0^2}{2\pi} \frac{1}{d\lambda^2} \left\{ \sum_{n \text{ unger.} \geq 1} i r_n \sum_{s>0} \sum_{r \text{ ger.} \geq 2} \frac{1}{r!} k^r \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} e^{iQ_x l s} \Big|_{Q_x=r_n} \right\} \\ &= \frac{\phi_0^2}{2\pi} \frac{1}{d\lambda^2} \left\{ \sum_{n \text{ unger.} \geq 1} i r_n \left\{ \sum_{s>0} \text{Re} (e^{i(r_n+k)ls} - e^{i r_n l s}) \right\} \right\} \\ &= \frac{\phi_0^2}{2\pi} \frac{1}{d\lambda^2} \left\{ \sum_{n \text{ unger.} \geq 1} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2 \frac{\pi^2}{d^2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \sum_{s>0} \exp(-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2 \frac{\pi^2}{d^2}} l s) (1 - \cos k l s) \right\} \right\} \quad (1.22)\end{aligned}$$

IIIa Für große FL-Abstände l und relativ kleine Schichtdicken d , also $l \gg \lambda > d$ (siehe Abbildung 1.4) kann man sich in 1.22 auf den ($s=1$)-Summanden beschränken, ebenso auf den ($n=1$)-Summanden und bekommt

$$\begin{aligned}\phi^{11}(k, 0, 0) &\simeq \frac{\phi_0^2}{2\pi} \frac{1}{d\lambda^2} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{d^2}} \exp(-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{d^2}} l) (1 - \cos kl) \\ &= \frac{\phi_0^2}{2\pi} \frac{1}{d\lambda^2} \frac{1}{\lambda_{eff}} \exp(-\frac{l}{\lambda_{eff}}) (1 - \cos kl)\end{aligned}$$

mit $\frac{1}{\lambda_{eff}} := -ir_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{d^2}} \simeq \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\pi}{d}\right)$ bzw. $\lambda_{eff} \simeq \min\left(\lambda, \frac{d}{\pi}\right)$.

In dem hier zu untersuchendem Fall $\lambda > d$ gilt also $\lambda_{eff} \simeq d/\pi$. Nach 1.14 hat man dann

$$\begin{aligned} c_{11}(k) &= \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \frac{1}{l} 8\pi e^{-l/\lambda_{eff}} \frac{1 - \cos kl}{k^2 d\lambda_{eff}} \\ &\simeq \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \frac{1}{l} 8\pi^2 e^{-\pi l/d} \frac{1 - \cos kl}{k^2 d^2} \end{aligned} \quad (1.23)$$

In 3 Dimensionen fällt die Wechselwirkungsenergie zwischen FL's und damit auch ϕ^{11} und c_{11} mit $\exp(-l/\lambda)$ ab [14]. Dies legt die obige Definition einer effektiven Eindringtiefe λ_{eff} nahe, die in der Schichtgeometrie die Rolle der Bulk-Eindringtiefe übernimmt. Wegen $\lambda_{eff} < \lambda$ sind auch hier wieder die elastischen Konstanten sehr viel kleiner und damit das Gitter weicher als in einem Bulk-Supraleiter.

Für sehr dünne Schichten ($d \ll \lambda$) gilt $\lambda_{eff} = d/\pi \ll l$ und in 1.23 geht

$$c_{11}(k) \rightarrow 0 \quad ,$$

und zwar in nicht-analytischer Weise schneller als jede Potenz von d .

Außerdem kann man an dieser Stelle das Resultat 1.23 wieder mit den auf anderem Wege berechneten Ergebnissen von Abrikosov [17] vergleichen, und zwar indem man den lokalen Grenzwert $k \rightarrow 0$ einer homogenen Kompression des FL-Gitters $l \rightarrow l + \delta l$ betrachtet. Mit der von Abrikosov in [17] für den hier betrachteten Fall $\lambda \gg d$ errechneten Wechselwirkungsenergie

$$F_A = N_r L \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{\lambda_{eff}}{d\lambda^2} e^{-l/\lambda_{eff}}$$

erhält man die gleiche Energieänderung

$$\Delta F_A = \frac{1}{2} (\delta l)^2 \frac{\partial^2}{\partial l^2} F_A = \frac{1}{2} (\delta l)^2 N_r L \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{1}{\lambda_{eff} d \lambda^2} e^{-l/\lambda_{eff}}$$

wie unter Verwendung der elastischen Konstanten $c_{11}(k=0)$

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{1}{2} \int \int dx dz c_{11}(k=0) \left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} N_r l L \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \frac{1}{l} 8\pi e^{-l/\lambda_{eff}} \frac{l^2}{2d\lambda_{eff}} \left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 \end{aligned} \quad .$$

Dies bestätigt das Ergebnis 1.23.

IIIb Bei *großen FL-Abständen* l und *großen Schichtdicken* d , d.h. $l \gg \lambda$ und $d \gg \lambda$, also zusammen mit der Bedingung 1.15 $l > d \gg \lambda$ (siehe Abbildung 1.4),

ist es zweckmäßig, die nur langsam konvergente n-Summe in 1.22 mittels Poisson-Summation auszuwerten. Darüberhinaus muß man nur den (s=1)-Beitrag der s-Summe behalten und bekommt nach einigen Umformungen, die in Anhang A.4 angegeben werden⁴:

$$\phi^{11}(k, 0, 0) = \frac{\phi_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{\lambda^2} (1 - \cos kl) \sum_t (-1)^t \frac{\partial^2}{\partial l^2} K_0 \left(\frac{\sqrt{l^2 + (td)^2}}{\lambda} \right) \quad (1.24)$$

$K_0''(x) = \frac{1}{x} K_1(x) + K_0(x)$ besitzt für große x die Asymptotik $K_0''(x) \asymp (1 + \frac{1}{x}) \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$, so daß K_0'' schnell fällt und man sich wegen $d \gg \lambda$ auf den (t=0)-Summanden beschränken kann. Unter Verwendung der Asymptotik wegen $l \gg \lambda$ ergibt sich

$$\phi^{11}(k, 0, 0) \simeq \frac{\phi_0^2}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\lambda^4} \left(1 + \frac{\lambda}{l}\right) \sqrt{\frac{\lambda}{l}} e^{-l/\lambda} (1 - \cos kl)$$

und daher mit 1.14

$$c_{11}(k) = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{1}{l} 4\pi \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2l}} \left(1 + \frac{\lambda}{l}\right) e^{-l/\lambda} \frac{1 - \cos kl}{k^2 \lambda^2} \quad (1.25)$$

In diesem Limes ist nun die Schichtdicke ganz herausgefallen, was ja auch unmittelbar einleuchtend ist bei einer sehr dicken Schicht.. Man bekommt wieder den für Bulk-Supraleiter typischen Abfall von c_{11} mit $\exp(-l/\lambda)$.

Auch hier kann man genauso wie im vorigen Abschnitt zeigen, daß das Ergebnis 1.25 im lokalen Limes $k \rightarrow 0$ bei einer homogenen Kompression des Gitters mit Resultaten von Abrikosov [17] in Übereinstimmung steht.

Die Ergebnisse aus IIIa und IIIb weisen bei Verwendung der effektiven Eindringtiefe $\lambda_{eff} \simeq \min(\lambda, \frac{d}{\pi})$ bis auf Vorfaktoren ähnliche Charakteristika auf:

$$c_{11}(k) \propto \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{1}{l} e^{-l/\lambda_{eff}} \frac{1 - \cos kl}{k^2 \lambda_{eff}^2} \quad (1.26)$$

Eine solche Form erhält man also immer für $l \gg \lambda, d$.

Die Gültigkeitsbereiche der betrachteten Fälle I, II, IIIa, IIIb sind zur besseren Übersicht in der Abbildung 1.4 eingetragen. Dort sind auch der Bereich, in dem die betrachtete 1-dimensionale Grundzustandskonfiguration mit in der Mitte der Schicht zentriert liegenden FL's ($Y_\nu^0 = 0$) instabil wird ($l \not\gg d$, siehe Kapitel 2.2.1) eingezeichnet neben dem Bereich, in dem Scherungen des FL-Gitters nicht aus energetischen Gründen vernachlässigt werden können ($\lambda \not\gg d$ und $l \not\gg d$, siehe Kapitel 2.2.2), d.h. dort gilt $c_{66} \not\gg c_{11}, c_{44}$.

⁴ K_ν ist die ν -te Bessel-Fkt. mit imaginärem Argument

Abbildung 1.4: Gültigkeitsbereiche für I, II, IIIa/b

Es bleibt anzumerken, daß das Ergebnis 1.18 für den Fall I bei $l \rightarrow \lambda$ nicht in die Resultate 1.19,1.23,1.25 bzw. 1.26 für die Fälle II und III übergehen. Die Formeln können also in dieser Form nicht unbedingt in den Bereich $l \sim \lambda$ interpoliert werden.

1.4 Zusammenfassung

An den Ergebnissen der Untersuchung von elastischen Konstanten für ein FL-Gitter in einer Schichtgeometrie sind folgende Punkte auffällig:

- Zunächst einmal sollte man bemerken, daß es für eine solche Geometrie doch relativ problemlos gelingt, die elastischen Konstanten sowohl im Bereich $l \gg \lambda$ großer FL-Abstände als auch im “dichten” Limes $l \ll \lambda$ kleiner FL-Abstände (wobei d jeweils die Stabilitätsbedingung $l > d$ für den 1-dimensionalen Grundzustand erfüllen muß) zu berechnen (insbesondere erhält man auch ihre Dispersionsbeziehungen). Dies liegt hier im wesentlichen daran, daß man nach Einführung der Spiegel-FL’s die Berechnung der elastischen Konstanten in einem 2-dimensionalen Rechteckgitter vornimmt, was wesentlich einfacher zu handhaben ist als etwa das hexagonale FL-Gitter in einem Bulk-Supraleiter.

Hinzu kommt, daß für $l \gg d$ und $\lambda > d$ die FL’s im 1-dimensionalen Gitter auch nur einen Freiheitsgrad haben, d.h. nur uniaxiale longitudinale Auslenkungen möglich sind (siehe Kapitel 2.2.2) und das System mit zwei elastischen Konstanten, dem Neigungs- und Kompressionsmodul, beschrieben werden kann.

- Die elastischen Konstanten für Schichten sind im Vergleich zu denen eines FL-Gitters in einem Bulk-Supraleiter *klein*, und zwar umso kleiner je dünner die Schicht gemacht wird. Das bedeutet mit anderen Worten, daß das FL-Gitter einer Schicht vergleichsweise *weich* ist.

Grund dafür ist die effektive Verkleinerung der Eindringtiefe durch den Einfluß der Schichtoberflächen. An den Oberflächen muß das Magnetfeld eines Flußfadens auf 0 absinken, so daß er bei $d < \lambda$ nicht mehr sein volles Magnetfeld um sich herum aufbauen muß, was zu einer geringeren magnetischen Energie führt. Dadurch kostet es dann auch weniger Energie, wenn das Magnetfeld sich den Verbiegungen einer FL anpassen muß, und das Gitter wird weicher.

Diese relativ kleinen elastischen Konstanten bedeuten wiederum, daß thermische Fluktuationen in solchen Systemen eine große Rolle spielen, was die Untersuchung von Vortex-Flüssigkeiten und Vortex-Gläsern (bei Anwesenheit von Unordnung) in diesem Schichtsystem interessant macht.

- Im Limes sehr dünner Schichten gibt es *keine Dispersion* mehr. Dies liegt ebenfalls an der effektiv verkleinerten Eindringtiefe, da durch eine Verkleinerung der Eindringtiefe die räumliche Ausdehnung der magnetischen Energie des Vortex abnimmt, die eine Ursache für nichtlokale Effekte beim Auslenken der FL-Kerne darstellt. Durch eine Abschwächung dieser nicht-lokalen Einflüsse muß auch die Dispersion geringer werden.

- Zum Gültigkeitsbereich der Ergebnisse ist Folgendes zu sagen: Der einzige Punkt, an dem eine Temperaturabhängigkeit in der hier vorgestellten Theorie erscheint, ist die Eindringtiefe λ (und die Kohärenzlänge ξ), die über große Temperaturbereiche (wenn nicht gerade $T \lesssim T_c$) eine schwache Temperaturabhängigkeit hat im Rahmen der Ginzburg-Landau-Theorie (ebenso wie ξ). Dies ist beispielsweise für große FL-Abstände l sicher nicht richtig. Spätestens, wenn die mittleren Auslenkungen der FL's infolge thermischer Anregung so groß werden (etwa $\approx l$), daß FL-Kollisionen vorkommen, können die Effekte vom Verbot solcher Kollisionen in diesem Fall das elastische Verhalten des Gitters (zumindest bei Kompression) sehr stark beeinflussen. Man hat dann eine effektive, diese sterische Repulsion beinhaltende Wechselwirkung zwischen FL's zu berücksichtigen (siehe z.B. [5],[25]) bei der Berechnung von c_{11} .

In diesem Kapitel wurde gewissermaßen nur der "magnetische" (mittels London-Gleichung und Maxwellgleichungen bestimmte) Anteil der elastischen Konstanten bestimmt. Der angesprochene "entropische" Anteil blieb unberücksichtigt.

Kapitel 2

Grundzustandskonfiguration

Im letzten Kapitel über die elastischen Konstanten des Flußliniengitters in der supraleitenden Schicht wurde eine Grundzustandskonfiguration angenommen, in der gerade, äquidistante Flußlinien vorliegen, die in der Schicht zentriert, d.h. in der Mitte zwischen beiden Schichtoberflächen liegen und somit ein 1-dimensionales Gitter bilden (bei Projektion auf die xy -Ebene). Es ist bekannt [18],[19], daß dieser Zustand bei hinreichend kleinen Flußlinienabständen instabil ist gegenüber Bildung einer 2-dimensionalen Überstruktur durch im Gitter alternierende Auslenkungen in Richtung senkrecht zur Schicht. In diesem Kapitel sollen diese Resultate mit der im vorangehenden Kapitel verwendeten Methode der Spiegel-Flußlinien reproduziert und eine einfache Abschätzung für den Flußlinienabstand, an dem der strukturelle Phasenübergang stattfindet, gefunden werden. Dabei wird man im stabilen Fall auch Abschätzungen für die Energie von Auslenkungen der Flußlinien senkrecht zur Schicht machen können. Dies entspricht einer Abschätzung des Schermoduls c_{66} des Gitters.

2.1 Struktur der zu untersuchenden Zustände und ihre Energie

Bei der Berechnung der elastischen Konstanten im Kapitel 1 bin ich von einer Grundzustandskonfiguration ausgegangen, in der die FL's *gerade*, *äquidistant* und *zentriert* (d.h. $Y_\nu^0 = 0$) in der Schicht liegen. Während die ersten beiden Annahmen aufgrund der effektiven Wechselwirkung zwischen realen FL's (repulsive Zentralkräfte, siehe effektives Wechselwirkungspotential V_{eff} für reale FL's auf Seite 19) sofort zu rechtfertigen sind, ist die dritte Annahme einiger weiterer Untersuchung bedürftig.

Dies wird unmittelbar einleuchtend, wenn man eine reale FL und ihre Nächsten-Nachbar-FL's betrachtet. Wie in der Skizze 2.1 angedeutet, wirkt die repulsive

Abbildung 2.1: reale FL und ihre NN-FL's

Wechselwirkung der benachbarten realen FL's in Verbindung mit der attraktiven Wechselwirkung der benachbarten Bild-FL's *destabilisierend* bzgl. Auslenkungen in y-Richtung. Dabei werden zwei benachbarte reale FL's y-Auslenkungen in entgegengesetzte Richtungen bevorzugen.

Daher soll in diesem Kapitel die Stabilität des FL-Gitters in der Schicht gegenüber einer Auslenkung

$$\vec{u}_\nu = \vec{u}_{m0} = (0, (-1)^m u, 0)$$

der realen FL's untersucht werden. Diese verursacht im vollen Gitter aus realen und Bild-FL's, wie dies in Abbildung 2.2 gezeigt ist, Verschiebungen der Form

$$\vec{u}_{\tilde{\nu}} = \vec{u}_{\tilde{m}\tilde{n}} = (0, (-1)^{\tilde{m}+\tilde{n}}, 0) \quad .$$

Abbildung 2.2: Gitter mit untersuchter Überstruktur

Völlig analog zu den Unterkapiteln 1.1 und 1.2 im vorangehenden Kapitel 1 kann man wieder folgende Ausdrücke für das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ und die Freie

Energie F für diesen Zustand verwenden (siehe Gleichungen 1.5 und 1.7):

$$\begin{aligned}
|y| \geq \frac{d}{2} : \quad \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}_a && + && 0 \\
|y| \leq \frac{d}{2} : \quad \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}_a \frac{\cosh y/\lambda}{\cosh d/2\lambda} && + && \underbrace{\frac{4\pi}{\phi_0} \sum_{\substack{\vec{\nu} \text{ Bild} \\ \vec{\mu} \text{ real}}} \int d\vec{R}_{\vec{\nu}} \operatorname{sgn}(FL\vec{\nu}) V(\vec{r} - \vec{R}_{\vec{\nu}})}_{\vec{H}_F} \\
F &= F_0 - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \vec{H}_a \int_{|y| \leq d/2} d^3r \vec{H}_F}_{:= T_1} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{\nu} \text{ real} \\ \vec{\mu} \text{ Bild} \\ \text{real}}} \iint d\vec{R}_{\vec{\nu}} d\vec{R}_{\vec{\mu}} \operatorname{sgn}(FL\vec{\mu}) V(\vec{R}_{\vec{\nu}} - \vec{R}_{\vec{\mu}})}_{:= T_2}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

mit

$$\vec{R}_{\vec{\nu}} = \vec{R}_{\tilde{m}\tilde{n}} = (\tilde{m}, \tilde{n}d + (-1)^{\tilde{m}+\tilde{n}} u, z) = \vec{R}_{\vec{\nu}}^0 + \vec{u}_{\vec{\nu}}$$

und (siehe Gleichung 1.6)

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{\phi_0^2}{(4\pi\lambda)^2} \frac{e^{-r/\lambda}}{r} && \text{bzw.} \\
V(\vec{q}) &= \int d^3r V(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\vec{r}} = \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{1}{1 + \lambda^2 q^2} .
\end{aligned}$$

Zu den Gleichungen 2.1 sind folgende Bemerkungen zu machen:

- Der erste Term T_1 in $F - F_0$ beschreibt die Wechselwirkung zwischen äußerem Feld H_a und dem FL-Gitter durch die Ankopplung des FL-Gitter-Magnetfeldes H_F an das äußere Feld H_a . Er hat die in der GL-Theorie benutzte Standardform

$$-Vol \frac{H_a B_F}{4\pi} \quad \text{mit} \quad B_F = \overline{H_F} \quad ,$$

d.h. B_F wird durch Mittelung des mikroskopischen Magnetfeldes H_F über die Schicht gewonnen. Dieser Summand von F hängt nur von den y -Koordinaten der FL's ab und muß deshalb hier mitgeführt werden im Gegensatz zur Rechnung für die elastischen Konstanten in Kapitel 1, wo keine y -Auslenkung der FL's betrachtet wurde.

- Der zweite Term T_2 in $F - F_0$ steht für die Wechselwirkungs- und Selbstenergie der FL's. Seine elastischen Eigenschaften wurden ausführlich in Kapitel 1.2 untersucht.

- F_0 ist der nicht von den FL-Positionen abhängige Teil der Freien Energie F und für unser Problem nicht relevant.
- Da im Grundzustand gerade FL's vorliegen, ergibt jede Integration

$$\int d\vec{R}_{\tilde{\nu}} = \vec{e}_z \int dz = L\vec{e}_z \quad .$$

Nun zur Berechnung der einzelnen Energieterme in Gleichung 2.1: Für den Summanden T_1 , der die Wechselwirkung mit dem äußeren Feld beschreibt, bekommt man nach Einsetzen von \vec{H}_F

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{4\pi} \vec{H}_a \int_{|y|\leq d/2} d^3r \vec{H}_F \\ &= -\frac{H_a L}{\phi_0} \sum_{\tilde{\nu} \text{ Bild+real}} \text{sgn}(FL\tilde{\nu}) \underbrace{\int_{|y|\leq d/2} d^3r V(\vec{r} - \vec{R}_{\tilde{\nu}})}_{I(\vec{R}_{\tilde{\nu}})} \end{aligned}$$

Für das Integral $I(\vec{R}_{\tilde{\nu}})$ mit $\vec{R}_{\tilde{\nu}} = (X_{\tilde{\nu}}, Y_{\tilde{\nu}}, z)$ erhält man das nur von $Y_{\tilde{\nu}}$ abhängige Ergebnis (siehe Anhang B.1)

$$I(Y_{\tilde{\nu}}) = \int_{|y|\leq d/2} d^3r V(\vec{r} - \vec{R}_{\tilde{\nu}}) = \begin{cases} \frac{\phi_0^2}{4\pi} \sinh(d/2\lambda) e^{-|Y_{\tilde{\nu}}|/\lambda} & \text{für } |Y_{\tilde{\nu}}| \geq \frac{d}{2} \\ \frac{\phi_0^2}{4\pi} [1 - e^{-d/2\lambda} \cosh(Y_{\tilde{\nu}}/\lambda)] & \text{für } |Y_{\tilde{\nu}}| \leq \frac{d}{2} \end{cases} \quad (2.2)$$

Nach einigen Umformungen, die im Anhang B.1 aufgeführt sind, erhält man damit letzten Endes:

$$T_1 = -\frac{Vol}{4\pi} H_a \frac{\phi_0}{dl} \left(1 - \frac{\cosh u/\lambda}{\cosh d/2\lambda} \right) \quad (2.3)$$

Jetzt muß noch der zweite, Wechselwirkungs- und Selbstenergie beschreibende Summand T_2 von $F - F_0$ in 2.1 ausgewertet werden.

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\tilde{\nu} \text{ real} \\ \tilde{\mu} \text{ Bild+real}}} \iint d\vec{R}_{\tilde{\nu}} d\vec{R}_{\tilde{\mu}} \text{sgn}(FL\tilde{\mu}) V(\vec{R}_{\tilde{\nu}} - \vec{R}_{\tilde{\mu}})$$

Um diese Summe im FL-Gitter aus realen und Bild-FL's auszuführen, zerlegt man das Gitter in 4 Untergitter von FL's gleichen Fluß-Vorzeichens *und* gleicher Auslenkungsrichtung. Die ist in Abbildung 2.3 gezeigt, wo jedes Untergitter durch ein anderes Symbol gekennzeichnet ist. Analog dem Übergang von der Wechselwirkung V auf dem vollen Gitter zu W auf dem Untergitter der positiven

Abbildung 2.3: FL-Gitter mit den 4 Untergittern

FL's im Kapitel 1.2, kann man hier zu einer Wechselwirkung W auf einem der 4 Untergitter übergehen. Also mit

$$\begin{aligned} \vec{R}_\nu^0 &= \vec{R}_{mn}^0 = (m \, 2l, n \, 2d, 0) \\ T_2 &= \frac{1}{2} L^2 \sum_{\substack{\tilde{\nu} \text{ real} \\ \tilde{\mu} \text{ Bild+real}}} \text{sgn}(FL\tilde{\mu}) V(\vec{R}_\nu - \vec{R}_{\tilde{\mu}}) \\ &= \frac{1}{2} L^2 \sum_{\substack{\nu \text{ real} \\ \mu \text{ Bild+real}}} W(\vec{R}_\nu^0 - \vec{R}_\mu^0) \quad , \end{aligned}$$

wobei in W nun die Wechselwirkungen wie in Abbildung 2.4 zusammengefaßt sind.

Abbildung 2.4: In W zusammengefaßte Wechselwirkungen

Das heißt, W besitzt die folgende Form:

$$\begin{aligned}
W(\vec{r}) &= 2V(\vec{r}) + V(\vec{r} + \vec{l} + 2\vec{u}) + V(\vec{r} - \vec{l} - 2\vec{u}) - \\
&\quad - V(\vec{r} - \vec{d} + 2\vec{u}) - V(\vec{r} - \vec{d} - 2\vec{u}) - V(\vec{r} + \vec{l} - \vec{d}) - V(\vec{r} - \vec{l} - \vec{d}) \\
&\text{bzw.} \\
W(\vec{q}) &= 2V(\vec{q}) \left\{ [1 + \cos(\vec{q}(\vec{l} + 2\vec{u}))] - e^{-i\vec{q}\vec{d}} [\cos(\vec{q}2\vec{u}) + \cos(\vec{q}\vec{l})] \right\}
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2} L^2 \sum_{\substack{\nu \text{ real} \\ \mu \text{ Bild+real}}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} W(\vec{q}) e^{i\vec{q}(\vec{R}_\nu^0 - \vec{R}_\mu^0)} \\
&= \frac{1}{2} L N_r n \sum_{\vec{Q}_\mu} W(\vec{Q}_\mu) \\
&= Vol \frac{1}{8d^2 l^2} \sum_{mn} V(\vec{Q}_{mn}) \left\{ [1 + (-1)^m \cos(n \frac{2\pi}{d} u)] - \right. \\
&\quad \left. (-1)^n [\cos(n \frac{2\pi}{d} u) + (-1)^m] \right\} \quad , \quad (2.4)
\end{aligned}$$

wobei sich auch die Anzahlen N auf das Untergitter beziehen, also $n = 1/4dl$, und die \vec{Q}_μ das zum Untergitter \vec{R}_μ^0 inverse Gitter bilden:

$$\vec{Q}_\mu = \vec{Q}_{mn} = (m \frac{\pi}{l}, n \frac{\pi}{d}, 0)$$

Die m -Summe wird nun mittels Poisson-Summation und Berechnung der entstehenden Integrale durch Schließen in der komplexen Ebene und anschließende Anwendung des Residuensatzes ausgeführt. Die Rechnungen sind im einzelnen in Anhang B.2 nachzulesen und enden in

$$\begin{aligned}
T_2 &= Vol \frac{\phi_0^2}{32\pi \lambda^2 d^2 l} \sum_n \lambda_n \left([1 - (-1)^n \cos(n \frac{2\pi}{d} u)] + \right. \\
&\quad \left. + \begin{cases} \text{n ungerade:} & [\cos(n \frac{2\pi}{d} u) + 1] \frac{2}{\exp(l/\lambda_n) - 1} \\ \text{n gerade:} & [\cos(n \frac{2\pi}{d} u) - 1] \frac{2}{\exp(l/\lambda_n) + 1} \end{cases} \right) \\
\text{mit } \frac{1}{\lambda_n} &:= -ir_n = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2 \frac{\pi^2}{d^2}}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Fügt man T_1 und T_2 zusammen, bekommt man folgenden Ausdruck für den re-

levanten Teil der Freien Energiedichte

$$\begin{aligned}
\frac{F - F_0}{Vol}(H_a, l, u) = & -\frac{1}{dl} H_a \frac{\phi_0}{4\pi} \left(1 - \frac{\cosh u/\lambda}{\cosh d/2\lambda}\right) + \\
& + \frac{1}{dl} \frac{\phi^2}{32\pi\lambda^2 d} \left\{ \sum_n \lambda_n [1 - (-1)^n \cos(n\frac{2\pi}{d}u)] + \right. \\
& + \sum_{n \text{ unger.}} \lambda_n [\cos(n\frac{2\pi}{d}u) + 1] \frac{2}{\exp(l/\lambda_n) - 1} + \\
& \left. + \sum_{n \text{ ger.}} \lambda_n [\cos(n\frac{2\pi}{d}u) - 1] \frac{2}{\exp(l/\lambda_n) + 1} \right\} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis erhält mit einer anderen Methode als der hier verwendeten, mit Bild-FL's arbeitenden, auch Takács [18].

Dieser etwas unübersichtliche Ausdruck kann folgendermaßen interpretiert werden:

- Er stellt eine Energiedichte dar, d.h. werden die Vorfaktoren $1/dl$ wemultipliziert, bekommt man eine auf die Länge bezogene Energie pro FL.
- Der erste Summand T_1 beschreibt die Wechselwirkung des FL-Gitters mit dem äußeren Magnetfeld H_a . Aus der Standardformulierung

$$-\frac{H_a B_F}{4\pi} \quad \text{mit} \quad B_F = \overline{H_F} \quad .$$

liest man

$$B_F = \frac{\phi_0}{dl} \left(1 - \frac{\cosh u/\lambda}{\cosh d/2\lambda}\right)$$

ab, d.h. dadurch, daß die am Rand der Schicht auftretenden Abschirmströme nicht vernachlässigt werden können in der Rechnung, trägt jede (von \vec{l} und \vec{d} aufgespannte) Gitterzelle in der Schicht effektiv kein ganzes Flußquant mehr (was $B_F = \phi_0/dl$ entsprechen würde).

- Die restlichen Summanden stammen aus T_2 und repräsentieren die Wechselwirkungs- und Selbstenergiedichte der FL's, und zwar die letzten beiden Summanden die Wechselwirkungs- und der zweite Summand die Selbstenergiedichte. Dies erkennt man daran, daß die Wechselwirkungsenergie der abstandsabhängige (nämlich eponentiell für große l verschwindende) Teil sein muß, während die Selbstenergie keine l -Abhängigkeit aufweisen darf.

Der Selbstenergiesummand stellt eine nicht konvergente Summe dar, was wiederum daran liegt (vgl. Bemerkung zu 1.19), daß im Impulsraum mit einem Cutoff $1/\xi$ gearbeitet werden muß, der dem endlichen Radius der FL-Singularitäten

Rechnung trägt. Der Selbstenergiesummand $\epsilon(d)/dl$ kann aber in eine unproblematische und anschaulichere Form gebracht werden, indem man ihn umschreibt mit

$$\epsilon(d) = \epsilon(d = \infty) + \left(\epsilon(d) - \lim_{d \rightarrow \infty} \epsilon(d) \right) = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \kappa + \left(\epsilon(d) - \lim_{d \rightarrow \infty} \epsilon(d) \right).$$

Setzt man die n-Summe aus obiger Formel ein und führt sie mit Poisson-Summation aus, wird im Limes $d \rightarrow \infty$ gerade die 0-te Komponente absubtrahiert, und man bekommt für den zweiten Summanden aus 2.6¹

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon(d)}{dl} &= \frac{1}{dl} \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \kappa + \frac{1}{dl} \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{s \text{ ger.} \geq 2} 2K_0\left(s \frac{d}{\lambda}\right) + \sum_{s \text{ unger.} \geq 1} -K_0\left(\left(s + \frac{2u}{d}\right) \frac{d}{\lambda}\right) - K_0\left(\left(s - \frac{2u}{d}\right) \frac{d}{\lambda}\right) \right\} \end{aligned}$$

und damit für die Freie Energiedichte $f := F - F_0/Vol$

$$\begin{aligned} f(H_a, l, u) &= -\frac{1}{dl} H_a \frac{\phi_0}{4\pi} \left(1 - \frac{\cosh u/\lambda}{\cosh d/2\lambda} \right) + \\ &+ \frac{1}{dl} \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left\{ \ln \kappa + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s \text{ ger.} \geq 2} 2K_0\left(s \frac{d}{\lambda}\right) + \sum_{s \text{ unger.} \geq 1} -K_0\left(\left(s + \frac{2u}{d}\right) \frac{d}{\lambda}\right) - K_0\left(\left(s - \frac{2u}{d}\right) \frac{d}{\lambda}\right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{dl} \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{2\pi}{d} \left\{ \sum_{n \text{ unger.} \geq 1} \lambda_n [\cos(n \frac{2\pi}{d} u) + 1] \frac{1}{\exp(l/\lambda_n) - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \text{ ger.} \geq 2} \lambda_n [\cos(n \frac{2\pi}{d} u) - 1] \frac{1}{\exp(l/\lambda_n) + 1} \right\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Mithilfe der Gleichung 2.7 soll nun die *Stabilität der 1-dimensionalen Konfiguration mit $u = 0$* , die im Kapitel 1 als Grundzustand angenommen wurde, gegenüber der alternierenden FL-Auslenkung senkrecht zur Schicht mit $u \neq 0$, also der Bildung einer 2-dimensionalen Überstruktur untersucht werden.

2.2 Stabilitätsuntersuchung

Bevor mit der Stabilitätsuntersuchung begonnen werden kann, müssen in 2.7 noch thermodynamische Gleichgewichtsbedingungen beachtet werden. In 2.7 stellt nämlich

¹ K_ν ist die ν -te Bessel-Fkt. mit imaginärem Argument

l (ebenso wie u , das ja ohnehin später genauer betrachtet wird) bei gegebenem H_a und Vol noch einen inneren Freiheitsgrad des Systems dar, bzgl. dessen f minimiert werden muß. Diese Bedingung, angewandt auf den ($u=0$)-Zustand

$$\frac{\partial}{\partial l} f(H_a, u = 0, l) = 0$$

liefert Beziehungen $l(H_a, u = 0)$ bzw. nach Umstellung $H_a(l, u = 0)$. Setzt man diese Beziehungen wieder in die Gleichung 2.7 für $f(H_a, u = 0, l)$ ein, erhält man die ($u=0$)-Gleichgewichtsenergie f^0 als Funktion von H_a bzw. l alleine. Im folgenden soll Stabilität in Abhängigkeit vom FL-Abstand l untersucht werden, daher wird H_a durch die Gleichgewichtsbedingung eliminiert und man erhält

$$f^0(l) = f(H_a(l, u = 0), u = 0, l)$$

als Gleichgewichtsenergie für $u = 0$ bei gegebenem l .

Es soll nun geklärt werden, ob Konfigurationen mit $u \neq 0$ energetisch günstiger sind als die ($u=0$)-Konfiguration bei gleichem FL-Abstand $l(H_a, u = 0)$ bzw. bei gleichem $H_a(l, u = 0)$. Dazu ist die Frage zu beantworten, ob

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right|_{u=0} f^u(l) \stackrel{?}{\geq} 0 \quad \text{mit} \quad f^u(l) = f(H_a(l, u = 0), u, l) \quad .$$

Schon vor der expliziten Durchführung dieser Rechnung kann man jedoch anhand von Gleichung 2.7 feststellen, daß die Ankopplung an das äußere Feld die ($u=0$)-Konfiguration stabilisiert (der entsprechende Summand weist positive Krümmung in u auf), während der Selbstenergie- und Wechselwirkungsenergie-term destabilisierend wirkt (beide haben negative Krümmung). Dies stimmt mit der anschaulichen Vorstellung überein, die ich zu Beginn anhand von Abbildung 2.1 versucht habe zu entwickeln.

Die Durchführung des oben skizzierten Rechenweges ergibt

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right|_{u=0} f^u(l) &= \overbrace{\frac{1}{dl} \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2}}{:=\mathcal{F}} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\cosh(d/2\lambda) - 1} \left\{ \ln \kappa + 2 \sum_{s \geq 1} (-1)^s K_0\left(s \frac{d}{\lambda}\right) \right\} - 4 \sum_{s \text{ unger.} \geq 1} K_0''\left(s \frac{d}{\lambda}\right) \right. \\ &+ \frac{2\pi}{d} \sum_{n \text{ unger.} \geq 1} \lambda_n \frac{1}{\exp(l/\lambda_n) - 1} \left[- \left(n 2\pi \frac{\lambda}{d} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{\cosh(d/2\lambda) - 1} \left(1 + \frac{l}{\lambda_n} \frac{\exp(l/\lambda_n)}{\exp(l/\lambda_n) - 1} \right) \right] \right. \\ &\left. + \frac{2\pi}{d} \sum_{n \text{ ger.} \geq 2} \lambda_n \frac{1}{\exp(l/\lambda_n) + 1} \left[- \left(n 2\pi \frac{\lambda}{d} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Die *Existenz des Übergangs* von der ($u=0$)-Konfiguration zu einer Konfiguration mit $u \neq 0$ bei kleiner werdendem l kann nun so verstanden werden:

Man kann zeigen, daß von den l -unabhängigen Summanden in der 2. Zeile in Gleichung 2.8 der Summand

$$\mathcal{F} \frac{\ln \kappa}{\cosh(d/2\lambda) - 1}$$

den betraglich größten Beitrag liefert und die anderen gegenüber ihm vernachlässigt werden können. Die dazu notwendigen Abschätzungen laufen im Wesentlichen darauf hinaus, daß im Fall $d > \lambda$ die K_0 - bzw. K_0'' -Summanden sehr schnell abfallen mit d/λ und im Fall $d < \lambda$ der angegebene Summand aufgrund von $\kappa \gg \lambda/d$ (wegen $d \gg \xi$, vgl. Bemerkungen zur London-Gleichung 1.1) dominiert.

Für $l \rightarrow \infty$ (d.h. $l \gg \lambda, d$) gehen alle übrigen Summanden exponentiell gegen 0, so daß

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right|_{u=0} f^u(l \rightarrow \infty) \simeq \mathcal{F} \frac{\ln \kappa}{\cosh(d/2\lambda) - 1} > 0 \quad ,$$

also die ($u=0$)-Konfiguration *stabil* ist.

Für $l \rightarrow 0$ (d.h. $l \ll \lambda, d$) gilt $1/(\exp(l/\lambda_n) + 1) \simeq \frac{1}{2}$ und $1/(\exp(l/\lambda_n) - 1) \simeq \lambda_n/l$ in führender Ordnung, so daß die Summe in der 3. und 4. Zeile von 2.8 den Hauptbeitrag der übrigen Summanden liefert. Weiterhin erhält man bei $l \rightarrow 0$ für den Faktor [...] in dieser Summe $[-(n 2\pi\lambda/d)^2 + 4/(\cosh(d/2\lambda) - 1)]$. Man überprüft leicht, daß $-(n 2\pi\lambda/d)^2$ in diesem Faktor der betraglich größere Summand ist, man also bei $l \rightarrow 0$ nur diesen Anteil zu berücksichtigen braucht. Da dieser $\propto 1/l$, folgt

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right|_{u=0} f^u(l \rightarrow 0) \simeq \mathcal{F} \frac{\ln \kappa}{\cosh(d/2\lambda) - 1} - \mathcal{F} \frac{1}{l} \frac{2\pi}{d} \sum_{n_{ung} \geq 1} (\lambda_n n 2\pi \frac{\lambda}{d})^2 < 0 \quad ,$$

d.h. die ($u=0$)-Konfiguration ist bei $l \rightarrow 0$ *instabil*.

2.2.1 Übergangsabstand l^*

Behält man in einer zunächst etwas grob erscheinenden, sich aber später doch als recht brauchbar erweisenden Approximation nur die beiden Summanden bei, die im Prinzip, wie eben gezeigt, den Übergang vom 1-dimensionalen ($u=0$) zum 2-dimensionalen ($u \neq 0$) Zustand herbeiführen, kann man auch einfache quantitative Angaben machen über den *FL-Abstand* l^* , bei dem der Übergang stattfindet. Er ist dann gegeben durch die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} \Big|_{u=0} f^u(l) \\
&\simeq \mathcal{F} \frac{\ln \kappa}{\cosh(d/2\lambda) - 1} - \mathcal{F} \frac{2\pi}{d} \sum_{n \text{ ung.} \geq 1} \lambda_n \frac{1}{\exp(l^*/\lambda_n) - 1} \left(n 2\pi \frac{\lambda}{d}\right)^2 \\
&\stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \mathcal{F} \frac{\ln \kappa}{\cosh(d/2\lambda) - 1} - \mathcal{F} \frac{2\pi}{d} \sum_{n \text{ ung.} \geq 1} \sum_{m \geq 1} \lambda_n e^{-ml^*/\lambda_n} \left(n 2\pi \frac{\lambda}{d}\right)^2 .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Für $d < \lambda$ konvergiert die n-Summe in 2.9 wegen des exp-Faktors schnell, und man kann sich auf den (n=1)-Summanden beschränken (es war $\lambda_1 = \lambda_{eff} \simeq \min(\lambda, d/\pi) = d/\pi$):

$$0 = \frac{\ln \kappa}{\cosh(d/2\lambda) - 1} - (2\pi)^3 \frac{\lambda^2 \lambda_{eff}}{d^3} \sum_{m \geq 1} e^{-ml^*/\lambda_{eff}} .$$

Behält man nun außerdem nur den (m=1)-Summanden (es zeigt sich, daß dies selbstkonsistent ist, da $l^* > \lambda_{eff}$ sein wird, s.u. 2.10) ergibt sich

$$e^{l^*/\lambda_{eff}} = \frac{\ln \kappa}{(2\pi)^3} \frac{1}{\cosh(d/2\lambda) - 1} \frac{d^3}{\lambda^2 \lambda_{eff}} ,$$

was nach Entwicklung des cosh ($d < \lambda$) und mit $\lambda_{eff} \simeq d/\pi$ zu

$$\boxed{l^* \simeq \lambda_{eff} \ln \left(\frac{\pi^3 d}{\ln \kappa \lambda_{eff}} \right) \simeq d \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{\pi^4}{\ln \kappa} \right)} \tag{2.10}$$

führt. Das bedeutet, daß man im Bereich $d < \lambda$ für Größenordnungen von $\kappa \simeq 10 - 100$ ($\ln \kappa \simeq 3$) die ‘‘Faustregel’’

$$l^* \approx d \tag{2.11}$$

hat.

Für $d \gg \lambda$ kann die n-Summe aus 2.9 näherungsweise in ein Integral umgewandelt werden :

$$\begin{aligned}
-\frac{2\pi}{d} \sum_{n \text{ unger.} \geq 1} \sum_{m \geq 1} \lambda_n e^{-m l^*/\lambda_n} \left(n 2\pi \frac{\lambda}{d}\right)^2 &\simeq \\
&\stackrel{x=n\pi\lambda/d}{\simeq} - \sum_{m \geq 1} \int_0^\infty dx \frac{\exp(-m l^*/\lambda \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} (2x)^2 \\
&= - \sum_{m \geq 1} \frac{4\lambda}{m l^*} K_1\left(\frac{m l^*}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Ist $l^* > \lambda$, konvergiert die Summe schnell und man kann sich auf den (m=1)-Summanden beschränken (die Annahme $l^* > \lambda$ erweist sich wieder als selbstkonsistent, s.u. 2.13). Also bestimmt sich l^* näherungsweise aus

$$\frac{\ln \kappa}{4 \cosh(d/2\lambda) - 1} = \frac{l^*}{\lambda} K_1\left(\frac{l^*}{\lambda}\right) \quad . \quad (2.12)$$

Vergleicht man die beiden exp-Anteile von \cosh und K_1 , die in der Asymptotik $d \gg \lambda$ und $l^* \gg \lambda$ (siehe wieder 2.13) dominieren werden, bekommt man die einfache Beziehung

$$\boxed{l^* \simeq \frac{d}{2}} \quad . \quad (2.13)$$

Die approximativen Beziehungen 2.11 und 2.13 können anhand von exakten von Takács [18] berechneten Werten geprüft werden und zeigen eine recht gute Übereinstimmung.

Zusammenfassend kann man also feststellen, daß die Rechnungen als einfaches Kriterium für die Stabilität der 1-dimensionalen (u=0)-Konfiguration

$$\boxed{l > d} \quad (2.14)$$

liefern. Ist dieses Kriterium erfüllt, ist nach 2.11 bzw. 2.13 die 1-dimensionale Konfiguration stabil. (Dieses Resultat wurde bereits in Kapitel 1.1 auf Seite 8 verwendet, siehe auch Abbildung 1.4.)

Bei der Ableitung der Stabilitätsbedingung 2.14 wurden natürlich einige recht grob erscheinende Approximationen vorgenommen. Die relativ gute Übereinstimmung mit den exakten Resultaten von Takács [18] zeigt aber, daß diese Näherungen qualitativ korrekt waren.

2.2.2 Schermodul-Abschätzung

Mit der Gleichung 2.9 läßt sich im Fall einer stabilen (u=0)-Konfiguration, also etwa für $l > d$ wie wir nun aus dem vorangehenden Kapitel 2.2.1 wissen, eine

Abschätzung für die zur Deformation in y-Richtung (wir sind ja hier in Kapitel 2 von einer periodischen Deformation mit der doppelten Gitterperiode $2l$ ausgegangen) notwendige Energie oder mit anderen Worten für die Größenordnung des *Schermoduls* c_{66} finden.

Einen solchen Schermodul würde man aus der lokalen Elastizitätstheorie (vgl. die Beziehungen auf Seite 18) durch

$$\begin{aligned}\Delta F &= \frac{1}{2} \int d^2r c_{66} (\partial_x u_y)^2 \simeq \frac{1}{2} \frac{Vol}{d} c_{66} \left(\frac{u}{l}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} Vol u^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} f \quad ,\end{aligned}$$

also

$$c_{66} = dl^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} f$$

erhalten, wobei $\frac{\partial^2}{\partial u^2} f$ aus Gleichung 2.9 genommen werden kann. Im Fall einer stabilen 1-dimensionalen ($u=0$)-Konfiguration würde dort der erste Summand dominieren und man hätte als Abschätzung für c_{66}

$$c_{66} \simeq dl^2 \frac{1}{dl} \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{\ln \kappa}{\cosh(d/2\lambda) - 1} = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \frac{l}{\lambda^2} \frac{\ln \kappa}{\cosh(d/2\lambda) - 1} .$$

Wird das System dünn gegenüber der Eindringtiefe gemacht, d.h. $\lambda > d$, kann der cosh entwickelt werden:

$$c_{66} \simeq \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \frac{1}{l} \frac{l^2}{d^2} 8 \ln \kappa$$

Man erkennt, daß c_{66} wegen $c_{66} \propto l/d$ sehr groß wird gegenüber den anderen elastischen Konstanten (vgl. hierzu Ergebnisse aus Kapitel 1.3), wenn die Schicht nur genügend dünn gegenüber dem FL-Abstand ist, also $l \gg d$ gilt. Das bedeutet wiederum, daß in diesem Fall FL-Auslenkungen senkrecht zur Schicht in y-Richtung dann energetisch extrem ungünstig werden und vernachlässigt werden können.

Damit ist gezeigt, daß FL-Gitter in hinreichend dünnen Schichten, was hier solche sein sollen, für die

$$\lambda > d \quad \text{und} \quad l \gg d$$

gilt, sich wie echte 2-dimensionale Systeme verhalten, weil die FL's praktisch nicht senkrecht zur Schicht ausgelenkt werden können. Mit anderen Worten hat eine FL in einem solchen System effektiv nur einen Freiheitsgrad, nämlich eine (longitudinale) x-Auslenkung parallel zur Schicht.

(Dieses Verhalten hinreichend dünner Schichten wurde schon im Kapitel 1.1 auf Seite 11 ausgenutzt, siehe auch Abbildung 1.4.)

Kapitel 3

Vortex-Glas-Phase im Schichtsystem

Die in den letzten Kapiteln näher untersuchte Beschreibung des Flußliniengitters in einer (dünnen) Schicht (mit parallelem Magnetfeld) als elastisches System wird nun benutzt, um die statistischen Eigenschaften dieses Systems in Anwesenheit von (schwacher) *Unordnung* zu untersuchen. Einer Arbeit von Nattermann *et al.* [5] folgend, wird das System nach Mittelung über die Unordnung im Replikalformalismus im wesentlichen auf ein 2-dimensionales XY-Modell im Zufallsfeld (ohne Vortizes) abgebildet, wie es von Cardy und Ostlund [20] betrachtet wird. Der Einfluß von bei dieser Abbildung entstehenden anisotropen Termen wird hier näher untersucht werden.

Es zeigt sich, daß in der Nähe von H_{c1} , d.h. bei *großen* Flußlinienabständen ($l > \lambda$), wenn Unordnung im System vorhanden ist, eine neue Phase, die als *Vortex-Glas-Phase* verstanden werden kann, vorliegt [5]. Diese ist durch ein $\ln L^2$ -Verhalten der Verschiebungskorrelationen (uu-Korrelationen) der Flußlinien gekennzeichnet gegenüber dem reinen Modell, wo die uu-Korrelationen $\propto \ln L$ sind. Hier sollen diese uu-Korrelationen im Rahmen der Renormierungsrechnung von Cardy und Ostlund in Verbindung mit störungstheoretischen Methoden für große Längenskalen L berechnet werden. Im Hinblick auf die durchzuführenden Rechnungen für ein System aus mehreren gekoppelten Schichten im nächsten Kapitel werden die Mittelungen von Verschiebungen u genauer untersucht, die sich in sehr guter Näherung als gaußische Mittelungen mit renormierten Parametern erweisen.

Außerdem wird ein geeigneter Ordnungsparameter für den Übergang zum Vortex-Glas angegeben, der die großen nicht-replikadiagonalen Phasenkorrelationen in der Phase des GL-Ordnungsparameters ausnutzt.

Mithilfe der im ersten Kapitel berechneten elastischen Konstanten, lassen sich nun auch Aussagen über den Bereich *kleinerer* FL-Abstände ($l < \lambda$ bzw. $H_{c1} \ll H_a \ll H_{c2}$) machen. Dort liegt bei Anwesenheit von Unordnung unterhalb einer

Übergangstemperatur T_G ebenfalls die glasartige Phase vor, oberhalb von T_G jedoch eine Phase, die nur durch thermische Fluktuationen gekennzeichnet ist und als Vortex-Flüssigkeit gedeutet werden kann.

Desweiteren kann man sowohl für große als auch kleine FL-Abstände zeigen, daß die Dispersion der elastischen Konstanten, die im ersten Kapitel berechnet wurde, auf die statistische Physik des FL-Gitters keinen Einfluß hat.

3.1 Elastisches Modell mit Unordnung (nahe H_{c1}) und Abbildung auf XY-Modell

In diesem Abschnitt werden die Rechnungen aus [5] noch einmal kurz referiert, die zur Abbildung des Problems eines Flußliniengitters in einer Schicht mit schwacher Unordnung in der Nähe von H_{c1} auf ein 2-dimensionales XY-Modell im Zufallsfeld (ohne Vortizes) notwendig sind.

Das reine Modell ohne Unordnung soll durch einen elastischen Hamiltonian beschrieben werden mit den Auslenkungen $u_m(z)$ in x-Richtung als dynamischen Variablen:

$$\mathcal{H}_{el} = \sum_m \int dz \left\{ \frac{1}{2} l c_{44} \left(\frac{\partial u_m}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} W''(l) (u_{m+1}(z) - u_m)^2 \right\} .$$

Dieser elastische Hamiltonian ist nichts anderes als der *lokale* Grenzfall, d.h.

$$c_{11} = c_{11}(k=0) \quad \text{und} \quad c_{44} = c_{44}(k=0) ,$$

der in Kapitel 1 angegebenen Energie 1.13 nach Rücktransformation in den Ortsraum. Das Wechselwirkungspotential W identifiziert man dann zunächst einmal mit

$$W(x) = \int dz V_{eff}(x, z) = V_{eff}(x, q_z = 0) \quad \text{und} \quad W''(l) = c_{11}/l ,$$

wobei hier aber noch andere Beiträge zu W zu berücksichtigen sein werden als die in Kapitel 1 betrachteten, da wir auf so großen Längenskalen L arbeiten werden, daß die am Ende von Kapitel 1 bereits erwähnten FL-Kollisionen wichtig werden und in der Tat bei den hier betrachteten großen FL-Abständen l in der Nähe von H_{c1} den Hauptbeitrag zu W liefern [5] (siehe Bemerkungen zu Gleichung 3.2 auf Seite 45).

Es sei nochmals daran erinnert, daß die in obigem Hamiltonian zugrundegelegte 1-dimensionale Grundzustandskonfiguration für $l > d$ stabil bleibt (siehe Kapitel 2.2.1) und daß man bei hinreichend dünnen Schichten ($\lambda > d$, $l \gg d$) nach den Ergebnissen von Kapitel 2.2.2 von uniaxialen Auslenkungen in x-Richtung ausgehen kann bei der Formulierung des obigen elastischen Hamiltonians und

Auslenkungen normal zur Schicht nicht berücksichtigen muß.

Auch die Vernachlässigung der Dispersion der elastischen Konstanten bei der Formulierung des elastischen Hamiltonians ist nach den Ergebnissen aus Kapitel 1 zu rechtfertigen für hinreichend dünne Schichten ($d \ll \lambda$). Außerdem wird sich herausstellen, daß für große l die Dispersionsbeziehungen aus Kapitel 1 nicht mehr wichtig sind, da dort wie gesagt die von FL-Kollisionen herrührenden Beiträge zu W dominieren. Dies ist der weitaus wichtigere Grund, der eine Vernachlässigung der Dispersion ermöglicht, denn wir werden weiter unten (siehe Beziehung 3.3 und folgende Bemerkungen auf Seite 45) sehen, daß aufgrund dieser dominierenden “entropischen” Anteile die zu verwendenden elastischen Konstanten *keine Dispersion* mehr aufweisen und sogar unabhängig von c_{11} und c_{44} sind.

Da wir das FL-System in der Nähe von H_{el} untersuchen wollen, also bei großen FL-Abständen l , wobei “groß” immer im Sinne von $l \gg \lambda$ zu verstehen sein soll, könnten dann für c_{11} und c_{44} die Resultate aus Kapitel 1.3, Abschnitt II und IIIa (siehe Seite 22 und 25) verwendet werden. Aus den eben angeführten Gründen werden die konkrete Form von c_{11} und c_{44} aber nicht von Bedeutung sein.

In diesem Sinne ist also eine Herleitung des obigen elastischen Hamiltonians aus der GL-Theorie möglich.

Für diesen Hamiltonian kann die m -Summe (etwa nach Poisson-Summation und unter Vernachlässigung aller höheren Fourier-Komponenten) durch ein Integral approximiert werden. Eine solche Kontinuumsapproximation erscheint sinnvoll, wenn $u_m(z)$ nur schwach über nächste Nachbarn von m variiert. Diese sich nur langsam ändernden Konfigurationen sind aber für die Statistik die relevanten, da sie offensichtlich das größte Boltzmann-Gewicht haben. Mit $ml \rightarrow x$, $u_m(z) \rightarrow u(x, z)$ und einer Umskalierung $z \rightarrow z\sqrt{W''(l)/lc_{44}}$ erhält man dann die symmetrische Form

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{el} &= \int dx \int dz \frac{\Gamma}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ &= \int d^2r \frac{\Gamma}{2} \nabla u \cdot \nabla u \quad \text{mit } \Gamma = \sqrt{W''(l)lc_{44}} \quad . \end{aligned} \quad (3.1)$$

An dieser Stelle soll nochmals auf die elastischen Konstanten zurückgekommen werden, die jetzt aufgrund der Umskalierung durch eine elastische Konstante Γ ersetzt werden konnten, die an dieser Stelle berechnet werden soll, ohne Beiträge zu W zu vernachlässigen, die von FL-Kollisionen herrühren. Diese Beiträge ergeben einen zusätzlichen Summanden in $W''(l)$, der neben dem “magnetischen”

Anteil die sterische Repulsion der FL's beschreibt [5],[25]¹² :

$$W''(l) = c_{11}/l + \frac{\pi^2 T^2}{c_{44} l^5 (1 - \lambda_{col}/l)^2} \quad \text{mit} \quad \lambda_{col} \simeq \lambda_{eff} \simeq \min(\lambda, d/\pi) \ll l \quad (3.2)$$

Für c_{11} bzw. c_{44} sind, wie oben auch bereits erläutert, im hier betrachteten Fall großer FL-Abstände l in der Nähe von H_{c1} die Ergebnisse aus Kapitel 1.3, Abschnitt II und IIIa (siehe Seite 22 und 25) zu verwenden. Danach fällt c_{11} exponentiell mit l ab und kann daher gegenüber dem von der sterischen Repulsion kommenden zweiten Summanden ganz vernachlässigt werden. Betrachtet man kleinere FL-Abstände, ändert sich dies ganz erheblich, was in Kapitel 3.5 noch zu diskutieren sein wird. In dem hier betrachteten Fall großer l erhält man jedoch die Beziehung

$$\Gamma \stackrel{3.1}{=} \sqrt{\frac{\pi^2 T^2}{c_{44} l^5 (1 - \lambda_{col}/l)^2}} l c_{44} = \frac{\pi T}{l^2 (1 - \lambda_{col}/l)} \quad (3.3)$$

Es ist zu beachten, daß in 3.3 keine Abhängigkeit mehr von c_{11} und c_{44} besteht. Dies bedeutet auch, daß Γ im Fall großer FL-Abstände *keine Dispersion* zeigt, was oben schon angesprochen wurde.

Die Wechselwirkung der FL's mit der Unordnung wird beschrieben durch

$$\mathcal{H}_r = \sum_m \int dz V(ml + u_m(z)) \quad .$$

Das *Zufallspotential* V wird dabei als gaußisch angenommen mit verschwindendem Mittelwert und *kurzreichweitigen* Korrelationen

$$[V(x, z)] = 0 \quad \text{und} \quad [V(x, z)V(x', z')] = \Delta \delta_a(z - z')\delta_a(x - x') \quad , \quad (3.4)$$

wobei [...] die Unordnungsmittelung bezeichnet und a die Korrelationslänge der Unordnung bezeichnet (die als kleinste Länge den UV-Cutoff im Impulsraum $\Lambda \sim 1/a$ definieren soll, während $1/L$ mit L als FL-Länge, d.h. Systemausdehnung in z -Richtung, den IR-Cutoff definiert). Man wird dann auf den obigen Hamiltonian geführt, wenn man davon ausgeht, daß alle FL's die gleiche Unordnungskonfiguration "sehen".

Hier soll die gleiche Kontinuumsapproximation wie im elastischen Hamiltonian vorgenommen werden und mittels Poisson-Summation bekommt man

$$\mathcal{H}_r = \int dx \int dz \frac{1}{l} V(x + u(x, z), z) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cos\left(\frac{2\pi}{l} kx\right)\right)$$

¹ $k_B = 1$

²Dieses Ergebnis folgt beispielsweise aus einer Abbildung des FL-Gitters auf die Weltlinien von freien Fermionen, wobei das Pauli-Prinzip die sterische Repulsion ersetzt. Der Faktor $(1 - \lambda_{col}/l)^{-2}$ folgt dabei daraus, daß man die sterische Repulsion nicht erst wirksam wird, wenn sich die FL's am selben Ort befinden, sondern bereits auf Entfernungen $\lambda_{col} \simeq \lambda_{eff} \simeq d/\pi \ll l$ für hinreichend dünne Schichten, wie Fouriertransformation von $W = V_{eff}(x, q_z = 0)$ (siehe etwa [17]) zeigt.

Um später die Unordnungsmittelung durchführen zu können, sollte $\tilde{x} = x + u(x, z)$ substituiert werden. Also ist die Jacobi-Determinante $|\det J_f|(\tilde{x}, \tilde{z})$ für die zu

$$f^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + u(x, z) \\ z \end{pmatrix}$$

gehörige Rücktransformation zu berechnen. Diese rechnet man leicht bis zur $O((\frac{\Delta u}{\Delta x})^2)$ aus:

$$|\det J_f|(\tilde{x}, \tilde{z}) = 1 - \partial_x u(\tilde{x}, \tilde{z}) + u(\tilde{x}, \tilde{z}) \partial_x^2 u(\tilde{x}, \tilde{z}) + (\partial_x u)^2(\tilde{x}, \tilde{z}) + O((\frac{\Delta u}{\Delta x})^3) \quad .$$

Damit bekommt man dann in den führenden Ordnungen der Entwicklung der Jacobi-Determinante und der Poisson-Summation (nachdem (\tilde{x}, \tilde{z}) wieder in (x, z) umbenannt wurden)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_r = \int dz \int dz \frac{1}{l} V(x, z) (1 - \partial_x u + u \partial_x^2 u + (\partial_x u)^2 + \dots) \times \\ \times (1 + 2 \cos(\frac{2\pi}{l}(x - u)) + \dots) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Es wird sich herausstellen, daß die Vernachlässigung der höheren Ordnungen in $(\frac{\Delta u}{\Delta x})$ und der höheren Fourierkomponenten in der Poisson-Summation gerechtfertigt werden kann, da sie sich im replizierten Modell unter dem Renormierungsgruppenfluß als irrelevant gegenüber den führenden Ordnungen erweisen. Dies wird weiter unten genauer begründet werden.

Der gesamte Hamiltonian für das FL-Gitter im Zufallspotential ist dann $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{el} + \mathcal{H}_r$.

Die Mittelung über die Unordnung soll im Replikaformalismus ausgeführt werden, d.h. man führt n Replikas des Systems ein, um in der Freien Energie die Unordnungsmittelung durchzuführen

$$[\ln Z] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{[Z^n] - 1}{n}$$

und läßt am Ende n gegen 0 gehen.

Nach der n -fachen Replizierung des Systems bekommt man³

$$Z^n = \prod_{\gamma=1}^n \int \mathcal{D}u_\gamma \exp \left\{ -\frac{1}{T} \sum_{\alpha=1}^n (\mathcal{H}_{el} + \mathcal{H}_r(V)) \right\} \quad .$$

Nun wird über die Unordnung V gemittelt, wobei \mathcal{H}_{el} nicht von V abhängt, also bei Mittelung über V konstant ist, und \mathcal{H}_r linear ist in V . Da wir V als

³ $k_B = 1$

gaußisch angenommen haben, kann die Mittelung über V dann als Gauß-Integral ausgeführt werden, und wir bekommen unter Verwendung von 3.4

$$[Z^n] = \prod_{\gamma=1}^n \int \mathcal{D}u_\gamma \exp \left\{ -\frac{\Gamma}{2T} \int d^2r \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} \nabla u_\alpha \cdot \nabla u_\beta + \frac{\Delta}{2T^2 l^2} \int d^2r \sum_{\alpha,\beta} (1 - \partial_x u_\alpha + u_\alpha \partial_x^2 u_\alpha + (\partial_x u_\alpha)^2 + \dots) (1 + 2 \cos(\frac{2\pi}{l}(x - u_\alpha)) + \dots) \times \right. \\ \left. \times (1 - \partial_x u_\beta + u_\beta \partial_x^2 u_\beta + (\partial_x u_\beta)^2 + \dots) (1 + 2 \cos(\frac{2\pi}{l}(x - u_\beta)) + \dots) \right\},$$

wobei hier und im folgenden die Replika-Indizes mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden und immer von 1 bis n laufen.

Die in den u ungeraden Summanden in $\{\dots\}$ fallen bei der Funktionalintegration weg und ein konstanter Summand in $\{\dots\}$ kann weggelassen werden. Außerdem sollten Produkte aus cos-Termen und Ableitungen der u zu vernachlässigen sein, da die cos-Terme schnell oszillierende Terme darstellen bei der x -Integration gegenüber den u -Ableitungen, die als langsam veränderlich angesehen werden können (wieder mit dem Argument, daß die schnell veränderlichen u 's aufgrund des elastischen Teils des Hamiltonian sehr viel kleinere Boltzmann-Gewichte haben). Produkte aus cos-Termen können mit Additionstheoremen umgeformt werden. Man erhält dann insgesamt:

$$[Z^n] = \prod_{\gamma=1}^n \int \mathcal{D}u_\gamma \exp \left\{ -\frac{\Gamma}{2T} \int d^2r \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} \nabla u_\alpha \cdot \nabla u_\beta + \frac{\Delta}{2T^2 l^2} \int d^2r \sum_{\alpha,\beta} \left((\partial_x u_\alpha)(\partial_x u_\beta) + (u_\alpha \partial_x^2 u_\alpha) + (\partial_x u_\alpha)^2 + (u_\beta \partial_x^2 u_\beta) + (\partial_x u_\beta)^2 + \mathcal{O}((\frac{\Delta u}{\Delta x})^4) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cos(\frac{2\pi}{l}(u_\alpha - u_\beta)) + 2 \cos(\frac{2\pi}{l}(2x - u_\alpha - u_\beta)) + 2 \cos(\frac{4\pi}{l}..) + \dots \right) \right\}$$

Die letzten 4 Summanden mit u -Ableitungen heben sich nach partieller Integration weg. Desweiteren können die bei der x -Integration schnell oszillierenden cos-Terme vernachlässigt werden:

$$[Z^n] = \prod_{\gamma=1}^n \int \mathcal{D}u_\gamma \exp(-\mathcal{H}_{Rep}) \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{H}_{Rep} = \int d^2r \sum_{\alpha,\beta} \left\{ \frac{K}{2} \delta_{\alpha\beta} \nabla u_\alpha \cdot \nabla u_\beta - \frac{D}{2} \left((\partial_x u_\alpha)(\partial_x u_\beta) + \mathcal{O}((\frac{\Delta u}{\Delta x})^4) \right) - \right. \\ \left. - y_\Delta \left(\cos(p(u_\alpha - u_\beta)) + \cos(2p(u_\alpha - u_\beta)) + \dots \right) \right\},$$

wobei $K := \frac{\Gamma}{T}$, $D := \frac{\Delta}{T^2 l^2} =: y_\Delta$, $p := \frac{2\pi}{l}$.

(3.6)

Man erkennt, daß die Kopplung der FL's an die Unordnung im replizierten unordnungsgemittelten Hamiltonian eine periodische Kopplung zwischen den Replikas induziert hat, indem sie bildlich gesprochen die von den FL-Auslenkungen herrührenden FL-Dichteschwankungen, die durch die \cos -Terme beschrieben werden, in verschiedenen Replikas aneinander koppelt, da alle Replikas dieselbe Unordnung spüren. Dieser Hamiltonian ist bis auf die Anisotropien und die höheren \cos -Terme äquivalent mit dem Replika-Hamiltonian von Cardy und Ostlund [20] für ein 2-dimensionales XY-Modell im Zufallsfeld, wobei u die Rolle der Winkelvariablen spielt. Vortizes müssen in unserem Modell allerdings nicht berücksichtigt werden (sie entsprächen Konfigurationen, in denen FL's "zerschnitten" wären, was physikalisch keinen Sinn macht).

3.2 Renormierungsgruppenfluß

Cardy und Ostlund verwenden in [20] eine Abbildung auf ein Coulomb-Gas, um für 3.6 den Renormierungsgruppenfluß auszurechnen und das Phasendiagramm zu untersuchen. Bevor die RG-Gleichungen näher betrachtet werden, soll jedoch das Scalingverhalten des anisotropen Teils von 3.6 untersucht werden, um die Irrelevanz von Termen mit u -Ableitungen von insgesamt höherer als 4-ter Ordnung zu zeigen.

Bei der Renormierungsgruppenrechnung [20] werden die über eine periodische Funktion gekoppelten u nicht reskaliert; Längen und Impulse skalieren in der üblichen Weise. Dann erhält man durch einfaches Abzählen der Potenzen, in denen die zu reskalierenden Längen auftreten, daß in einem Term der Form

$$\int d^2r \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} D_{2k} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^{2k} \quad (k \geq 1)$$

(zu Beginn ist $D_{2k} = D$ für alle k) die Kopplungskonstante D_{2k} einen Scalingexponenten

$$\lambda_{D,2k} = 2 - 2k$$

hat. Somit sind alle Anisotropieterme mit $k > 1$ irrelevant und nur der quadratische anisotrope Teil, der marginal ist, muß im folgenden mitgenommen werden.

Nun sollen die Renormierungsgleichungen für die \cos -Kopplungen in führender Ordnung betrachtet werden, was die Irrelevanz der höheren \cos -Terme gegenüber dem ersten zeigen soll. Wir wollen also für einen Term der Form

$$\int d^2r \sum_{\alpha,\beta} y_{\Delta,k} (\cos(kp(u_\alpha - u_\beta))) \quad (k \geq 1)$$

(auch hier gilt zu Beginn wieder $y_{\Delta,k} = y_\Delta$ für alle k) den RG-Exponenten für $y_{\Delta,k}$ bestimmen.

Dies geschieht durch Auswertung der rechten Seite in der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial y_{\Delta,k}} \ln [Z^n] = \int d^2r \sum_{\alpha,\beta} \langle \cos (kp(u_\alpha - u_\beta)) \rangle_{\mathcal{H}_{Rep}}$$

in führender Ordnung in den $y_{\Delta,k}$, was bedeutet, daß dann $y_{\Delta,k} = 0$ für alle k gesetzt werden kann bei der Ausführung der Mittelung mit \mathcal{H}_{Rep} , also

$$\frac{\partial}{\partial y_{\Delta,k}} \ln [Z^n] = \int d^2r \sum_{\alpha,\beta} \langle \cos (kp(u_\alpha - u_\beta)) \rangle_{y_{\Delta,k}=0} + \mathcal{O}(y_{\Delta,k}) \quad . \quad (3.7)$$

Wertet man nämlich hier die rechte Seite aus, kann ihr Verhalten unter der RG abgelesen werden und damit aufgrund der Tatsache, daß die Zustandssumme auf der linken Seite invariant unter der RG-Transformation ist, auch die führende Ordnung des RG-Flusses für $y_{\Delta,k}$ auf der rechten Seite, also der RG-Exponent von $y_{\Delta,k}$, bestimmt werden.

Bei der Durchführung der Mittelung mit $y_{\Delta,k} = 0$ für alle k in 3.7 hat man nur noch mit dem elastischen Teil und den quadratischen Anisotropien im Hamiltonian 3.6 gaußisch zu mitteln. Dafür wird der freie Propagator für diesen quadratischen Teil des Hamiltonians benötigt:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^0(q)^{-1} &= Kq^2 \delta_{\alpha\beta} - Dq_x^2 \\ G_{\alpha\beta}^0(q) &= \langle u_\alpha(\vec{q}) u_\beta(-\vec{q}) \rangle_{y_{\Delta,k}=0} \stackrel{C.1}{=} \frac{1}{Kq^2} \delta_{\alpha\beta} + const(\text{bezgl. } \alpha, \beta) \end{aligned}$$

Damit berechnet man unter Ausnutzung der Formel $\langle \cos (pu) \rangle = \exp(-\frac{p^2}{2} \langle u^2 \rangle)$, die bei gaußischen Mittelungen nach dem Wick-Theorem gilt (siehe Anhang C.1, Formel C.9; da über die u nun gaußisch gemittelt werden kann, kann auch über die Differenz zweier u gaußisch gemittelt werden) und der Formel C.3 aus Anhang C.1

$$\begin{aligned} \langle \cos (kp(u_\alpha(\vec{r}) - u_\beta(\vec{r}))) \rangle_{y_{\Delta,k}=0} &\stackrel{C.9}{=} \exp \left(-\frac{k^2 p^2}{2} \langle (u_\alpha(\vec{r}) - u_\beta(\vec{r}))^2 \rangle_{y_{\Delta,k}=0} \right) \\ &\stackrel{s.o.}{=} \exp \left(-\frac{k^2 p^2}{2} \int \frac{d^2q}{4\pi^2} (2G_{\alpha\alpha}^0(q) - 2G_{\alpha\beta}^0(q)) \right) \\ &\stackrel{C.3}{=} \left(\frac{L}{a} \right)^{-\frac{k^2 p^2}{2\pi K}} \quad . \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in 3.7 zeigt, daß die rechte Seite in der Beziehung 3.7 unter dem RG-Fluß entsprechend dem Auftreten von Längenpotenzen skalieren wird. Aus dem Abzählen dieser Potenzen ergibt sich dann die führende Ordnung der RG-Gleichung für $y_{\Delta,k}$ bzw. der RG-Exponent $\lambda_{\Delta,k}$ von $y_{\Delta,k}$ zu

$$\lambda_{\Delta,k} = 2 - \frac{k^2 p^2}{2\pi K} \quad .$$

Man sieht, daß höhere \cos -Terme ($k > 1$) bei Renormierung kleinere Exponenten haben als der erste \cos -Term (mit $k = 1$) und daher irrelevanter sind.

Tatsächlich ist es bei der vorliegenden Realisierung des Hamiltonians 3.6 durch das FL-System in der Nähe von H_{c1} sogar so, daß $\frac{p^2}{2\pi K} \lesssim 2$, was zur Folge hat, daß alle \cos -Terme mit $k > 1$ Exponenten kleiner Null haben und irrelevant sind.

Die Beziehung $\frac{p^2}{2\pi K} \lesssim 2$ erhält man, wenn man in $K = \Gamma/T$ die Beziehung 3.3 einsetzt (und $\lambda_{col} \simeq \lambda_{eff} \ll \lambda$ beachtet):

$$\frac{p^2}{2\pi K} = \frac{2\pi T}{l^2 \Gamma} \stackrel{3.3}{=} 2(1 - \lambda_{col}/l) \lesssim 2 \quad . \quad (3.8)$$

Es ist zu beachten, daß in 3.8 die Temperaturabhängigkeit ganz herausgefallen ist.

Damit ist gezeigt, daß man sich in 3.6 auf einen Replika-Hamiltonian der Form

$$\mathcal{H}_{Rep} = \int d^2r \sum_{\alpha,\beta} \left\{ \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} \nabla u_\alpha \cdot \nabla u_\beta - \frac{D}{2} (\partial_x u_\alpha) (\partial_x u_\beta) - y_\Delta \cos(p(u_\alpha - u_\beta)) \right\} \quad (3.9)$$

beschränken kann bei der Renormierung dieses Replika-Modells.

Der Hamiltonian 3.9 unterscheidet sich nur noch in einem Anisotropie-Term von dem von Cardy und Ostlund (C&O) betrachteten Replika-Hamiltonian für das 2-dimensionale XY-Modell im Zufallsfeld (ohne Vortizes). Nun soll der von C&O hergeleitete RG-Fluß auf dieses System übertragen werden, wobei die Rolle der Anisotropie genauer untersucht werden wird. C&O folgend wurde in 3.9 zunächst einmal $K\delta_{\alpha\beta}$ durch eine Kopplungsmatrix der Form

$$K_{\alpha\beta} = \tilde{K}\delta_{\alpha\beta} + (K - \tilde{K}) = K\delta_{\alpha\beta} + (K - \tilde{K})(1 - \delta_{\alpha\beta})$$

ersetzt, da in den Replika-Indizes nichtdiagonale Terme unter der RG erzeugt werden (zu Anfang gilt $K = \tilde{K}$). Der freie Propagator für die quadratischen Terme in 3.9 lautet nun unter Einbeziehung des anisotropen Summanden

$$G_{\alpha\beta}^0(q)^{-1} = K_{\alpha\beta}q^2 - Dq_x^2$$

$$G_{\alpha\beta}^0(q) \stackrel{C.1}{=} \frac{1}{\tilde{K}q^2} \delta_{\alpha\beta} - \frac{(K - \tilde{K})q^2 - Dq_x^2}{[n(K - \tilde{K})q^2 - nDq_x^2 + \tilde{K}q^2]\tilde{K}q^2} \quad .$$

Am Term $\propto \delta_{\alpha\beta}$ in $G_{\alpha\beta}^0(q)$ ändert sich demnach nichts gegenüber C&O. Dies ist aber der einzige Term, der im bei C&O verwendeten Coulombgas-Formalismus in die Wechselwirkung zwischen den topologischen Ladungen eingeht, wie man leicht verifizieren kann in [20]. Nach der Abbildung auf ein Coulombgas spielt die Anisotropie also keine Rolle mehr, was bedeutet, daß die Anisotropie die RG-Gleichungen für y_Δ und \tilde{K} *nicht* ändern kann. Vielmehr erkennt man an den

obigen Ausdrücken für den Propagator, daß der anisotrope Term in der Kopplungskonstanten K absorbiert werden kann, wenn man die Ersetzung

$$K \rightarrow K - D \frac{q_x^2}{q^2} = K - D \cos^2 \phi \quad (3.10)$$

vornimmt mit einem *Anisotropiewinkel* ϕ mit $\cos \phi = q_x/q$. Für die Größe $K - D \cos^2 \phi$ gilt dann die gleiche RG-Gleichung, die ohne Anisotropie bei C&O für K gilt. Die Kopplungskonstante D der Anisotropie wird demnach zusammen mit der Kopplung K renormiert (dies ist ohne Probleme möglich, da ϕ nicht reskaliert wird). Man hat lediglich zu beachten, daß zu Anfang $K = \tilde{K} + D \cos^2 \phi$ gilt. Die einzige Änderung bei Berücksichtigung des Anisotropieterms gegenüber den Rechnungen von C&O ist dann ein anisotroper Anteil in den unverschobungskorrelationsfunktionen $\langle u_\alpha(\vec{r}) u_\beta(0) \rangle_{n=0}$, die zur Berechnung unordnungsgemittelter Korrelationen $[\langle u^2 \rangle]$ bzw. $[\langle u \rangle^2]$ benötigt werden. Diese anisotrope Korrektur hat aber keinen wesentlichen Einfluß auf die Charakteristika dieser Funktionen, was in Kürze deutlich wird.

Im folgenden soll der Anisotropieterm aus 3.9 durch obige Ersetzung in K beinhaltet sein, so daß nun die RG-Gleichungen von C&O übernommen werden können für den Hamiltonian 3.9. Diese Gleichungen werden durch eine (nur für kleine \tilde{y}_Δ , d.h. für *schwache* Unordnung ganz korrekte) Abbildung auf ein Coulombgas und anschließende Renormierung analog zu Kosterlitz [21] gewonnen ($\tilde{y}_\Delta := y_\Delta a^2 = y_\Delta/\Lambda^2$) :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{K}}{dl} &= \pi p^2 n \tilde{y}_\Delta^2 & \xrightarrow{n \rightarrow 0} & 0 \\ \frac{dK}{dl} &= \pi p^2 (n-1) \tilde{y}_\Delta^2 & \xrightarrow{n \rightarrow 0} & -\pi p^2 \tilde{y}_\Delta^2 \\ \frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}}\right) \tilde{y}_\Delta + 2\pi(n-2)\tilde{y}_\Delta^2 & \xrightarrow{n \rightarrow 0} & \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}}\right) \tilde{y}_\Delta - 4\pi\tilde{y}_\Delta^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Diese Gleichungen besitzen 2 Fixpunkte für \tilde{y}_Δ im für uns interessierenden Limes $n \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_\Delta^* = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{y}_\Delta^* &= \frac{1}{4\pi} \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}}\right) = \frac{1}{4\pi} (2 - \eta) \\ \text{mit} \quad \eta &:= \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} \end{aligned}$$

(Man beachte, daß für $n \rightarrow 0$ \tilde{K} nicht renormiert wird, also $\tilde{K}(l) = \tilde{K}(0) = \tilde{K}$ und damit auch η durch den RG-Fluß ungeändert bleibt.)

Der Fixpunkt $\tilde{y}_\Delta^* = 0$ beschreibt eine Phase ohne Unordnung, während der Fixpunkt $\tilde{y}_\Delta^* = \frac{1}{4\pi}(2 - \eta)$ eine Phase beschreibt, in der die Unordnung relevant ist. (Da die RG-Gleichungen eine Entwicklung in \tilde{y}_Δ darstellen und nur für kleine \tilde{y}_Δ gültig sind, macht der Fixpunkt $\tilde{y}_\Delta^* = \frac{1}{4\pi}(2 - \eta)$ nur für kleine Werte von

$\frac{1}{4\pi}(2 - \eta)$ einen Sinn, was hier im Fall großer FL-Abstände aber aufgrund der Beziehung 3.8 gegeben ist.) Die Phase mit relevanter Unordnung kann als *Vortex-Glas-Phase* verstanden werden, wobei in den folgenden Kapiteln noch geklärt wird, wie diese Phase über die Verschiebungs-(uu-)Korrelationen oder mittels des GL-Ordnungsparameters gekennzeichnet werden kann.

Da bei der hier betrachteten Realisierung des Replika-Hamiltonians 3.9 durch das FL-System mit großen FL-Abständen für den RG-Exponenten λ_Δ von \tilde{y}_Δ immer

$$\lambda_\Delta = 2 - \eta > 0$$

gilt nach 3.8, wird der Fixpunkt $\tilde{y}_\Delta^* = 0$ *immer* instabil, sobald eine schwache Unordnung im System vorhanden ist, und die Unordnung wird relevant. Mit anderen Worten befindet sich das System bei Anwesenheit von schwacher Unordnung in der Nähe von H_{c1} *immer* in der glasartigen Phase, während nur ohne Unordnung eine reine Phase, die nur von thermischen Fluktuationen dominiert wird, vorliegt.

3.3 uu-Korrelationen

Die beiden Phasen des FL-Modells, die reine Phase beim Fehlen von Unordnung und die glasartige Phase bei Anwesenheit schwacher Unordnung, unterscheiden sich durch das Verhalten der uu-Korrelationsfunktionen, also Ausdrücken der Form $\langle u_\alpha(\vec{r})u_\beta(0) \rangle_{n=0}$ bzw. $\langle u_\alpha(\vec{r})u_\beta(\vec{r}) \rangle_{n=0}$ (die mittels $[\langle u^2 \rangle] = \langle u_\alpha^2 \rangle_{n=0}$ und $[\langle u \rangle^2] = \langle u_\alpha u_\beta \rangle_{n=0, \alpha \neq \beta}$ auch durch Unordnungsmittel ausgedrückt werden können).

Um Korrelationen $\langle u_\alpha(\vec{q})u_\beta(-\vec{q}) \rangle_{n=0}$ auszurechnen für den Hamiltonian 3.9, haben Toner und DiVincenzo [24] ein Verfahren benutzt, bei dem der RG-Fluß der Korrelationsfunktion ausgenutzt wird, um kurzweilige Fluktuationen auf Skalen $[a, \frac{1}{q}]$ in den uu-Korrelationen zu berücksichtigen. Hier soll ein ähnliches Verfahren verwendet werden, allerdings wird noch eine störungstheoretische Rechnung in dem Parameter \tilde{y}_Δ^* gemacht, wo Toner und DiVincenzo sich auf die Näherung $\tilde{y}_\Delta^* = 0$ beschränkt haben.

3.3.1 Effektiver Hamiltonian auf Skalen $> 1/q$

Zunächst sei kurz erläutert, wie mithilfe des RG-Flusses 3.11 die uu-Korrelationen berechnet werden sollen. Bei der RG-Transformation wird der Cutoff a im Ortsraum (bzw. Λ im Impulsraum) durch Renormierung der Kopplungen auf ae^δ vergrößert (bzw. auf $\Lambda e^{-\delta}$ verkleinert) und anschließend durch eine Änderung der Längenskala $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}e^{-\delta}$ wieder auf seinen alten Wert reskaliert. Nun soll stattdessen mit *renormierten, aber nicht reskalierten* Größen gearbeitet werden. Das bedeutet, daß der Cutoff sich verändert mit dem RG-Parameter l und einen

Wert Λe^{-l} (im Impulsraum) hat. Außerdem ist die Reskalierung der Kopplungskonstanten in 3.11 wieder “rückgängig” zu machen. Dies geschieht durch die Vorschriften

$$\begin{aligned}\tilde{y}_\Delta(l) &= \tilde{y}_\Delta(l)e^{-2l} \\ \tilde{\tilde{K}}(l) &= \tilde{K}(l) \\ \bar{K}(l) &= K(l) \quad ,\end{aligned}$$

wobei die mit “-” versehenen Größen die renormierten, aber nicht reskalierten Kopplungen darstellen sollen. Die Vorschriften ergeben sich einfach aus den Längenpotenzen, die die verschiedenen Kopplungen im Hamiltonian 3.9 enthalten.

Diese renormierten, unreskalierten Kopplungen kann man sich nun zunutze machen, um eine uu-Korrelation $G_{\alpha\beta}(q) = \langle u_\alpha(\vec{q})u_\beta(-\vec{q}) \rangle_{n=0}$ auszurechnen. Dabei sollen Effekte von der unordnungsinduzierten Wechselwirkung der Replikas berücksichtigt werden, indem Fluktuationen auf Skalen kleiner $1/q$ ausintegriert werden. Diese Ausintegration von Fluktuationen mit Impulsen im Intervall $[q, \Lambda]$ kann aber gerade durch eine Renormierung des Cutoffs Λ auf q erreicht werden (d.h. $l = -\ln(q/\Lambda)$), ohne eine Reskalierung vorzunehmen; dies führt wiederum dazu, daß im Hamiltonian 3.9 renormierte, aber nicht reskalierte Kopplungen $\tilde{y}_\Delta(l)$, $\tilde{\tilde{K}}(l)$ und $\bar{K}(l)$ mit $l = -\ln(q/\Lambda)$ zu verwenden sind bei der Berechnung von $G_{\alpha\beta}(q)$.

Da die Divergenzen von $G_{\alpha\beta}(q)$ für *kleine* q das Verhalten der uu-Korrelationen bestimmen auf den hier interessierenden großen Längenskalen, ist es zweckmäßig, $\tilde{y}_\Delta(l)$, $\tilde{\tilde{K}}(l)$ und $\bar{K}(l)$ in einer für kleine q exakten Näherung durch ihre Asymptotik für große $l = -\ln(q/\Lambda)$ zu ersetzen. \tilde{y}_Δ wird dann seinen Fixpunktwert \tilde{y}_Δ^* erreicht haben. Desweiteren ist aus den RG-Gleichungen 3.11 für $n \rightarrow 0$ ersichtlich, daß \tilde{K} invariant bleibt, also $\tilde{K}(l) = \tilde{K}(0) = \tilde{K}$. Startet man mit den RG-Gleichungen vom Fixpunkt \tilde{y}_Δ^* , erhält man offensichtlich

$$K(l) = K(0) - \pi p^2 \tilde{y}_\Delta^{*2} l \quad ,$$

was auch bei beliebigem Startwert \tilde{y}_Δ die Asymptotik von K richtig wiedergibt bis auf eine additive Konstante K_{as} . An dieser Stelle soll noch einmal auf die Anisotropie eingegangen werden, die ja mit obiger Ersetzung 3.10 in K absorbiert worden ist. Macht man D hier wieder explizit, sieht man leicht, daß D nicht renormiert wird. Der einzige Punkt, an dem sich die Anisotropie hier jedoch zeigt, sind die Anfangsbedingungen $K(0) = \tilde{K} + D \cos^2 \phi$, so daß sich letzten Endes

$$K(l) = \tilde{K} + K_{as} + D \cos^2 \phi - \pi p^2 \tilde{y}_\Delta^{*2} l$$

asymptotisch für K ergibt. Für die reskalierten, aber nicht renormierten Kopplungskonstanten wird demnach im weiteren mit der Asymptotik ($l = -\ln(q/\Lambda)$),

$\cos \phi = q_x/q$)

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_\Delta(q) &= \tilde{y}_\Delta(l) e^{-2l} = \tilde{y}_\Delta^* \frac{q^2}{\Lambda^2} \\
\tilde{K}(q) &= \tilde{K}(l) = \tilde{K} \\
\bar{K}(q) &= K(l) = \tilde{K} + K_{as} + D \frac{q_x^2}{q^2} + \pi p^2 \tilde{y}_\Delta^{*2} \ln(q/\Lambda)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

gerechnet werden.

Unter Ausnutzung des RG-Flusses 3.11 kann man den Hamiltonian 3.9 nun umformulieren zu einem *effektiven, auf Skalen größer $1/q$ gültigen Hamiltonian*, um eine uu-Korrelation $G_{\alpha\beta}(q) = \langle u_\alpha(\vec{q}) u_\beta(-\vec{q}) \rangle_{n=0}$ auszurechnen. Dies geschieht durch Einsetzen der renormierten, nicht reskalierten Kopplungen $\tilde{y}_\Delta(q)$, $\tilde{K}(q)$ und $\bar{K}(q)$ in 3.9 und Einführung des neuen Cutoff q im Impulsraum:

$$\mathcal{H}_{Rep}(q) = \int d^2r \sum_{\alpha,\beta} \left\{ \frac{1}{2} \bar{K}_{\alpha\beta}(q) \nabla u_\alpha \cdot \nabla u_\beta - \Lambda^2 \tilde{y}_\Delta(q) \cos(p(u_\alpha - u_\beta)) \right\} ,$$

wobei

$$\bar{K}_{\alpha\beta}(q) = \tilde{K} \delta_{\alpha\beta} + K_{as} + D \frac{q_x^2}{q^2} + \pi p^2 \tilde{y}_\Delta^{*2} \ln(q/\Lambda) \tag{3.13}$$

Dieser Ausdruck für den effektiven Hamiltonian ist so zu verstehen, daß nach Umschreiben der Ortsraumintegration in eine Impulsraumintegration (durch Fouriertransformation) der Cutoff dieser Integration als q zu wählen ist, wobei auch die verwendeten renormierten, unreskalierten Kopplungen von q abhängen. Der Propagator $G_{\alpha\beta}(q)$ soll ebenfalls für einen Impuls q am Impulsraumcutoff ausgewertet werden, und zwar soll dies mittels Störungstheorie in $\tilde{y}_\Delta(q)$ bzw. \tilde{y}_Δ^* geschehen.

Ersteinmal wird jedoch der “freie”⁴ Propagator $G_{\alpha\beta}^0(q)$ betrachtet, der identisch ist mit dem Resultat, was auch das Verfahren von Toner und DiVincenzo liefert, die sich auf die nullte Ordnung der Störungstheorie in $\tilde{y}_\Delta(q)$ beschränken. $G_{\alpha\beta}^0(q)$ kann aus dem Hamiltonian 3.13 (mit den Formeln C.1,C.2 aus Anhang C.1 und $\eta := \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}}$) als

$$G_{\alpha\beta}^0(q)^{-1} = \left(\tilde{K} \delta_{\alpha\beta} + K_{as} + D \frac{q_x^2}{q^2} + \pi p^2 \tilde{y}_\Delta^{*2} \ln(q/\Lambda) \right) q^2 \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta}^0(q) &= \langle u_\alpha(\vec{q}) u_\beta(-\vec{q}) \rangle_{0,n=0} \\
&\stackrel{n \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\tilde{K} q^2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{K_{as}}{\tilde{K}} - \frac{D}{\tilde{K}} \frac{q_x^2}{q^2} - 2\pi^2 \eta \tilde{y}_\Delta^{*2} \ln(q/\Lambda) \right) \tag{3.15}
\end{aligned}$$

⁴“frei” bedeutet hier nicht, daß die Replikawechselwirkung durch die Unordnung gänzlich unberücksichtigt bleibt; sie geht ja bereits in die Ausdrücke für die renormierten, unreskalierten Kopplungen ein.

$\langle \dots \rangle_0$ bezeichnet Mittelung mit dem quadratischen Teil des Hamiltonian 3.13) erhalten werden. Nach Fouriertransformation bekommt man dann in führender Ordnung folgendes Ergebnis für die uu-Korrelationen (wobei die Formeln C.3–C.8 aus Anhang C.1 verwendet werden):

$$\begin{aligned} \langle u_\alpha(\vec{r})u_\beta(\vec{r}) \rangle_{0,n=0} &= \int \frac{d^2q}{4\pi^2} \langle u_\alpha(\vec{q})u_\beta(-\vec{q}) \rangle_{0,n=0} \\ &= \frac{1}{2\pi\tilde{K}} \left\{ \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{K_{as}}{\tilde{K}} - \frac{D}{2\tilde{K}} \right) \ln\left(\frac{L}{a}\right) + \pi^2\eta\tilde{y}_\Delta^{*2} \ln^2\left(\frac{L}{a}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} &\langle (u_\alpha(\vec{r}) - u_\alpha(0))(u_\beta(\vec{r}) - u_\beta(0)) \rangle_{0,n=0} \\ &= 2 \int \frac{d^2q}{4\pi^2} \langle u_\alpha(\vec{q})u_\beta(-\vec{q}) \rangle_{0,n=0} (1 - \cos(\vec{q}\vec{r})) \\ &= \frac{1}{\pi\tilde{K}} \left\{ \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{K_{as}}{\tilde{K}} - \frac{D}{2\tilde{K}} \right) \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{D}{2\tilde{K}} \frac{x^2}{r^2} + \pi^2\eta\tilde{y}_\Delta^{*2} \ln^2\left(\frac{r}{a}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Der entscheidende Unterschied im Verhalten der uu-Korrelationen in der reinen Phase ($\tilde{y}_\Delta^* = 0$) und in der glasartigen Phase ($\tilde{y}_\Delta^* \neq 0$) liegt im Auftreten des \ln^2 -Terms in der Glas-Phase. Dies bedeutet im wesentlichen, daß in dieser Phase die Wechselwirkung der FL's mit der Unordnung, also etwa mit Punktdefekten, die als Pinningzentren wirken (was mit der Form der Unordnungskorrelationen konsistent wäre), die FL in einen rauheren Zustand als ohne Unordnung zwingt. Dieses Verhalten widerspricht auch nicht der Anschauung, da eine FL etwa in Anwesenheit von Pinningzentren versuchen wird, möglichst viele dieser Defekte zu durchlaufen, um einen energetisch günstigen Zustand einzunehmen; dabei wird die FL eine größere Rauigkeit in Kauf nehmen müssen.

Die Phasen können also durch das Verhalten der uu-Korrelationen auf großen Längenskalen ($\sim L$) charakterisiert werden. Dies bedeutet, daß im Impulsraum das Verhalten des Propagators $G_{\alpha\beta}(q)$ für kleine q (etwa $q \sim 1/L$) interessiert, denn diese Beiträge bestimmen die Ortsabhängigkeit der uu-Korrelationen für große Längen $\sim L$. Dies wird bei der weiteren störungstheoretischen Rechnung von Bedeutung sein.

Auch kann an den obigen Ergebnissen bereits abgelesen werden, daß die Anisotropie diese Charakteristika der uu-Korrelationen nicht wesentlich beeinflusst und weder in der reinen noch in der glasartigen Phase das \ln - bzw. \ln^2 -Verhalten ändert. Die Kopplungskonstante D der Anisotropie modifiziert lediglich den Vorfaktor des \ln -Terms, und es wird in einer Korrelationsfunktion ein zusätzlicher anisotroper x^2/r^2 -Summand erzeugt, der aber auf großen Skalen überhaupt keine Rolle spielt.

3.3.2 Störungstheorie in \tilde{y}_Δ^*

Das Resultat 3.14 bzw. 3.15 für den freien Propagator $G_0(q)$ entspricht, wie wir gesehen haben, einer Rechnung mit dem elastischen, gaußschen Teil des Hamiltonian 3.13 bzw. 3.9 ohne Kopplungen durch die Unordnung, allerdings mit durch die Unordnung renormierten Kopplungskonstanten in diesem elastischen Teil. Eine störungstheoretische Rechnung soll nun dazu dienen, die nötigen Korrekturen durch die vorhandene Unordnungskopplung im effektiven Hamiltonian 3.13 auszurechnen bzw. abzuschätzen, ob sie irrelevant sind.

Um die störungstheoretische Rechnung in der für kleine q kleinen Größe $\tilde{y}_\Delta(q)$ bzw. in \tilde{y}_Δ^* durchzuführen, soll die Dyson-Gleichung für den effektiven Hamiltonian 3.13 betrachtet werden. Es wird sich zeigen, daß aufgrund der Tatsache, daß die Kopplung in der Störung cos-Form hat und dadurch Mittelungen nach Formel C.9 aus dem Anhang C.1 vollständig ausgeführt werden können, die in der Dyson-Gleichung auftretende Selbstenergie⁵ (im Ortsraum) berechnet werden kann.

Die Dyson-Gleichung lautet für den effektiven Hamiltonian 3.13 lautet

$$G_{\alpha\beta}(q)^{-1} = G_{\alpha\beta}^0(q)^{-1} + \Sigma_{\alpha\beta}(q) \quad ,$$

wobei die Selbstenergie $\Sigma_{\alpha\beta}$ im Ortsraum berechnet werden soll. $\Sigma_{\alpha\beta}$ setzt sich zusammen aus $\Sigma_{\alpha\beta} = \Sigma_{\alpha\beta}^1 + \Sigma_{\alpha\beta}^2 + \dots$, wobei $\Sigma_{\alpha\beta}^i$ den Teil der Selbstenergie darstellen soll, der i cos-Wechselwirkungen enthält. Es wird sich zeigen, daß $\Sigma_{\alpha\beta}^1(q)$ noch exakt ausgerechnet werden kann, für die höheren Beiträge ab $i=2$ dies jedoch nicht mehr möglich ist. Die Rechnung für $\Sigma_{\alpha\beta}^2(q)$ soll soweit durchgeführt werden, wie es nötig ist, um die Größenordnung des Beitrags abzuschätzen. Man kann diese Abschätzungen dann relativ problemlos auf beliebige Ordnungen übertragen, ohne noch explizit rechnen zu müssen.

Hier sei noch einmal darauf hingewiesen, daß nur die Beiträge *kleiner* q (etwa $q \sim 1/L$) im Impulsraum interessieren, die ja das charakteristische Verhalten der uu-Korrelationen auf großen Längenskalen bestimmen. Zudem ist immer zum Limes $n \rightarrow 0$ überzugehen im Rahmen des Replika-Formalismus.

Bei der Berechnung der Selbstenergien müssen in den Diagrammen an zwei Stellen externe u-Linien aus den cos-Wechselwirkungsvertizes herausgezogen werden. In diesen cos-Vertizes der Form $\sum_{\gamma,\delta} \int d^2r' \cos(p(u_\gamma(r') - u_\delta(r')))$ treten in der Potenzreihe Glieder

$$\sum_{\gamma,\delta} \int d^2r' u_\gamma(r')^k u_\delta(r')^l$$

auf (bis auf konstanten Faktor). Nach Herausziehen eines $u_\alpha(r)$ bei einem solchen Glied bleibt inklusive des kombinatorischen Faktors für die Auswahl des

⁵der Begriff Selbstenergie ist hier im Sinne einer effektiven Selbstenergie auf Skalen $> 1/q$ zu verstehen und nicht etwa als Selbstenergie des Hamiltonian 3.9; Selbstenergiebeiträge dieses Hamiltonians gehen auch bereits in die renormierten, unreskalierten Kopplungen ein.

herauszuziehenden $u \sum_{\delta} k u_{\alpha}(r)^{k-1} u_{\delta}(r)^l + \sum_{\gamma} u_{\gamma}(r)^k l u_{\alpha}(r)^{l-1}$, was man auch als Ableitung

$$\frac{\delta}{\delta u_{\alpha}(r)} \left(\sum_{\gamma, \delta} \int d^2 r' u_{\gamma}(r')^k u_{\delta}(r')^l \right)$$

schreibt. Überträgt man dieses Resultat wieder auf die gesamte Potenzreihe, kann man also feststellen, daß u -Linien mittels *Ableiten* aus den \cos -Vertizes herausgezogen werden können.

Für Σ^1 kann man dann folgenden Ausdruck in Ortsdarstellung schreiben:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta}^1(r-r') &= \delta(r-r') \Lambda^2 \tilde{y}_{\Delta}^{-}(q) \left\langle \frac{\delta}{\delta u_{\alpha}(r)} \frac{\delta}{\delta u_{\beta}(r)} \sum_{\gamma, \delta} \cos(p(u_{\gamma}(r) - u_{\delta}(r))) \right\rangle_0 \\ &= \delta(r-r') \Lambda^2 \tilde{y}_{\Delta}^{-}(q) 2p^2 \times \\ &\quad \times \left\{ \left\langle \cos(p(u_{\alpha}(r) - u_{\beta}(r))) \right\rangle_0 - \delta_{\alpha\beta} \sum_{\delta} \left\langle \cos(p(u_{\alpha}(r) - u_{\delta}(r))) \right\rangle_0 \right\} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann mithilfe der Formeln aus Anhang C.1 ausgerechnet werden (die Rechnungen sind in Anhang C.2 ausgeführt). Im Limes $n \rightarrow 0$ ergibt sich schließlich:

$$\Sigma_{\alpha\beta}^1(q) \stackrel{n \rightarrow 0}{=} \tilde{y}_{\Delta}^* q^2 (Lq)^{-\eta} 2p^2 \quad (3.18)$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Dyson-Gleichung ein, rechnet man mit Formel C.2 leicht nach, daß man für den Propagator

$$G_{\alpha\beta}(q) \stackrel{n \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\tilde{K} q^2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{K_{as}}{\tilde{K}} - \frac{D q_x^2}{\tilde{K} q^2} - 2\pi^2 \eta \tilde{y}_{\Delta}^{*2} \ln(q/\Lambda) - 4\pi \eta \tilde{y}_{\Delta}^* (Lq)^{-\eta} \right)$$

erhält.

Um die Bedeutung der gefundenen Korrektur abzuschätzen, kann mithilfe dieses Propagators einmal eine uu -Korrelation berechnet werden:

$$\begin{aligned} \langle u_{\alpha}(r) u_{\beta}(r) \rangle_{n=0} &= \int \frac{d^2 q}{4\pi^2} G_{\alpha\beta}(q) \\ &= \langle u_{\alpha}(r) u_{\beta}(r) \rangle_{0, n=0} - \frac{1}{2\pi \tilde{K}} \left\{ 4\pi \eta \tilde{y}_{\Delta}^* \left(\frac{-1}{\eta} \right) \left[\left(\frac{L}{a} \right)^{-\eta} - 1 \right] \right\} \\ &\stackrel{L \gg a}{=} \langle u_{\alpha}(r) u_{\beta}(r) \rangle_{0, n=0} - \frac{2\tilde{y}_{\Delta}^*}{\tilde{K}} \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß wegen $q \geq 1/L$ der Beitrag $(Lq)^{-\eta}$ nicht divergent ist für kleine Impulse q , die hier interessieren. Dies bewirkt, daß sich nur ein auf großen Längenskalen L vernachlässigbarer konstanter Beitrag in den uu -Korrelationen ergibt, denn das Auftreten einer weiteren q -Potenz neben $1/q^2$ hat auch zur Folge, daß (nach der Integration $\int d^2 q$) keine $\ln L$ -Divergenz mehr auftritt.

Es zeigt sich also, daß die Korrekturen von Σ^1 zum Ergebnis $G^0(q)$ in dem uns interessierendem Grenzwert kleiner q bzw. großer Längenskalen nur einen gegenüber $G^0(q)$ vernachlässigbaren Beitrag liefern.

Σ^2 ist der Teil der Selbstenergie, der alle Graphen mit zwei cos-Vertizes enthält. Bei der Berechnung dieses Selbstenergieanteils ist darauf zu achten, daß nur zusammenhängende, 1-Teilchen-irreduzible Graphen zur Selbstenergie beitragen. Daher wird die Rechnung derart durchgeführt, daß zunächst *alle* zusammenhängenden Graphen aufsummiert werden (dieser Teil wird mit σ bezeichnet) und anschließend die zusammenhängenden, 1-Teilchen-reduziblen Graphen (ihr Anteil an der Selbstenergie wird mit ρ^2 bezeichnet) wieder subtrahiert werden. Desweiteren hat man die beiden Möglichkeiten zu berücksichtigen, die externen u-Linien entweder am verschiedenen cos-Vertizes herausziehen (dieser Anteil wird mit $\sigma^{2,1}$ bezeichnet) oder am gleichen cos-Vertex ($\sigma^{2,2}$). Man bekommt also $\Sigma^2 = \sigma^{2,1} + \sigma^{2,2} - \rho^2$. Nun müssen die einzelnen Teile berechnet werden, was wieder in Ortsdarstellung geschehen soll.

Dabei bekommt man für $\sigma^{2,1}$, also den Teil von Σ^2 , bei dem die beiden externen u-Linien an verschiedenen cos-Vertizes herausgezogen werden und der alle zusammenhängenden Diagramme dieser Art inklusive 1-Teilchen-reduziblen Diagrammen enthält, den Ausdruck

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{2,1}(r-r') &= \frac{1}{2!} \Lambda^4 \tilde{y}_\Delta(q)^2 \left[\left\langle \left\{ \frac{\delta}{\delta u_\alpha(r)} \sum_{\gamma,\delta} \cos(p(u_\gamma(r) - u_\delta(r))) \right\} \right\rangle \times \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \frac{\delta}{\delta u_\beta(r')} \sum_{\mu,\nu} \cos(p(u_\mu(r') - u_\nu(r'))) \right\} \right\rangle_0 - \left\langle \left\{ \dots \right\} \right\rangle_0 \left\langle \left\{ \dots \right\} \right\rangle_0 \right] \\ &= \Lambda^4 \tilde{y}_\Delta(q)^2 \sum_{\delta,\nu} 2p^2 \left[\left\langle \sin(p(u_\alpha(r) - u_\delta(r))) \sin(p(u_\beta(r') - u_\nu(r'))) \right\rangle_0 - \right. \\ &\quad \left. - \left\langle \sin(\dots) \right\rangle_0 \left\langle \sin(\dots) \right\rangle_0 \right] \end{aligned}$$

Auch dieser Ausdruck kann weiter ausgerechnet werden unter Verwendung der Formeln aus Anhang C.1 (diese Rechnungen sind in Anhang C.2 durchgeführt), und man erhält hier schließlich

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{2,1}(r-r') &= \tilde{y}_\Delta^*{}^2 q^4 p^2 \sum_{\delta,\nu} \left\{ \delta_{\alpha\delta} + (Lq)^{-\eta} (1 - \delta_{\alpha\delta}) \right\} \left\{ \delta_{\beta\nu} + (Lq)^{-\eta} (1 - \delta_{\beta\nu}) \right\} \times \\ &\quad \times \left[\left\{ (L/(r-r'))^\eta \delta_{\alpha\beta} + (1 - \delta_{\alpha\beta}) \right\} \left\{ (L/(r-r'))^{-\eta} \delta_{\alpha\nu} + (1 - \delta_{\alpha\nu}) \right\} \times \right. \\ &\quad \times \left\{ (L/(r-r'))^{-\eta} \delta_{\beta\delta} + (1 - \delta_{\beta\delta}) \right\} \left\{ (L/(r-r'))^\eta \delta_{\delta\nu} + (1 - \delta_{\delta\nu}) \right\} - \\ &\quad - \left\{ (L/(r-r'))^{-\eta} \delta_{\alpha\beta} + (1 - \delta_{\alpha\beta}) \right\} \left\{ (L/(r-r'))^\eta \delta_{\alpha\nu} + (1 - \delta_{\alpha\nu}) \right\} \times \\ &\quad \times \left. \left\{ (L/(r-r'))^\eta \delta_{\beta\delta} + (1 - \delta_{\beta\delta}) \right\} \left\{ (L/(r-r'))^{-\eta} \delta_{\delta\nu} + (1 - \delta_{\delta\nu}) \right\} \right] \quad (3.19) \end{aligned}$$

An dieser Stelle (auch ohne Fouriertransformation) ist es bereits möglich, die Größenordnung der von $\sigma^{2,1}$ kommenden Korrektur im Vergleich zu G^0 abzuschätzen.

Dies soll wieder für kleine q bzw. auf großen Längenskalen geschehen, da wir in diesen Bereichen das Verhalten der uu-Korrelationen untersuchen wollen. Wie wir bereits für Σ^1 eingesehen haben, werden die Faktoren in obigem Ergebnis, die Terme der Form $(Lq)^{\pm\eta}$ enthalten, keinen wesentlichen Einfluß auf das Verhalten für kleine q haben, da sie wegen $q \geq 1/L$ dort keine Divergenzen erzeugen. Eine analoge Argumentation gilt auch für die Faktoren, die Terme mit $(L/(r-r'))^{\pm\eta}$ enthalten. Auch diese Terme können auf großen Längenskalen, d.h. für große $r-r'$, wegen $r-r' \leq L$ keine divergenten Beiträge liefern. Daher bleibt im wesentlichen eine q^4 -Abhängigkeit von $\sigma^{2,1}$, die bewirkt, daß diese Korrektur gegenüber $G^0(q)^{-1} \propto q^2$, $q^2 \ln q$ zu vernachlässigen ist für kleine q .

Für $\sigma^{2,2}$, also den Teil von Σ^2 , bei dem die beiden externen u-Linien am selben Vertex herausgezogen werden und der alle zusammenhängenden Diagramme dieser Art inklusive 1-Teilchen-reduziblen Diagrammen enthält, kann folgender Ausdruck geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}^{2,2}(r-r') &= \delta(r-r') \frac{1}{2!} \Lambda^4 \tilde{y}_{\Delta}(q)^2 \int d^2\tilde{r} \times \\
&\times \left[\left\langle \left\langle \left\{ \frac{\delta}{\delta u_{\alpha}(r)} \frac{\delta}{\delta u_{\beta}(r)} \sum_{\gamma,\delta} \cos(p(u_{\gamma}(r) - u_{\delta}(r))) \right\} \left\{ \sum_{\mu,\nu} \cos(p(u_{\mu}(\tilde{r}) - u_{\nu}(\tilde{r}))) \right\} \right\rangle \right\rangle_0 \right. \\
&\quad \left. - \left\langle \left\{ \dots \right\} \right\rangle_0 \left\langle \left\{ \dots \right\} \right\rangle_0 \right] \\
&= \delta(r-r') \Lambda^4 \tilde{y}_{\Delta}(q)^2 \int d^2\tilde{r} \sum_{\mu,\nu} p^2 \times \\
&\quad \times \left[\left\langle \left\langle \cos(p(u_{\alpha}(r) - u_{\beta}(r))) \cos(p(u_{\mu}(\tilde{r}) - u_{\nu}(\tilde{r}))) \right\rangle \right\rangle_0 - \right. \\
&\quad \left. - \delta_{\alpha\beta} \sum_{\delta} \left\langle \cos(p(u_{\alpha}(r) - u_{\delta}(r))) \cos(p(u_{\mu}(\tilde{r}) - u_{\nu}(\tilde{r}))) \right\rangle_0 \right\} - \\
&\quad \left. - \left\{ \left\langle \cos(\dots) \right\rangle_0 - \delta_{\alpha\beta} \sum_{\delta} \left\langle \cos(\dots) \right\rangle_0 \right\} \right]
\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Hamiltonian 3.13 ist klar, daß das Resultat der $\langle \cos \cos \rangle$ -Mittelungen wieder eine Form $a\delta_{\alpha\beta} + b$ bzw. $a\delta_{\alpha\delta} + b$ annehmen wird nach Summation über μ, ν (siehe vorige Rechnungen). Dann verifiziert man leicht, daß im Limes $n \rightarrow 0$ in dem ersten $\{\dots\}$ -geklammerten Teil lediglich ein b unabhängig von α und β bleibt. Auch die $\langle \cos \rangle$ -Mittelungen werden eine Form wie oben annehmen, und man sieht leicht, daß daher im Limes $n \rightarrow 0$ nach Summation über μ, ν der zweite $\{\dots\}$ -geklammerten Teil verschwindet. Daher kann man obigen Ausdruck einfacher schreiben als

$$\sigma_{\alpha\beta}^{2,2}(r-r') = \Lambda^4 \tilde{y}_{\Delta}(q)^2 \int d^2\tilde{r} \sum_{\mu,\nu} p^2 \times$$

$$\times \left\langle \left\langle \cos(p(u_1(r) - u_2(r))) \cos(p(u_\mu(\tilde{r}) - u_\nu(\tilde{r}))) \right\rangle_0 \right\rangle$$

Die $\langle \cos \cos \rangle$ -Mittelungen können genauso wie bei der Berechnung von $\sigma^{2,1}$ die entsprechenden $\langle \sin \sin \rangle$ -Mittelungen durchgeführt werden und werden zu Termen führen analog denen in dem Ausdruck 3.19 für $\sigma^{2,1}$. Die Integration $\int d^2\tilde{r}$ wird für große L im wesentlichen einen Faktor L^2 erzeugen, so daß man sich leicht überzeugt, im Prinzip einen Beitrag zu bekommen, der die Gestalt

$$\sigma_{\alpha\beta}^{2,2}(q) = \sigma^{2,2}(q) = \tilde{y}_\Delta^* q^2 (Lq)^2 \times \dots$$

haben wird (neben den ausgeschriebenen Faktoren können nur noch (Lq) -Potenzen auftreten, die für unsere Betrachtungen aber keine Rolle spielen). Dieser Beitrag ist demnach ähnlich gebaut wie der Ausdruck 3.18 für Σ^1 . Er enthält neben dem $1/q^2$ -Faktor einen $(Lq)^2$ -Faktor, der selber wegen $q \geq 1/L$ keine divergenten Beiträge liefern kann, allerdings das Auftreten einer $\ln L$ -Divergenz in der uu-Korrelation verhindern wird (im Ausdruck für $G_{\alpha\beta}(q)$ ergibt $\sigma^{2,2}$ nach Matrixinversion für $n \rightarrow 0$ einen Beitrag $\propto q^{-2} (Lq)^{-2}$, der bei Integration $\int d^2q$ keine $\ln L$ -Divergenz ergibt aufgrund des zweiten Faktors, der ebenfalls eine q -Potenz enthält). Daher ist es möglich, völlig analog wie dort zu dem Schluß zu kommen, daß auch die Korrekturen durch $\sigma^{2,2}$ bei kleinen q oder großen Längenskalen zu vernachlässigen sind gegenüber $G^0(q)$.

Es bleibt noch der Beitrag ρ^2 zu Σ^2 zu untersuchen, der aus allen zusammenhängenden 1-Teilchen-reduziblen Diagrammen besteht. In solchen Diagrammen tritt eine isolierte Propagator-Linie auf, die allein zwei Teile des Diagramms verbindet. Offensichtlich sind diese zwei Teile ihrerseits Selbstenergien Σ^1 für je einen cos-Vertex. Daher bekommt man

$$\rho_{\alpha\beta}^2(q) = \sum_{\gamma,\delta} \Sigma_{\alpha\gamma}^1(q) G_{\gamma\delta}^0(q) \Sigma_{\delta\beta}^1(q) \quad .$$

Da aber $\Sigma_{\alpha\beta}^1(q)$ indexunabhängig war (siehe 3.18), ergeben sich nach den Indexsummationen nur Beiträge, die Faktoren n enthalten und damit im Limes $n \rightarrow 0$ verschwinden. Demnach gilt

$$\rho_{\alpha\beta}^2(q) \stackrel{n \rightarrow 0}{=} 0 \quad .$$

Die obigen Rechnungen und Argumentationen für Σ^2 lassen sich sofort auf höhere Selbstenergiebeiträge Σ^i verallgemeinern. Auch dort werden die obigen drei Typen von Diagrammen zu berücksichtigen sein. Jeder Selbstenergiebeitrag setzt sich zusammen aus $\Sigma^i = \sigma^{i,1} + \sigma^{i,2} - \rho^i$, wobei $\sigma^{i,1}$ (bzw. $\sigma^{i,2}$) wieder den Beitrag aller zusammenhängenden Diagramme bezeichnet, wo die externen u-Linien aus verschiedenen (bzw. gleichen) cos-Vertizes herausgezogen werden, von denen noch der Anteil ρ^i der zusammenhängenden 1-Teilchen-reduziblen Diagramme

subtrahiert wird. Man kann sich nun leicht überzeugen, daß auch diese höheren Selbstenergiebeiträge für $i \geq 3$ im Prinzip die gleiche Form wie für $i = 2$ besitzen (die zusätzlich auftretenden cos-Vertizes mit entsprechenden Replikasummen und Integrationen ändern daran nichts Wesentliches):

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}^{i,1}(q) &= \tilde{y}_{\Delta}^{*i} q^4 \times \dots_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta}^{i,2}(q) &= \sigma^{i,2}(q) = \tilde{y}_{\Delta}^{*i} q^2 (Lq)^2 \times \dots \\ \rho_{\alpha\beta}^i(q) &= \sum_{j<i} \sum_{\gamma,\delta} \sigma_{\alpha\gamma}^{j,2}(q) G_{\gamma\delta}^0(q) \sigma_{\delta\beta}^{i-j,2}(q) \stackrel{n \rightarrow 0}{=} 0\end{aligned}$$

Und genauso wie für Σ^2 sieht man auch hier ein, daß diese Selbstenergiekorrekturen zu $G^0(q)$ für kleine q bzw. auf großen Längenskalen vernachlässigbar gegenüber $G^0(q)$ sind.

Nach all diesen störungstheoretischen Betrachtungen gewinnt man also folgende Resultate: Für kleine Impulse q oder äquivalent dazu große Längenskalen L sind bei der Berechnung von $G_{\alpha\beta}(q) = \langle u_{\alpha}(\vec{q}) u_{\beta}(-\vec{q}) \rangle_{n=0}$ die Korrekturen zu $G^0(q)$ durch die Selbstenergiebeiträge $\Sigma(q)$ in der Dyson-Gleichung zu vernachlässigen. Dabei werden $G^0(q)$ und $\Sigma(q)$ aus dem effektiven Hamiltonian 3.13 für Längenskalen größer $1/q$ gewonnen, der gemäß C&O renormierte, unreskalierte Kopplungen 3.12 enthält.

Das bedeutet, daß im weiteren mit dem Resultat 3.15

$$G_{\alpha\beta}(q) = G_{\alpha\beta}^0(q) = \frac{1}{\tilde{K} q^2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{K_{as}}{\tilde{K}} - \frac{D q_x^2}{\tilde{K} q^2} - 2\pi^2 \eta \tilde{y}_{\Delta}^{*2} \ln(q/\Lambda) \right)$$

gerechnet werden kann, was mit dem Ergebnis von Toner und DiVincenzo [24] übereinstimmt und exakt wird im thermodynamischen Limes $L \rightarrow \infty$. Dies ist gleichbedeutend damit, nur den elastischen, gaußschen Teil des Hamiltonian 3.13 bzw. 3.9 zu berücksichtigen, aber mit renormierten, unreskalierten Kopplungen.

Zum Schluß dieses Abschnitts soll noch die Frage untersucht werden, ob Mittelungen mit dem Hamiltonian 3.9 über Produkte aus einer beliebigen Anzahl u 's sich ebenso wie der Propagator gaußisch mit renormierten, unreskalierten Kopplungen verhalten. Dies geschieht vor allem im Hinblick auf das nächste Kapitel 4.1, wo noch eine weitere Kopplung zwischen u 's hinzutritt. Insbesondere soll hier diskutiert werden, ob das Wick-Theorem noch gilt, daß ja für gaußsche Mittelungen anzuwenden wäre.

Bei der Berechnung von Mittelwerten von Produkten aus etwa k u -Faktoren ist im Prinzip zunächst der Vertex-Teil der Diagramme auszurechnen, der k u -Faktoren koppelt. Dabei wird man Mittelungen über cos-Wechselwirkungsvertizices ähnlich denen bei der Berechnung des Propagators durchzuführen haben mit dem Unterschied, daß nun statt zwei u -Linien k u -Linien aus dem Diagramm herauszuziehen sind (was wieder durch Ableiten geschehen kann). Diagramme aus

diesem Vertex-Teil und k Propagator-Linien sind dann zu vergleichen mit Resultaten, die die Anwendung des Wick-Theorems liefern würde, also dem Produkt von $k/2$ Propagator-Linien für gerades k bzw. 0 für ungerades k . Im Lichte der obigen Erkenntnisse bei der Berechnung des Propagators gelangt man dann zu der Einsicht, daß analoge Mechanismen wie die oben geschilderten dazu führen, daß diese Vertex-Teil-Diagramme auf großen Längenskalen L bzw. bei kleinen (äußeren) Impulsen zu vernachlässigen sind.

Fazit dieses Abschnitts ist also, daß es auf den für die Charakterisierung der Glas-Phase zu betrachtenden großen Längenskalen L möglich ist, mit dem elastischen, gaußschen Teil des effektiven Replikahamiltonians 3.13 zu rechnen ohne Unordnungskopplung. Es reicht aus, die Effekte von der Unordnungskopplung in den im Hamiltonian verwendeten gemäß C&O renormierten, unreskalierten Kopplungen zu berücksichtigen. Alle Ergebnisse stimmen dann auf großen Längenskalen bis auf zu vernachlässigende Korrekturen mit denen einer gaußschen Rechnung überein, auch das Wick-Theorem für gaußsche Mittelungen ist in diesem Rahmen gültig. Für den Propagator $G_{\alpha\beta}(q)$ und die aus ihm im Limes $n \rightarrow 0$ zu berechnenden uu-Korrelationen bleiben die am Ende des letzten Kapitels 3.3.1 erhaltenen Ergebnisse 3.15–3.17 insoweit korrekt. Im thermodynamischen Limes $L \rightarrow \infty$ sind diese Ergebnisse sogar exakt.

3.4 Ordnungsparameter für die Glas-Phase

Nun ist ein Punkt erreicht, wo die Berechnung der uu-Korrelationen abgeschlossen ist und sich herausgestellt hat, daß diese Korrelationen die Vortex-Glas-Phase bzw. die reine Phase kennzeichnen. Hier soll nun ein geeigneter Ordnungsparameter angegeben werden, der die Glas-Phase charakterisieren und durch den Ginzburg-Landau-Ordnungsparameter ψ ausgedrückt werden kann.

Dazu ist zunächst zu klären, wie der GL-Ordnungsparameter $\psi(x, z)$ für die Schicht aus den FL-Verschiebungen $u(x, z)$ bzw. $u_n(z)$ bestimmt werden kann. Rechnet man im London-Limes $\lambda \gg \xi$, ist die Ausdehnung der Flußschläuche, die ungefähr ξ beträgt, sehr klein. Dann hat der (normierte) GL-Ordnungsparameter überall in der Schicht nahezu den Betrag 1, und die Anwesenheit von Flußlinien nimmt lediglich Einfluß auf die Phase von ψ . Und zwar soll hier die Phase näherungsweise dadurch bestimmt werden, daß einfach zugrundegelegt wird, daß an jeder Flußlinie die Phase von ψ um π springen wird, wenn man entlang der x-Achse, auf der die Kette von FL's ja liegt, fortschreitet. Ist die Position der n-ten FL also $nl + u_n(z) = \tilde{x}(z)$, wird die Phase am Punkt $\tilde{x}(z)$ danach $n\pi$ betragen. Geht man mit $nl \rightarrow x$, $u_n(z) \rightarrow u(x, z)$ wieder zu einer Kontinuumsbeschreibung über, bedeutet das, daß für die Phase $\Theta(\tilde{x}(z))$ am Ort $\tilde{x}(z) = x + u(x, z)$ die Beziehung $\Theta(\tilde{x}(z)) = \pi x/l$ gilt. Nach Umkehrung der Beziehung zwischen x und

$\tilde{x}(z)$ bekommt man dann in der ersten Ordnung in den Auslenkungen u

$$\Theta(\tilde{x}, z) = \frac{\pi}{l}(\tilde{x} - u(\tilde{x}, z))$$

und damit für den GL-Ordnungsparameter den Ausdruck (es war $p = 2\pi/l$)

$$\psi(x, z) = \exp(i\Theta(x, z)) = \exp(i\frac{p}{2}x) \exp(-i\frac{p}{2}u(x, z)) \quad .$$

Nach 3.16 zeigen sich in der Glas-Phase starke nicht-replikadiagonale uu-Korrelationen gegenüber der reinen Phase, was aufgrund der obigen Beziehung auch auf die Phasenkorrelationen der Phase des GL-Ordnungsparameters übertragen werden kann; diese zeigt ebenfalls große nicht-replikadiagonale Korrelationen auf großen Skalen. Daher kann man auch in dem in [2] und [7] dargelegten Sinne von einer Vortex-Glas-Phase sprechen, die dort über das Auftreten von Korrelationen dieser Art charakterisiert wird.

Mit obiger Beziehung und den uu-Korrelationen 3.16, die im letzten Kapitel bestimmt wurden, können wir nun eine geeignete eichinvariante Größe finden, die die Glas-Phase gegenüber der reinen Phase charakterisiert. Dazu sollen gerade die großen nicht-replikadiagonalen uu-Korrelationen ausgenutzt werden; daher ist es zweckmäßig, folgende Größe zu betrachten (da nur Produkte $\psi\psi^*$ auftauchen, ist die angegebene Größe mit diesen Produkten *eichinvariant*):

$$\begin{aligned} \frac{\langle \psi_\alpha(\vec{r}) \rangle \langle \psi_\beta^*(\vec{r}) \rangle}{\langle \psi_\alpha(\vec{r}) \psi_\beta^*(\vec{r}) \rangle}_{\alpha \neq \beta, n \rightarrow 0} &\stackrel{C.9, C.10}{=} \exp\left(-\frac{p^2}{2} \langle u_\alpha(\vec{r}) u_\beta(\vec{r}) \rangle_{n=0}\right) \\ &\stackrel{3.16}{=} \left(\frac{L}{a}\right)^{-\pi^2 \eta \tilde{y}_\Delta^* \ln(L/a)} \\ &\stackrel{L \gg a}{=} \begin{cases} 0 & \text{Glas-Ph. } (\tilde{y}_\Delta^* > 0) \\ 1 & \text{reine Ph. } (\tilde{y}_\Delta^* = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Diese eichinvariante Größe bzw. der Ausdruck

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\langle \psi_\alpha(\vec{r}) \rangle \langle \psi_\beta^*(\vec{r}) \rangle}{\langle \psi_\alpha(\vec{r}) \psi_\beta^*(\vec{r}) \rangle}_{\alpha \neq \beta, n \rightarrow 0} &= \frac{\langle \psi_\alpha(\vec{r}) \psi_\beta^*(\vec{r}) \rangle - \langle \psi_\alpha(\vec{r}) \rangle \langle \psi_\beta^*(\vec{r}) \rangle}{\langle \psi_\alpha(\vec{r}) \psi_\beta^*(\vec{r}) \rangle}_{\alpha \neq \beta, n \rightarrow 0} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{Glas-Ph. } (\tilde{y}_\Delta^* > 0) \\ 0 & \text{reine Ph. } (\tilde{y}_\Delta^* = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

kann als geeigneter Ordnungsparameter angesehen werden, der den Übergang von der reinen zur Glasphase beschreibt. Man kann diesen Ordnungsparameter auch durch Unordnungsmittelungen ausdrücken in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} \frac{||[\langle \psi \rangle]|^2}{||\langle \psi \rangle|^2} &= \frac{\langle \psi_\alpha(\vec{r}) \rangle \langle \psi_\beta^*(\vec{r}) \rangle}{\langle \psi_\alpha(\vec{r}) \psi_\beta^*(\vec{r}) \rangle}_{\alpha \neq \beta, n \rightarrow 0} && \text{bzw.} \\ \frac{||\langle \psi \rangle|^2 - ||[\langle \psi \rangle]|^2}{||\langle \psi \rangle|^2} &= 1 - \frac{\langle \psi_\alpha(\vec{r}) \rangle \langle \psi_\beta^*(\vec{r}) \rangle}{\langle \psi_\alpha(\vec{r}) \psi_\beta^*(\vec{r}) \rangle}_{\alpha \neq \beta, n \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Ähnliche Größen werden auch in [2] und [7] zur Charakterisierung einer Vortex-Glas-Phase herangezogen. Ein wesentliches Kennzeichen der vorgeschlagenen Ordnungsparameter besteht darin, daß die großen nicht-replikadiagonalen Korrelationen in der Phase Θ des GL-Ordnungsparameters ausgenutzt werden zur Charakterisierung der Glas-Phase.

3.5 Elastisches Modell mit Unordnung für

$$H_{c1} \ll H_a \ll H_{c2}$$

Völlig analog zu Kapitel 3.1 ist es auch im Fall kleinerer FL-Abstände, also etwa im Bereich $H_{c1} \ll H_a \ll H_{c2}$ möglich, das elastische Modell für das FL-Gitter mit Unordnung in der Schicht auf ein XY-Modell im Zufallsfeld (ohne Vortizes) abzubilden. Im Fall kleinerer FL-Abstände l (wobei “klein” wieder $l \ll \lambda$ meint) ist allerdings darauf zu achten, daß l groß genug sein muß, die Stabilität der 1-dimensionalen Konfiguration des FL-Gitters, die bei dieser Abbildung zugrundegelegt wurde, gegenüber der Ausbildung einer 2-dimensionalen Überstruktur zu gewährleisten. Nach den Ergebnissen aus Kapitel 2.2.1 ist dies gegeben, wenn $l > d$ bleibt. Außerdem muß l groß genug gegenüber d sein, um sich auch weiterhin auf uniaxiale Auslenkungen in x-Richtung beschränken zu können (siehe Kapitel 2.2.2).

Bei der Abbildung, wie sie in Kapitel 3.1 vorgenommen wurde, ändern sich zunächst einmal die elastischen Konstanten, die zu verwenden sind. Da nun der Bereich $d < l \ll \lambda$ untersucht werden soll, sind für c_{11} und c_{44} die Resultate aus Kapitel 1.3, Abschnitt I einzusetzen (Gleichung 1.18). Auch hier stellt man fest, daß die elastischen Konstanten in 1.18 *keine Dispersion* zeigen, so daß auch hier die Dispersion bei der Formulierung des elastischen Hamiltonian nicht berücksichtigt werden muß, wie dies schon im Kapitel 3.1 der Fall war.

Einen bei weitem größeren Einfluß auf die Ergebnisse hat aber die Tatsache, daß man im hier betrachteten Bereich großer FL-Dichte nicht mehr von sterischer Repulsion sprechen kann, die in Kapitel 3.1 noch den Hauptbeitrag im Ausdruck 3.2 für $W''(l)$ lieferte. Bei dieser Wahl der Parameter überlappen sich nämlich die Magnetfelder von Nachbar- FL's stark und daher sind Kollisionen in diesem Sinne bereits eingeschlossen im “magnetischen” Anteil der elastischen Konstanten, wie er in Kapitel 1.3 berechnet wurde. Es ist aus diesem Grund hier nicht mehr möglich, Effekte thermischer Fluktuationen auf dem einfachen Weg über die sterische Repulsion einzubeziehen in die elastischen Konstanten. Hier sollen aus diesem Grund in der einfachsten Näherung alle Effekte thermischer Fluktuationen auf die elastischen Konstanten vernachlässigt werden und ausschließlich mit dem “magnetischen” Beitrag aus Kapitel 1.3, Abschnitt I (Gleichung 1.18) gerechnet werden.

Bei der Berechnung des Exponenten $\lambda_\Delta = 2 - \eta = 2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}}$ der Unordnungskopplung \tilde{y}_Δ (siehe RG-Gleichungen 3.11) bekommt man damit aus den eben genannten Gründen andere Ergebnisse als im Kapitel 3.2. Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke 1.18 für $c(11) = c(44)$ liefert nun folgendes Resultat für den Exponenten der Unordnungskopplung:

$$\begin{aligned} \Gamma &= c_{11} = c_{44} \\ \lambda_\Delta &= 2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} \stackrel{3.1,3.6}{=} 2 - \frac{2\pi T}{c_{11} l^2} \stackrel{1.18}{=} 2 - \left(\frac{4\pi\lambda}{\phi_0}\right)^2 \frac{2}{d} T \end{aligned} \quad (3.20)$$

Das bedeutet, daß hier im Gegensatz zum in Kapitel 3.2 betrachteten Fall großer FL-Abstände hier nicht in jedem Fall $\lambda_\Delta = 2 - \eta > 0$ gilt. Vielmehr ist der Exponent nur unterhalb der Temperatur von

$$T_G = \frac{c_{11} l^2}{\pi} = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 d \quad (3.21)$$

⁶ größer 0 (bei der Rechnung wurde die Temperaturabhängigkeit von λ vernachlässigt, was für $T_G/T_c \ll 1$ zu rechtfertigen ist), so daß man dort wieder eine Vortex-Glas-artige Phase mit $\tilde{y}_\Delta^* = \frac{1}{4\pi}(2 - \eta) > 0$ erhält, in der die Unordnung relevant ist und uu-Korrelationen mit einem $\ln^2 L$ -Verhalten auftreten. Oberhalb der Temperatur T_G bekommt man jedoch einen Exponenten kleiner 0, was bedeutet, daß dann die Unordnung irrelevant wird und eine Phase mit $\tilde{y}_\Delta^* = 0$ vorliegt, die von den thermischen Fluktuationen bestimmt wird und uu-Korrelationen zeigt, die mit $\ln L$ divergieren. Diese Phase kann als *Vortex-Flüssigkeit* gedeutet werden, da hier die thermischen Fluktuationen gemäß Beziehung 3.16

$$\begin{aligned} [\langle u(\vec{r})^2 \rangle] &= \langle u_\alpha(\vec{r}) u_\alpha(\vec{r}) \rangle_{0,n=0} \\ &= \frac{1}{2\pi\tilde{K}} \left(1 - \frac{K_{as}}{\tilde{K}} - \frac{D}{2\tilde{K}}\right) \ln\left(\frac{L}{a}\right) \end{aligned}$$

noch logarithmisch divergieren und etwa das Lindemann-Kriterium

$$[\langle u^2 \rangle] \geq c_L^2 l^2 \quad \text{mit der Lindemann-Zahl } c_L \approx 0,1-0,3$$

für das Schmelzen des Gitters verletzen für große L . Diese großen Fluktuationen sind typisch für ein 2-dimensionales System, wie es hier betrachtet wird.

Die Beziehung 3.21 für eine Übergangstemperatur vom Vortex-Glas zur Vortex-Flüssigkeit im Bereich $H_{c1} \ll H_a \ll H_{c2}$ gilt aber mit der Einschränkung, daß thermische Fluktuationen der elastischen Konstanten vernachlässigt wurden

⁶man kann nachrechnen, daß nur für Hoch- T_c Supraleiter wie $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ T_G unterhalb von T_c liegen wird bei realistischen Werten für d (es ist zu beachten, daß für einen Hoch- T_c Supraleiter aufgrund seiner Anisotropie in 3.21 λ^2 durch $\lambda_{ab}\lambda_c$ zu ersetzen ist).

(s.o.). Sie kann daher nur als eine erste Näherung angesehen werden, stellt aber trotzdem einen starken Hinweis auf die Existenz eines solchen Übergangs dar. Außerdem zeigt Gleichung 3.21, daß T_G proportional zur Schichtdicke d ist. Dies spiegelt wider, daß das FL-Gitter für dünne Schichten “weicher” wird, wie man im Kapitel 1 sehen konnte. Dadurch werden thermische Fluktuationen bei dünneren Schichten eher wichtig als bei dickeren, was sich wiederum im Resultat $T_G \propto d$ niederschlägt.

3.6 Zusammenfassung

Die Ergebnisse dieses Kapitels bei der Untersuchung des elastischen Modells eines FL-Gitters in einer Schicht mit Unordnung können wie folgt zusammengefaßt werden:

- Wir haben für die beiden Fälle
 1. l groß, d.h. $l \gg \lambda$, bzw. in der Nähe von H_{c1}
 2. l klein, d.h. $l \ll \lambda$, oder $H_{c1} \ll H_a \ll H_{c2}$

die Existenz von verschiedenen Phasen im Hinblick auf die Unordnung untersucht. Dabei ergab sich im 1.Fall, daß sich das System *immer* in einer Vortex-Glas-Phase (mit relevanter Unordnung) befindet, wenn schwache Unordnung vorhanden ist. Im 2.Fall ist dagegen das System nur unterhalb einer *Übergangstemperatur* T_G im Vortex-Glas-Zustand und oberhalb von T_G in einem Zustand, der als Vortex-Flüssigkeit gedeutet werden kann (Unordnung ist dort irrelevant).

Dies legt bei Anwesenheit schwacher Unordnung ein Phasendiagramm in der H-T-Ebene nahe, ähnlich dem, das Nelson und Le Doussal [4] angegeben haben für dreidimensionale Hoch- T_c -Supraleiter mit Unordnung (siehe Abbildung 3.1). Das System nimmt oberhalb der Meißner-Phase die Zustände eines Vortex-Glases oder einer Vortex-Flüssigkeit (Unordnung irrelevant) ein. Dabei schließt sich unmittelbar oberhalb der Meißner-Phase ein Streifen mit der Glas-Phase an (1.Fall) und im Bereich $H_{c1} \ll H_a \ll H_{c2}$ erhält man eine sehr steile, nach obigen Ergebnissen sogar senkrechte, Phasengrenze $T = T_G$ zwischen der Glas- und der Flüssigphase (2.Fall). Diese Phasengrenze bei einer festen Temperatur T_G ist jedoch nur als erste Näherung anzusehen, da thermische Fluktuationseffekte in den elastischen Konstanten dort unberücksichtigt blieben. Die im Phasendiagramm in Abbildung 3.1 schraffierten Bereiche sind diejenigen, für die die Resultate aus diesem Kapitel die Existenz einer Vortex-Glas-Phase ergeben.

- Die beiden Phasen sind durch das in Kapitel 3.3 ausgerechnete und im Limes großer L nahezu exakte (was durch Störungstheorie belegt werden

Abbildung 3.1: Von Nelson und Le Doussal angegebenes Phasendiagramm (oben)
und Phasendiagramm gemäß Resultaten aus diesem Kapitel (unten)

konnte) Ergebnis 3.15 für die Verschiebungs-(uu-)Korrelationen charakterisiert. In der Glas-Phase erhält man damit für die uu-Korrelationen $\ln^2 L$ -Divergenzen, im Fall ohne oder bei irrelevanter Unordnung lediglich $\ln L$ -Divergenzen.

Die Phasen lassen sich auch durch den in Kapitel 3.4 angegeben mithilfe des (normierten) GL-Ordnungsparameters definierten Ordnungsparameter $[\langle\psi\rangle]^2 / [|\langle\psi\rangle|^2]$ kennzeichnen.

Kapitel 4

Vortex-Glas-Phase in einem dreidimensionalen System aus gekoppelten Schichten

Im vorangehenden Kapitel wurden die Eigenschaften des Flußliniengitters in einer Schicht (mit parallelem Magnetfeld) bei schwacher Unordnung untersucht. Hier soll ein System aus gestapelten derartigen Schichten betrachtet werden, wie es beispielsweise in einem geschichteten System aus nahezu normalleitendem Material, das durch supraleitende CuO_2 -Ebenen getrennt ist, etwa in einem Hoch- T_c Supraleiter realisiert sein kann. Mikheev und Kolomeisky [25] haben ein solches System in der Nähe von H_{c1} ohne Unordnung untersucht. Die Flußlinien in benachbarten Schichten sind dabei gekoppelt, und zwar nur über die Wechselwirkung ihrer Magnetfelder. Während ohne Unordnung die Schichtkopplung immer ein relevanter Parameter ist [25], erhält man ein ganz anderes Bild bei Anwesenheit von Unordnung. In diesem Kapitel soll eine Vermutung von Mikheev und Kolomeisky [25] bewiesen werden, nach der eine hinreichend schwache Kopplung bei Anwesenheit von Unordnung nicht relevant ist und daß System in quasi-ungekoppelte 2-dimensionale Vortex-Gläser zerfällt.

Damit erhält man auch für dieses 3-dimensionale System eine Vortex-Glas-Phase in Form dieser quasi-ungekoppelten 2-dimensionalen Vortex-Gläser.

Der Einfluß der Schichtkopplung auf den Vortex-Glas-Fixpunkt ungekoppelter Schichten soll dabei im Replikaformalismus des letzten Kapitels durch Bestimmung ihres RG-Exponenten untersucht werden. Dies geschieht zunächst auf zwei Arten, und zwar mithilfe der Erkenntnisse aus dem letzten Kapitel über die Umittelungen bei Unordnungskopplung im Replikahamiltonian, die auf die Schichtkopplung angewendet werden und im Rahmen einer RG-Rechnung, die nach einer Mean-Field-Approximation die Abbildung auf ein Coulombgas benutzt.

4.1 Replikahamiltonian für System aus gekoppelten Schichten

Das in diesem Kapitel betrachtete System soll aus FL-Gittern in gestapelten Schichten mit parallelem Magnetfeld bestehen (siehe Abbildung 4.1), die sich in einem (kurzreichweitig korrelierten) Unordnungspotential befinden. Die einzelnen Schichten sollen dabei wie im vorangehenden Kapitel 3 durch einen elastischen Hamiltonian 3.1 oder unter Berücksichtigung der Unordnung durch einen Replikahamiltonian 3.6 zu beschreiben sein. Für die Kopplung zwischen den Schichten soll im Hamiltonian der von Mikheev und Kolomeisky (M&K) [25] abgeleitete Ausdruck verwendet werden, der eine Kopplung beschreibt, die nur von der magnetischen Wechselwirkung der FL's in verschiedenen Schichten hervorgerufen wird; dieser Ausdruck gilt nur in der Nähe von H_{c1} , also bei großen FL-Abständen l , weshalb wir uns im folgenden auf diesen Fall beschränken.

Ein solches System läßt sich beispielsweise direkt realisieren durch eine geschichtete Struktur, in der dünne Schichten aus Typ-II Material (mit Dicke d), in denen die FL's liegen, durch Typ-I supraleitende Schichten getrennt sind, so daß die FL's senkrecht zu den Schichten einen Abstand d_{\perp} haben. Die Eindringtiefe λ_{II} in den Typ-II Schichten wird dann sehr viel größer sein als die Eindringtiefe λ_I in den Typ-I Schichten, so daß die FL's nicht die Typ-I Schichten kreuzen können, da dies energetisch äußerst ungünstig ist. Das FL-Gitters in den Typ-II Schichten kann dann mit einem elastischen Hamiltonian 3.1 wie im vorigen Kapitel beschrieben werden, wobei für die Eindringtiefe λ_{II} einzusetzen ist. Wird außerdem der Schichtabstand der Typ-II Schichten ausreichend groß gewählt (sehr viel größer als die Korrelationslängen beider Materialien), wechselwirken FL's in verschiedenen Schichten nur über ihre Magnetfelder und eine Beschreibung der Kopplung wie bei M&K ist möglich. Dabei ist bei der Beschreibung der magnetischen Wechselwirkungen von FL's innerhalb der Typ-II Schichten mit einer Eindringtiefe $\lambda_{\parallel} = \lambda_{II}$ des Magnetfeldes¹ zu rechnen; die magnetischen Wechselwirkungen in der Richtung normal zu den Typ-II Schichten werden von den Eigenschaften des Typ-I Materials bestimmt (wenn man einmal von $d \ll d_{\perp}$ ausgeht, was hier vorauszusetzen ist), daher kann bei der Beschreibung dieser Wechselwirkungen eine Eindringtiefe $\lambda_{\perp} \simeq \lambda_I$ verwenden. Es gilt dann $\lambda_{\perp} \ll \lambda_{\parallel}$. Als eine andere Realisierung kann ein Hoch- T_c Supraleiter angesehen werden mit einem Magnetfeld parallel zu den CuO_2 -Schichten; eine solche Realisierung haben M&K vorgeschlagen. Die Eindringtiefe λ_{\parallel} ($=\lambda_c$ in der üblichen Bezeichnungweise, siehe Fußnote 1) für das Magnetfeld parallel zu den Schichten ist sehr viel größer als die Eindringtiefe λ_{\perp} ($=\lambda_{ab}$) senkrecht zu den Schichten in typischen Hoch- T_c Supraleitern. Die supraleitenden CuO_2 -Ebenen sind durch nahe-

¹die Abschirmströme fließen dann *senkrecht* zu den Schichten; man beachte, daß die Bezeichnungweise λ_{\parallel} also nicht die normalerweise übliche nach der Richtung der Abschirmströme ist.

zu normalleitende Schichten getrennt, in denen die FL's liegen mit Abständen d_{\perp} senkrecht zu den Schichten. Aus energetischen Gründen können die FL's die CuO_2 -Ebenen nicht kreuzen (wegen $\lambda_{\perp} \ll \lambda_{\parallel}$ können die CuO_2 -Ebenen vereinfacht gesprochen als Typ-I supraleitend angesehen werden). Das FL-Gitter in den nahezu normalleitenden Schichten kann dann durch ein elastisches Modell wie im vorangehenden Kapitel beschrieben werden. Die zu verwendenden elastischen Konstanten (genauer: ihr magnetischer Anteil) werden hier aber nicht mehr zu vergleichen sein mit den in Kapitel 1 berechneten, da man hier von anderen Gegebenheiten ausgeht (statt der Randbedingungen in y -Richtung hat man jetzt wegen der Anisotropie zwei verschiedene Eindringtiefen in x -Richtung (λ_{\perp}) und y -Richtung (λ_{\parallel}) bei der Berechnung des Magnetfeldes zu beachten); das hat aber keinen Einfluß auf die Beschreibung, da wir in Kapitel 3.1 gesehen haben, daß die elastische Konstante Γ im hier betrachteten Fall großer FL-Abstände nur von der sterischen Repulsion bestimmt wird und nicht von den magnetischen Wechselwirkungen im FL-Gitter der Schicht (die die magnetischen Wechselwirkungen beschreibenden Kompressions- und Neigungsmoduln fallen aus der Formel 3.3 heraus), so daß auch die Beziehung 3.3 aus dem vorigen Kapitel hier noch anwendbar ist². Bei extremen Hoch- T_c Materialien (z.B. YBaCuO oder BiSrCaCuO) kann man davon ausgehen das $\xi_c < d_{\perp}$, so daß man für FL's in verschiedenen Schichten eine ausschließlich magnetische Kopplung annehmen kann wie bei M&K.

Nun soll noch einmal kurz die Herleitung der von M&K untersuchten magnetischen Kopplung skizziert werden. Die Magnetfelder der FL-Elemente in verschiedenen Schichten wechselwirken wie in einem Bulk-Supraleiter, allerdings ist zu beachten, daß die Eindringtiefen im hier betrachteten geschichteten System anisotrop sind, d.h. daß λ_{\parallel} entlang der Schichten sehr viel größer ist als die Eindringtiefe λ_{\perp} senkrecht zu den Schichten. Die magnetische Wechselwirkung gerader FL's in verschiedenen Schichten erhält man daher im Prinzip aus dem bereits im Kapitel 1 angegebenen Wechselwirkungspotential $V_3 = V$ (siehe Seite 20 und Beziehung 1.6) für FL-Elemente in 3 Dimensionen; es ist nur eine Modifikation wegen der anisotropen Eindringtiefen vorzunehmen:

$$\int dz v_0 K_0(s_{x_1 x_2 i_1 i_2})$$

mit $s_{x_1 x_2 i_1 i_2}^2 = \left(\frac{(x_1 - x_2)^2}{\lambda_{\parallel}^2} + \frac{(i_1 d_{\perp} - i_2 d_{\perp})^2}{\lambda_{\perp}^2} \right)$ und $v_0 = \frac{\phi_0^2}{8\pi^2 \lambda_{\parallel} \lambda_{\perp}}$,

wobei i_1, i_2 den Schichtindex der beiden FL's und x_1, x_2 die Positionen in der jeweiligen Schicht bezeichnen. Auch im folgenden sollen die Schichtindizes immer mit i, j, \dots bezeichnet werden.

Aufgrund der repulsiven Wechselwirkung werden sich die FL's in den Schichten im Grundzustand wie in der Abbildung 4.1 gezeigt anordnen, wenn l nicht zu groß bzw. $B - H_{c1}$ nicht zu klein ist oder die magnetische Schichtkopplung zu

²wobei λ_{col}/l durch $\lambda_{\parallel}/l \ll 1$ zu ersetzen ist

Abbildung 4.1: Grundzustandskonfiguration von FL's in gekoppelten Schichten

groß ist³. Um Abweichungen von dieser natürlichen Grundzustandskonfiguration nicht berücksichtigen zu müssen (siehe [26]), sollte daher eine nicht zu starke magnetische Kopplung verschiedener Schichten vorausgesetzt werden, also $d_{\perp} \gg \lambda_{\perp}$. Die obige Wechselwirkung fällt exponentiell ab für große Argumente von K_0 . Daher (man beachte auch hier $d_{\perp} > \lambda_{\perp}$) kann man sich auf Wechselwirkungen zwischen nächsten Nachbarschichten beschränken. Geht man bei der Beschreibung der FL-Gitter in den Schichten wie in Kapitel 3.1 wieder zu einer Kontinuumsbeschreibung bzgl. der x-Koordinaten über, werden die von FL-Verschiebungen hervorgerufenen FL-Dichtefluktuationen in der ersten Näherung (analoge Argumente zu denen aus Kapitel 3.2 ergeben auch hier, daß die höheren Ordnungen irrelevant gegenüber dieser ersten Ordnung sind) durch cos-Terme der Form $\frac{1}{l} \cos(\frac{2\pi}{l}(x - u_i(x)))$ beschrieben. Das exponentielle Abfallen der Wechselwirkung bewirkt auch hier, daß nur Dichtefluktuationen, die sich in zwei benachbarten Schichten "gegenüberliegen" (in einem Bereich der Breite λ_{\parallel}), also die gleiche x-Koordinate haben, beitragen zur Wechselwirkungsenergie; dies gilt nur, solange $\lambda_{\parallel} \ll l$, also in der Nähe von H_{c1} . Dies ist der Grund, aus dem wir uns auf diesen Bereich großer FL-Abstände l beschränken.

Ohne die einzelnen Schritte der Rechnung hier aufzuführen [25], erhält man damit folgenden Hamiltonian, der die Wechselwirkung zwischen den Schichten und die elastische Energie jeder Schicht beschreibt (zunächst ohne Unordnung):

$$\mathcal{H} = \sum_i \int d^2r \frac{\Gamma}{2} \nabla u_i \cdot \nabla u_i - \sum_i \int d^2r g \cos\left(\frac{2\pi}{l}(u_{i+1} - u_i)\right) \quad (4.1)$$

mit $g \simeq v_0 \frac{\lambda_{\parallel}}{l^2} e^{-\frac{d_{\perp}}{\lambda_{\perp}}}$

³Ivlev *et al.* [26] geben für die Stabilität einer solchen Konfiguration die Bedingung

$$2\pi \frac{d_{\perp}}{l} \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} > 1, 51$$

an. Realistische Werte für das Verhältnis $\lambda_{\parallel}/\lambda_{\perp}$ sind 4-5 .

Nun hat man noch den die Wechselwirkung mit der Unordnung beschreibenden Teil \mathcal{H}_r des Hamiltonians hinzuzufügen, das System zu replizieren und über die Unordnung zu mitteln analog zu den entsprechenden Rechnungen in Kapitel 3.1. Da jede Schicht mit einer anderen Unordnungsconfiguration wechselwirkt, wenn man wie bisher von Unordnung mit *kurzreichweitigen* Korrelationen ausgeht, ist dabei mit einer zwischen den Schichten unkorrelierten Unordnung zu rechnen, also

$$[V_i(\vec{r})] = 0 \quad \text{und} \quad [V_i(\vec{r})V_j(\vec{r}')] = \Delta \delta_a(\vec{r} - \vec{r}')\delta_{ij} \quad .$$

Im Verlaufe der Rechnung werden bei der Mittelung über die Unordnung wieder höhere anisotrope Terme und höhere cos-Replika-Kopplungen generiert, die sich wie in Kapitel 3.2 wieder als irrelevant herausstellen und wie dort vernachlässigt werden. Unter Beachtung dieser Punkte kann man dann von folgendem Ausdruck für die Zustandssumme $[Z^n]$ bzw. den Replikahamiltonian ausgehen für das System aus gekoppelten FL-Gittern in gestapelten Schichten in der Nähe von H_{c1} (bei großen FL-Abständen l) und mit Unordnung:

$$[Z^n] = \prod_j \prod_{\gamma=1}^n \int \mathcal{D}u_j^\gamma \exp(-\mathcal{H}_{Rep}) \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{H}_{Rep} = \sum_i \int d^2r \left\{ \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} K^{\alpha\beta} \nabla u_i^\alpha \cdot \nabla u_i^\beta - \sum_{\alpha,\beta} \frac{D}{2} (\partial_x u_i^\alpha)(\partial_x u_i^\beta) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\alpha,\beta} y_\Delta \cos(p(u_i^\alpha - u_i^\beta)) - \sum_\alpha \tilde{g} \cos(p(u_{i+1}^\alpha - u_i^\alpha)) \right\} \quad ,$$

wobei $\tilde{g} := \frac{g}{T}$.

(4.2)

Ziel aller weiteren Bemühungen soll die Aufklärung des Phasendiagramms bzw. des Flußes unter einer RG in Abhängigkeit der Parameter \tilde{g} und y_Δ sein. (Die Kopplungsmatrix $K^{\alpha\beta}$, die zu Beginn einer Renormierung durch $\tilde{K} = K$ und bei großen FL-Abständen durch $\eta = \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} \lesssim 2$ nach 3.8 unabhängig von der Temperatur T festgelegt ist, hat man dabei nicht als frei wählbaren Parameter im Phasendiagramm oder RG-Fluß zu berücksichtigen.)

Der obige Replikahamiltonian 4.2 besitzt zunächst einmal für $\tilde{g} = 0$ (entkoppelte Schichten) die bereits in Kapitel 3.2 aufgetretenen Fixpunkte für eine Schicht, nämlich $\tilde{y}_\Delta^* = 0$ und den C&O-Fixpunkt $\tilde{y}_\Delta^* = \frac{1}{4\pi}(2 - \eta)$.

Der C&O-Fixpunkt repräsentiert eine Phase, in der die einzelnen Schichten voneinander entkoppelt sind ($\tilde{g} = 0$), sich aber jeweils in einer Vortex-Glas-Phase befinden. An diesem Fixpunkt zerfällt das System also in 2-dimensionale ungekoppelte Vortex-Gläser. Ausgehend von diesem Fixpunkt soll nun der Einfluß einer Schichtkopplung \tilde{g} bestimmt werden, um Aussagen über das 3-dimensionale FL-Gitter zu gewinnen. Insbesondere ist zu klären, ob der C&O-Fixpunkt stabil ist

gegenüber der Schichtkopplung und somit auch für das 3-dimensionale FL-Gitter einen attraktiven nichttrivialen Fixpunkt darstellt; dieser repräsentiert dann auch für das 3-dimensionale FL-Gitter eine Vortex-Glas-Phase, da im C&O-Fixpunkt ja in jedem Fall $\tilde{y}_\Delta^* > 0$.

Es ist der natürliche Weg, zunächst den bereits bekannten Fixpunkt hinsichtlich des Einflusses der neu in das System eingeführten Schichtkopplung zu untersuchen, d.h. zunächst den Bereich kleiner Schichtkopplungen \tilde{g} zu studieren. Aber selbstverständlich soll angestrebt werden, den RG-Fluß bzw. das Phasendiagramm auch für größere Schichtkopplungen auf die Existenz neuer Fixpunkte bzw. neuer Phasen hin zu untersuchen; dies erweist sich jedoch für unendlich viele Schichten als zu kompliziert. Daher wird im Kapitel 5 ein System aus zwei Schichten betrachtet, in diesem Kapitel werden jedoch zunächst Resultate für kleine Schichtkopplungen \tilde{g} und insbesondere für den C&O-Fixpunkt erzielt mit dem FL-Gitter in unendlich vielen Schichten.

Es soll nun der RG-Exponent λ_g der Schichtkopplung \tilde{g} bestimmt werden für den C&O-Fixpunkt, um die Frage der Relevanz einer schwachen Schichtkopplung bei Anwesenheit von Unordnung und damit der Stabilität des C&O-Fixpunktes zu klären. (Das Verhalten am anderen Fixpunkt $\tilde{y}_\Delta^* = 0$ für ein System ohne Unordnung ist das von M&K untersuchte.) Dies geschieht zunächst auf direktem Wege mittels der Ergebnisse aus Kapitel 3.3 und anschließend mithilfe einer RG-Transformation, die nach einer Mean-Field-Approximation und Abbildung auf ein Coulombgas für schwache Schichtkopplungen hergeleitet wird. Es kann für diesen Bereich auch der RG-Fluß bestimmt werden.

4.2 Untersuchung mithilfe der Ergebnisse aus Kapitel 3.3

Im Kapitel 3.3 haben wir gesehen, daß u-Mittelungen für einen Hamiltonian 4.2 bei $\tilde{g} = 0$ relativ einfach auszuführen sind, wenn nur das Verhalten auf großen Längenskalen interessiert. Dann kann nämlich mit renormierten, unreskalierten Kopplungen gerechnet werden mit dem gaußschen (elastischen) Teil des Hamiltonians 4.2. Mit anderen Worten ist es bei $\tilde{g} = 0$ also ausreichend, mit dem elastischen Teil von 4.2 gaußisch zu rechnen (insbesondere gilt auch das Wick-Theorem und die Formeln aus Anhang C.1), wobei die Ergebnisse 3.15–3.17 für die Propagatoren bzw. uu-Korrelationen zu verwenden sind.

Unter Verwendung der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{g}} \ln [Z^n] = \sum_i \int d^2 r \sum_\alpha \langle \cos(p(u_{i+1}^\alpha - u_i^\alpha)) \rangle_{\mathcal{H}_{Rep}}$$

ist es nun möglich, den RG-Exponenten λ_g zu bestimmen unter Zuhilfenahme dieser Ergebnisse.

Denn aus der Invarianz der Zustandssumme auf der linken Seite unter der RG-Transformation folgt durch Abzählen der Längenpotenzen unmittelbar die Gleichung

$$-\lambda_g = -2 + \lambda_{\cos}$$

für die RG-Exponenten auf beiden Seiten der obigen Beziehung. λ_{\cos} bezeichnet dabei den RG-Exponenten des cos-Mittelwertes. Um diesen zu berechnen, ist der cos-Mittelwert auszuführen. Bei der Untersuchung des C&O-Fixpunktes mit $\tilde{g} = 0$ reicht es, dies in der führenden Ordnung in \tilde{g} zu tun, da auch der RG-Exponent λ_g die führende Ordnung der RG-Transformation für \tilde{g} angibt. Wertet man den cos-Mittelwert in führender Ordnung in \tilde{g} aus, kann bei der Mittelung mit dem Hamiltonian 4.2 aber $\tilde{g} = 0$ gesetzt werden, so daß die oben angesprochenen Resultate aus Kapitel 3.3 benutzt werden können.

Man bekommt dann ($\eta := \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}}$)

$$\begin{aligned} \langle \cos(p(u_{i+1}^\alpha - u_i^\alpha)) \rangle_{\mathcal{H}_{Rep}} &= \langle \cos(p(u_{i+1}^\alpha - u_i^\alpha)) \rangle_{\tilde{g}=0} + \mathcal{O}(\tilde{g}) \\ &\stackrel{C.10}{=} \langle \cos(pu_{i+1}^\alpha) \rangle_{\tilde{g}=0} \langle \cos(pu_i^\alpha) \rangle_{\tilde{g}=0} + \mathcal{O}(\tilde{g}) \\ &\stackrel{C.9}{=} \exp(-p^2 \langle u_i^{\alpha 2} \rangle_{\tilde{g}=0}) + \mathcal{O}(\tilde{g}) \\ &\stackrel{3.16}{=} \left(\frac{L}{a}\right)^{-\frac{p^2}{2\pi\tilde{K}}(1 - \frac{K_{as}}{\tilde{K}} - \frac{D}{2\tilde{K}} - \pi^2 \eta \tilde{y}_\Delta^*{}^2 \ln(\frac{L}{a}))} + \mathcal{O}(\tilde{g}) \end{aligned}$$

Man liest also aus den Längenpotenzen einen Exponenten

$$\begin{aligned} \lambda_{\cos} &= \eta \left(1 - \frac{K_{as}}{\tilde{K}} - \frac{D}{2\tilde{K}} - \pi^2 \eta \tilde{y}_\Delta^*{}^2 \ln\left(\frac{L}{a}\right)\right) \\ &= \begin{cases} \eta \left(1 - \frac{K_{as}}{\tilde{K}} - \frac{D}{2\tilde{K}}\right) & \text{für } \tilde{y}_\Delta^* = 0 \\ \frac{L \gg a}{\infty} \ln\left(\frac{L}{a}\right) \rightarrow \infty & \text{für } \tilde{y}_\Delta^* \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

ab und bekommt damit für den RG-Exponenten $\lambda_g = 2 - \lambda_{\cos}$ der Schichtkopplung

$$\lambda_g = \begin{cases} 2 - \eta \left(1 - \frac{K_{as}}{\tilde{K}} - \frac{D}{2\tilde{K}}\right) & \text{für } \tilde{y}_\Delta^* = 0 \\ \frac{L \gg a}{\rightarrow} -\infty & \text{für } \tilde{y}_\Delta^* \neq 0 \end{cases} . \quad (4.4)$$

Mit diesem Ergebnis kann nun die zu Beginn des Kapitels gestellte Frage der Relevanz der Schichtkopplung am C&O-Fixpunkt beantwortet werden. Dort gilt $\tilde{y}_\Delta^* > 0$, so daß zufolge der obigen Rechnung der RG-Exponent der Schichtkopplung mit L/a beliebig negativ wird. Damit ist die Schichtkopplung, wie von M&K [25] vermutet, *irrelevant* am C&O-Fixpunkt. Das geschichtete System zerfällt also in *ungekoppelte 2-dimensionale Vortex-Gläser*, wenn die Schichtkopplung \tilde{g}

schwach genug ist.

Befindet man sich am Fixpunkt $\tilde{y}_\Delta^* = 0$, hat also keine Unordnung, erhält man jedoch wieder die Resultate von M&K. Dort ist wegen $\eta \lesssim 2$ (siehe Beziehung 3.8) auf jeden Fall $\lambda_g > 0$ und die Schichtkopplung *relevant*.

4.3 RG-Rechnung nach MFA und Abbildung auf Coulombgas

In diesem Abschnitt soll der Hamiltonian 4.2 mit beiden Kopplungen, sowohl der Unordnungs- als auch der Schichtkopplung, renormiert werden. Und zwar soll der Hamiltonian zunächst etwas vereinfacht werden durch eine Mean-Field-Approximation (MFA). Dann ist es ohne größere Probleme möglich, das Modell nach einer Abbildung auf ein Coulombgas ähnlich wie bei C&O zu renormieren für kleine Schichtkopplungen \tilde{g} und schwache Unordnung y_Δ . Dies erlaubt, den RG-Fluß in der Nähe von $\tilde{g} = 0$ zu bestimmen für beliebige Werte der Unordnungskopplung y_Δ , insbesondere auch am C&O-Fixpunkt.

4.3.1 MFA

Im folgenden soll der Anisotropieterm im Replikahamiltonian 4.2 vernachlässigt werden, um die Rechnungen möglichst übersichtlich zu halten. In den Kapiteln 3.2 und 3.3 haben wir ja gesehen, daß dieser Term nur einen zu vernachlässigenden Effekt auf die phasencharakterisierenden Größen, die uu-Korrelationen auf großen Längenskalen, hat. Man überzeugt sich außerdem leicht anhand der Beziehungen 4.3 und 4.4, daß die Anisotropien auch bei der Beantwortung der Frage nach der Relevanz der Schichtkopplung \tilde{g} keine Rolle spielen. Somit stellt der Verzicht auf dieser Terme in der weiteren Rechnung keine wesentliche Einschränkung dar.

In der MFA, die vorgenommen werden soll, sollen die Schichten entkoppelt werden, wobei die Kopplung an die Nachbarschichten durch ein effektives äußeres Feld beschrieben werden soll. Ein solches Vorgehen wird vor allem bei einer schwachen Kopplung zwischen den Schichten, also bei kleinen Werten für \tilde{g} gute Ergebnisse erzielen, da dann die Verschiebungs-(u-)Felder in benachbarten Schichten weitgehend unabhängig fluktuieren können. Die MFA besteht dann in der folgenden Ersetzung:

$$\begin{aligned} \cos(p(u_{i+1}^\alpha - u_i^\alpha)) &\simeq \langle \cos(pu_{i+1}^\alpha) \rangle_{\mathcal{H}_{MF}} \cos(pu_i^\alpha) \\ &=: h \cos(pu_i^\alpha) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Hierbei ist das effektive äußere Feld h durch Mittelung von $\cos(pu_{i+1}^\alpha)$ mit dem Mean-Field-Hamiltonian \mathcal{H}_{MF} selbstkonsistent zu bestimmen, wobei sich die MFA \mathcal{H}_{MF} des Replikahamiltonian als

$$\mathcal{H}_{MF} = \sum_i \int d^2r \left\{ \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} K^{\alpha\beta} \nabla u_i^\alpha \cdot \nabla u_i^\beta - \sum_{\alpha,\beta} y_\Delta \cos(p(u_i^\alpha - u_i^\beta)) - \sum_\alpha \tilde{g} h \cos(pu_i^\alpha) \right\} \quad (4.6)$$

schreibt. In diesem MF-Hamiltonian sind die Schichten nun entkoppelt, und es ist möglich, sich im weiteren Verlauf auf die Rechnung für eine Schicht zu beschränken. Der MF-Hamiltonian unterscheidet sich um das zusätzliche äußere Feld h vom Replikahamiltonian, den C&O für das 2-dimensionale XY-Modell im Zufallsfeld bekommen. Wie bereits im Kapitel 3.1 erwähnt, sind im Gegensatz zu den XY-Modellen hier keine Vortizes zu berücksichtigen.

4.3.2 Abbildung auf ein Coulombgas

Dieses MF-Modell kann mit den Methoden aus [20]–[22] für kleine Kopplungen y_Δ und $\tilde{g}h$ auf ein Coulombgas abgebildet werden mithilfe der Beziehung [22]

$$\exp(a \cos(pu(\vec{r}))) = \sum_{s(\vec{r})=-\infty}^{\infty} \exp\left(ips(\vec{r})u(\vec{r}) + \ln y_a s^2(\vec{r})\right) \quad \text{mit} \quad y_a := \frac{1}{2}a, \quad (4.7)$$

die exakt ist für kleine h , wo nur $|s(\vec{r})| \leq 1$ beitragen. Man kann dann bei kleinen Kopplungen y_Δ und \tilde{g} die Zustandssumme $[Z^n]$ schreiben als

$$\begin{aligned} [Z^n] &= \prod_{\gamma=1}^n \int \mathcal{D}u^\gamma \exp(-\mathcal{H}_{MF}) \\ &= \prod_{\gamma=1}^n \int \mathcal{D}u^\gamma \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^2r \sum_{\alpha,\beta} K^{\alpha\beta} \nabla u^\alpha(r) \cdot \nabla u^\beta(r)\right) \times \\ &\quad \times \sum_{\{s^\alpha(r)\}} \exp\left(\int d^2r \sum_\alpha u^\alpha(r)[ips^\alpha(r)] + \int d^2r \sum_\alpha \ln y_{gh} (s^\alpha(r))^2\right) \times \\ &\quad \times \sum_{\{n^{\alpha\beta}(r)\}} \exp\left(\int d^2r \sum_\alpha u^\alpha(r)[ip \sum_\beta n^{\alpha\beta}(r)] + \int d^2r \sum_{\alpha<\beta} \ln y_\Delta (n^{\alpha\beta}(r))^2\right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } y_{gh} := \frac{1}{2} \tilde{g}h \quad \text{und} \quad n^{\beta\alpha}(r) = -n^{\alpha\beta}(r) \quad .$$

(Es erscheint an einigen Stellen bequem, statt eines Kontinuummodells mit Cutoff a ein diskretes Modell, etwa ein Quadratgitter mit einer Gitterkonstanten

a zu verwenden. Der entsprechende Übergang kann problemlos bewerkstelligt werden. In diesem Sinne sind $\sum_{\{s^\alpha(r)\}}$ bzw. $\sum_{\{n^{\alpha\beta}(r)\}}$ als Summe über alle Konfigurationen $\{s^\alpha(r)\}$ bzw. $\{n^{\alpha\beta}(r)\}$ im diskreten Bild zu verstehen und gehen im Kontinuumsbild in Funktionalintegrale über.) Die gaußsche Integration über die Felder u^γ kann jetzt ausgeführt werden, und man erhält

$$\begin{aligned}
[Z^n] = & \sum'_{\{s^\alpha(r)\}} \sum'_{\{n^{\alpha\beta}(r)\}} \exp \left(\int d^2r \sum_\alpha \ln y_{gh} (s^\alpha(r))^2 + \right. \\
& \left. + \int d^2r \sum_{\alpha<\beta} \ln y_\Delta (n^{\alpha\beta}(r))^2 \right) \times \\
& \times \exp \left(-\frac{p^2}{2} \int d^2r \int d^2r' \sum_{\alpha,\beta} [s^\alpha(r) + \sum_\gamma n^{\alpha\gamma}(r)] [(K^{-1})^{\alpha\beta} G(r-r')] \times \right. \\
& \left. \times [s^\beta(r') + \sum_\delta n^{\beta\delta}(r')] \right) .
\end{aligned}$$

Die Felder $s^\alpha(r)$ und $n^{\alpha\beta}(r)$ verhalten sich hier ähnlich wie topologische Ladungen, wie sie aus XY-Modellen mit Vortizes bekannt sind. Im Unterschied zur Rechnung von C&O (für den Fall ohne Vortizes) treten hier 2 Sorten solcher Ladungen auf, neben den von der Unordnungskopplung herrührenden $n^{\alpha\beta}$ -Ladungen gibt es hier noch die von der in MFA behandelten Schichtkopplung kommenden Ladungen s^α . Die einzigen Unterschiede zur Arbeit von C&O werden im folgenden Konsequenzen dieses neu auftretenden Ladungstypus sein. In der Zustandssumme wird nach der oben ausgeführten Transformation über Konfigurationen dieser wechselwirkenden Ladungen summiert. Dies kann als Zustandssumme eines Gases aus solchen Ladungen gedeutet werden, was im folgenden aber noch deutlicher wird.

Die mit Strich versehenen Summationen \sum' bedeuten, daß die Summationen einer Neutralitätsbedingung

$$\sum_{\alpha,\beta} \left[\int d^2r (s^\alpha(r) + \sum_\gamma n^{\alpha\gamma}(r)) \right] (K^{-1})^{\alpha\beta} \left[\int d^2r' (s^\beta(r') + \sum_\delta n^{\beta\delta}(r')) \right] = 0 \quad (4.8)$$

unterliegen, die sicherstellt, daß die von den quasi-topologischen Ladungen generierte Selbstenergie nicht unendlich groß wird, sondern verschwindet. Aufgrund dieser Neutralitätsbedingung, kann die Greenfunktion G durch

$$\tilde{G}(r) = G(0) - G(r) \stackrel{C.6}{=} \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{a} \right)$$

mit $\tilde{G}(0) = 0$ ersetzt werden. Es tragen dann nur noch Ladungs-Konfigurationen bei, wo nicht zwei Ladungen am selben Platz sind, was bedeutet daß zwei beliebige Ladungen immer einen Mindestabstand von der Größe des Cutoffs a voneinander

haben müssen.

Für die betrachteten kleinen Kopplungen y_Δ und y_{gh} sind Konfigurationen mit Einheitsladungen $|\sum_\alpha (s^\alpha(r))^2| \leq 1$ und $|\sum_{\alpha<\beta} (n^{\alpha\beta}(r))^2| \leq 1$ energetisch am günstigsten, so daß man sich auf diese beschränken kann, weil sie das größte Boltzmann-Gewicht haben.

Für die Kopplungsmatrix $K^{\alpha\beta}$ wird wieder der Ansatz von C&O benutzt, um alle Terme, die durch die RG-Transformation erzeugt werden, berücksichtigen zu können:

$$\begin{aligned}
K^{\alpha\beta} &= \tilde{K}\delta^{\alpha\beta} + (K - \tilde{K}) \\
(K^{-1})^{\alpha\beta} &\stackrel{C.1}{=} \frac{1}{\tilde{K}}\delta^{\alpha\beta} + \kappa \quad , \text{ wobei } \kappa = -\frac{K - \tilde{K}}{[n(K - \tilde{K}) + \tilde{K}]\tilde{K}} \stackrel{n \rightarrow 0}{=} -\frac{K - \tilde{K}}{\tilde{K}^2}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Damit und unter Beachtung der Antisymmetrie $n^{\alpha\beta}(r) = -n^{\beta\alpha}(r)$ der n -Ladungen kann man die Zustandssumme weiter vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
[Z^n] &= \sum'_{\{s^\alpha(r)\}} \sum'_{\{n^{\alpha\beta}(r)\}} \exp \left(\int d^2r \sum_\alpha \ln y_{gh} (s^\alpha(r))^2 + \right. \\
&\quad \left. + \int d^2r \sum_{\alpha<\beta} \ln y_\Delta (n^{\alpha\beta}(r))^2 \right) \times \\
&\quad \times \exp \left(\int \int_{r \neq r'} d^2r d^2r' \tilde{G}(r - r') \frac{p^2}{2} \left[\frac{1}{\tilde{K}} \sum_\alpha s^\alpha(r) s^\alpha(r') + \kappa \sum_{\alpha,\beta} s^\alpha(r) s^\beta(r') + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\tilde{K}} \sum_{\alpha,\gamma,\delta} n^{\alpha\gamma}(r) n^{\alpha\delta}(r') + \frac{2}{\tilde{K}} \sum_{\alpha\gamma} s^\alpha(r) n^{\alpha\gamma}(r') \right] \right) .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Durch Einführung von Vektorladungen und entsprechenden Skalarprodukten läßt sich dies als Zustandssumme eines 2-dimensionalen Gases aus Vektorladungen auffassen, die mit coulombartigen Kräften wechselwirken. Die Renormierung soll dann in diesem Bild durchgeführt werden ganz analog zu den Rechnungen von Kosterlitz [21] und C&O [20]. Der Unterschied zur letzteren Arbeit besteht in der Tatsache, daß hier noch ein neuer Ladungstyp eingeführt werden muß. Im einzelnen verwendet man folgende Vektorladungen und Skalarprodukte:

- (i) die schon bei C&O verwendeten Einheitsladungen $\vec{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ ($\alpha < \beta$) mit einem Skalarprodukt

$$\vec{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}^{\gamma\delta} := \delta_{\alpha\gamma} + \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} - \delta_{\beta\gamma} \quad ((\vec{\varepsilon}^{\alpha\beta})^2 = 2) \quad .$$

Für $\alpha > \beta$ definiert man $\vec{\varepsilon}^{\alpha\beta} := -\vec{\varepsilon}^{\beta\alpha}$. Außerdem haben die $\vec{\varepsilon}$ die Eigenschaft $\vec{\varepsilon}^{\alpha\beta} + \vec{\varepsilon}^{\beta\gamma} = \vec{\varepsilon}^{\alpha\gamma}$. Mit diesen Vektorladungen kann man in 4.10

einfacher schreiben

$$\begin{aligned}\vec{n}(r) &= \sum_{\alpha,\beta} n^{\alpha\beta}(r) \vec{e}^{\alpha\beta} \\ \sum_{\alpha,\gamma,\delta} n^{\alpha\gamma}(r) n^{\alpha\delta}(r') &= \vec{n}(r) \cdot \vec{n}(r')\end{aligned} .$$

- (ii) die hier neu auftretenden Einheitsladungen \vec{e}^α , für die zwei verschiedene Skalarprodukte

$$\vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}^\beta := \delta_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \vec{e}^\alpha * \vec{e}^\beta := 1$$

eingeführt werden. Außerdem kann die Bezeichnung $\vec{e}^{-\alpha} := -\vec{e}^\alpha$ eingeführt werden. Man erhält dann in 4.10:

$$\begin{aligned}\vec{s}(r) &= \sum_{\alpha} s^\alpha(r) \vec{e}^\alpha \\ \sum_{\alpha} s^\alpha(r) s^\alpha(r') &= \vec{s}(r) \cdot \vec{s}(r') \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha,\beta} s^\alpha(r) s^\beta(r') = \vec{s}(r) * \vec{s}(r')\end{aligned}$$

- (iii) desweiteren ist ein Skalarprodukt zwischen beiden Vektorladungstypen zu definieren:

$$\vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}^{\gamma\delta} := \delta_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\delta}$$

Mit diesem bekommt man in 4.10

$$\sum_{\alpha\gamma} s^\alpha(r) n^{\alpha\gamma}(r') = \vec{s}(r) \cdot \vec{n}(r') .$$

Nun sind, wie bereits erwähnt, die energetisch günstigsten Konfigurationen, die daher in der Zustandssumme den bei weitem größten Beitrag liefern, diejenigen, wo nur Einheitsladungen auftreten (für kleine Kopplungen y_Δ, y_g). Daher vernachlässigt man andere Konfigurationen. Es ist dann möglich, den Ausdruck 4.10 für die Zustandssumme als großkanonische Zustandssumme eines Coulombgases aus diesen Vektoreinheitsladungen aufzufassen. Dabei wechselwirken die Einheitsladungen abhängig von ihrem Skalarprodukt und ihrem Abstand. Die Fugazitäten für die Ladungen \vec{e} und \vec{e} liest man in 4.10 ab als y_Δ und y_{gh} . Die Zustandssumme nimmt dann folgende Form an (vgl. [20],[21]):

$$\begin{aligned}[Z^n] &= \sum'_{\{N^{\alpha\beta}\}} \sum'_{\{S^{\pm\gamma}\}} \left\{ \prod_{\alpha \neq \beta=1}^n \prod_{\gamma=\pm 1}^{\pm n} \left(\frac{y_{gh}^{S^\gamma}}{S^\gamma!} \frac{y_\Delta^{N^{\alpha\beta}}}{N^{\alpha\beta}!} \right) \right\} \times \\ &\times \left\{ \prod_{\alpha \neq \beta=1}^n \prod_{n_{\alpha\beta}=1}^{N^{\alpha\beta}} \int d^2 r_{n_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta} \prod_{\gamma=\pm 1}^{\pm n} \prod_{s_\gamma=1}^{S^\gamma} \int d^2 r_{s_\gamma}^{\gamma} \exp(-\mathcal{H}_C) \right\} \quad \text{mit} \\ -\mathcal{H}_C &= \left(\frac{1}{2} \sum_{(\alpha, s_\alpha) \neq (\gamma, s_\gamma)} \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}_{s_\alpha}^\alpha \cdot \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma + p^2 \kappa \vec{e}_{s_\alpha}^\alpha * \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma \right) \tilde{G}(\vec{r}_{s_\alpha}^\alpha - \vec{r}_{s_\gamma}^\gamma) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{(\alpha\beta, n_{\alpha\beta}) \neq (\gamma\delta, n_{\gamma\delta})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}_{n_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta} \cdot \vec{e}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta} - \vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta}) + \\ &\quad \left. + \sum_{(\alpha, s_\alpha), (\gamma\delta, n_{\gamma\delta})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}_{s_\alpha}^\alpha \cdot \vec{e}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \tilde{G}(\vec{r}_{s_\alpha}^\alpha - \vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta}) \right) \quad , \quad (4.11)\end{aligned}$$

wobei nur über Konfigurationen zu summieren ist, in denen alle Ladungen einen Mindestabstand a besitzen und \tilde{G} durch $\tilde{G}(r) = \frac{1}{2\pi} \ln(r/a)$ gegeben ist. Für diesen Coulombgashamiltonian kann man auf dem üblichen Weg [20], [21] eine RG-Transformation erhalten.

4.3.3 RG-Gleichungen

Bei der RG-Transformation für 4.11 wird der Cutoff von a auf ae^δ vergrößert und anschließend alle Längen reskaliert. Dazu müssen folgende Schritte durchgeführt werden, wobei jeweils bis zur ersten Ordnung in $\delta = dl$ zu rechnen ist:

- (i) Es werden in 4.11 Konfigurationen ausintegriert, wo mehrere Ladungen sich nähern bis auf Entfernungen $a \leq |\vec{r} - \vec{r}'| \leq ae^\delta$. Da die Fugazitäten y_Δ und y_{gh} und damit auch die zugehörigen Dichten klein sind, kann man sich auf Konfigurationen beschränken, wo sich zwei Teilchen nahekommen. Von diesen sind wiederum nur die energetisch günstigsten mit dem größten Boltzmann-Gewicht zu berücksichtigen. Das sind solche, in denen sich zwei Ladungssorten, die ein negatives Skalarprodukt bilden, nahekommen, also im einzelnen

$$\begin{aligned} & \bar{e}^\alpha / \bar{e}^{-\alpha}\text{-Paare,} & \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} / \bar{\varepsilon}^{\beta\alpha}\text{-Paare,} \\ & \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} / \bar{\varepsilon}^{\beta\gamma}\text{-Paare,} \\ & \bar{e}^\alpha / \bar{\varepsilon}^{\beta\alpha}\text{-Paare,} & \bar{e}^{-\alpha} / \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta}\text{-Paare} \quad . \end{aligned}$$

- (ii) In den Greenfunktionen $\tilde{G}(r) = \frac{1}{2\pi} \ln(r/a)$ in 4.11 wird ebenfalls der Cutoff von a auf ae^δ vergrößert.

- (iii) Alle Längen werden reskaliert.

(i) Die Durchführung des ersten Schrittes für Paare aus entgegengesetzten Ladungen, das sind hier $\bar{e}^\alpha / \bar{e}^{-\alpha}$ -Paare und $\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} / \bar{\varepsilon}^{\beta\alpha}$ -Paare, verläuft nach den Standardmethoden aus [20] bzw. [21]. Da die Rechnungen etwas technisch sind, werden sie in den Anhang D.1 verlagert.

Als Ergebnis der Ausintegration der Beiträge dieser Paare (in führender Ordnung in $\delta = dl$) erhält man eine Renormierung der Kopplungen \tilde{K} und κ (mit $\tilde{y}_{gh} := y_{gh}a^2$):

$$\left(\frac{d\tilde{K}}{dl} \right)_{\bar{e}\bar{e}} = \pi p^2 \tilde{y}_{gh}^2 \quad (4.12)$$

$$\left(\frac{d\kappa}{dl} \right)_{\bar{e}\bar{e}} = -\pi p^2 \tilde{y}_{gh}^2 \kappa \left(n\kappa + \frac{2}{\tilde{K}} \right) \quad (4.13)$$

$$\left(\frac{d\tilde{K}}{dl} \right)_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}} = \pi p^2 n \tilde{y}_\Delta^2 \quad (4.14)$$

$$\left(\frac{d\kappa}{dl}\right)_{\vec{e}\vec{e}} = \pi p^2 \tilde{y}_\Delta^2 \frac{1}{\tilde{K}^2} \quad (4.15)$$

Für ein Paar aus einer $\vec{e}^{\alpha\beta}$ - und einer $\vec{e}^{\beta\gamma}$ -Vektorladung kann die Ausintegration dadurch erfolgen, daß diese beiden Ladungen durch eine Vektorladung $\vec{e}^{\alpha\gamma}$ “ersetzt” werden (vgl. [23],[20]). Die Ersatzladung zeigt die gleiche Wechselwirkung mit dritten Vektorladungen wie das betrachtete Paar, dessen Ladungen man sich in diesem Fall in führender Ordnung in ihrem Abstandsvektor am selben Ort befinden. Da jede Ladung $\vec{e}^{\alpha\gamma}$ sich auf $(n-2)$ verschiedene Arten auf diesem Weg “zusammensetzen” läßt, erhält man als Ergebnis der Ausintegration (die Einzelheiten der Rechnung sind im Anhang D.2 ausgeführt) eine Renormierung der Fugazität y_Δ der Ladungen der Sorte $\vec{e}^{\alpha\gamma}$, da deren Dichte durch die zusätzlich entstehenden zusammengesetzten Ladungen erhöht wird:

$$\left(\frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl}\right)_{\vec{e}\vec{e}} = 2\pi(n-2) \tilde{y}_\Delta^2 \quad (4.16)$$

Ebenso lassen sich $\vec{e}^\alpha/\vec{e}^{\beta\alpha}$ -Paare bzw. $\vec{e}^{-\alpha}/\vec{e}^{\alpha\beta}$ -Paare ausintegrieren, indem sie durch Ladungen \vec{e}^β bzw. $\vec{e}^{-\beta}$ ersetzt werden. Jede Ladung \vec{e}^β bzw. $\vec{e}^{-\beta}$ läßt sich hier auf $(n-1)$ Arten zusammensetzen, so daß man analog folgende Renormierung für die Fugazität y_{gh} bekommt (Einzelheiten der Rechnung sind wieder in Anhang D.2 nachzuschlagen):

$$\left(\frac{d\tilde{y}_{gh}}{dl}\right)_{\vec{e}\vec{e}} = 2\pi(n-1) \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_{gh} \quad (4.17)$$

(ii) Im zweiten Schritt sind die Cutoffs in den Greenfunktionen $\tilde{G}(r) = \frac{1}{2\pi} \ln(r/a)$ in 4.11 auf ae^δ zu erhöhen. Dazu ist $\tilde{G}(r)$ umzuschreiben in

$$\tilde{G}(r) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{ae^\delta}\right) + \frac{1}{2\pi} \delta \quad .$$

Der zweite Summand gibt dann in der Zustandssumme zusätzliche exp-Faktoren der Form

$$\exp\left(\sum_{(\alpha,s_\alpha) \neq (\gamma,s_\gamma)} \left(\frac{p^2}{4\pi\tilde{K}} \vec{e}_{s_\alpha}^\alpha \cdot \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma + \frac{p^2\kappa}{4\pi} \vec{e}_{s_\alpha}^\alpha * \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma\right) \delta + \sum_{(\alpha\beta, n_{\alpha\beta}) \neq (\gamma\delta, n_{\gamma\delta})} \frac{p^2}{4\pi\tilde{K}} \vec{e}_{n_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta} \cdot \vec{e}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \delta + \sum_{(\alpha,s_\alpha), (\gamma\delta, n_{\gamma\delta})} \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} \vec{e}_{s_\alpha}^\alpha \cdot \vec{e}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \delta\right) \quad .$$

Werden die Ungleichheitsbedingungen für die Ladungen in den Summen in diesem Ausdruck fallengelassen, ergibt sich für das Argument der Exponentialfunktion 0 aufgrund der Neutralitätsbedingung 4.8, wenn diese in eine entsprechende Form

gebracht wird. Daher kann dieser Faktor auch geschrieben werden als (nach Entwicklung bis zur ersten Ordnung in δ)

$$\begin{aligned} & \exp \left(- \sum_{(\alpha, s_\alpha)} \left(\frac{p^2}{4\pi\tilde{K}} (\bar{e}_{s_\alpha}^\alpha)^2 + \frac{p^2\kappa}{4\pi} (\bar{e}_{s_\alpha}^\alpha)^{*2} \right) \delta - \sum_{(\alpha\beta, n_{\alpha\beta})} \frac{p^2}{4\pi\tilde{K}} (\bar{\varepsilon}_{n_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta})^2 \delta \right) \\ &= \prod_{\alpha=\pm 1}^{\pm n} \left(1 - \frac{p^2}{4\pi\tilde{K}} \delta \right)^{S^\alpha} \prod_{\alpha=\pm 1}^{\pm n} \left(1 - \frac{p^2\kappa}{4\pi} \delta \right)^{S^\alpha} \prod_{\alpha\neq\beta=\pm 1}^{\pm n} \left(1 - \frac{p^2\kappa}{4\pi} 2\delta \right)^{N^{\alpha\beta}} \end{aligned}$$

Diese zusätzlichen Faktoren in der Zustandssumme 4.11 führen zu einer Renormierung der Fugazitäten

$$\left(\frac{d\tilde{y}_{gh}}{dl} \right)_{(ii)} = \left(-\frac{p^2}{4\pi\tilde{K}} - \frac{p^2\kappa}{4\pi} \right) \tilde{y}_{gh} \quad (4.18)$$

$$\left(\frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl} \right)_{(ii)} = -\frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} \tilde{y}_\Delta \quad . \quad (4.19)$$

(iii) Beim Reskalieren kann auch in den dimensionslosen Größen $\tilde{y}_\Delta = y_\Delta a^2$ und $\tilde{y}_{gh} = y_{gh} a^2$ der Cutoff a vergrößert werden, was zu den RG-Gleichungen

$$\left(\frac{d\tilde{y}_{gh}}{dl} \right)_{(iii)} = 2\tilde{y}_{gh} \quad (4.20)$$

$$\left(\frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl} \right)_{(iii)} = 2\tilde{y}_\Delta \quad (4.21)$$

führt. Die Kopplungsmatrix wird nicht reskaliert.

Insgesamt erhält man mit 4.12–4.21 folgende RG-Flußgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{K}}{dl} &= \pi p^2 \tilde{y}_{gh}^2 + \pi p^2 n \tilde{y}_\Delta^2 \\ \frac{d\kappa}{dl} &= -\pi p^2 \tilde{y}_{gh}^2 \kappa \left(n\kappa + \frac{2}{\tilde{K}} \right) + \pi p^2 \tilde{y}_\Delta^2 \frac{1}{\tilde{K}^2} \\ \frac{d\tilde{y}_{gh}}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{4\pi\tilde{K}} - \frac{p^2\kappa}{4\pi} \right) \tilde{y}_{gh} + 2\pi(n-1) \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_{gh} \\ \frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} \right) \tilde{y}_\Delta + 2\pi(n-2) \tilde{y}_\Delta^2 \end{aligned}$$

Da zu Beginn der Rechnung eine MFA vorgenommen wurde, hat man nur eine RG-Gleichung für \tilde{y}_{gh} und nicht für die eigentlich interessierende Schichtkopplung

\tilde{g} aus dem Replikahamiltonian 4.2. Aus den Beziehungen

$$y_{gh} = \frac{1}{2} \tilde{g} h$$

$$h = \langle \cos(pu_{i+1}^\alpha) \rangle_{\mathcal{H}_{MF}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{g} h} \ln [Z^n]_{MF} = \sum_i \int d^2 r \sum_\alpha \langle \cos(pu_{i+1}^\alpha) \rangle_{\mathcal{H}_{MF}} = n \sum_i \int d^2 r h$$

ergeben sich jedoch (unter Beachtung der Tatsache, daß die MF-Zustandssumme invariant unter der RG ist, und durch Abzählen von Längenpotenzen) unmittelbar folgende Beziehungen zwischen den RG-Exponenten ($\tilde{y}_g := \frac{1}{2} \tilde{g} a^2$)

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \tilde{y}_{gh}}{dl} &= \frac{d \ln \tilde{y}_g}{dl} + \frac{d \ln h}{dl} \\ -\frac{d \ln \tilde{y}_{gh}}{dl} &= -2 + \frac{d \ln h}{dl} \\ \Rightarrow \frac{d \ln \tilde{y}_g}{dl} &= 2 \frac{d \ln \tilde{y}_{gh}}{dl} - 2 \quad , \end{aligned}$$

und mit der letzten Relation erhält man aus der RG-Gleichung für \tilde{y}_{gh} die RG-Gleichung für die Schichtkopplung \tilde{g} bzw. \tilde{y}_g :

$$\frac{d \tilde{y}_g}{dl} = \left(2 - \frac{p^2}{2\pi \tilde{K}} - \frac{p^2 \kappa}{2\pi} \right) \tilde{y}_g + 4\pi(n-1) \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_g$$

Im hier verwendeten Replikaformalismus sind diese Gleichungen im Limes $n \rightarrow 0$ zu betrachten, und man erhält

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d \tilde{K}}{dl} &= \pi p^2 \tilde{y}_{gh}^2 \\ \frac{d \kappa}{dl} &= -\pi p^2 \tilde{y}_{gh}^2 \frac{2\kappa}{\tilde{K}} + \pi p^2 \tilde{y}_\Delta^2 \frac{1}{\tilde{K}^2} \\ \frac{d \tilde{y}_{gh}}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{4\pi \tilde{K}} - \frac{p^2 \kappa}{4\pi} \right) \tilde{y}_{gh} - 2\pi \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_{gh} \\ \frac{d \tilde{y}_\Delta}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{2\pi \tilde{K}} \right) \tilde{y}_\Delta - 4\pi \tilde{y}_\Delta^2 \\ \frac{d \tilde{y}_g}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{2\pi \tilde{K}} - \frac{p^2 \kappa}{2\pi} \right) \tilde{y}_g - 4\pi \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_g \end{aligned}} \quad (4.22)$$

Dabei ist κ nach 4.9 durch

$$\kappa = -\frac{K - \tilde{K}}{[n(K - \tilde{K}) + \tilde{K}] \tilde{K}} \stackrel{n \rightarrow 0}{=} -\frac{K - \tilde{K}}{\tilde{K}^2}$$

gegeben. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß diese RG-Gleichungen wie auch die RG-Gleichungen vor dem Übergang $n \rightarrow 0$ im Fall $\tilde{y}_{gh} \equiv \tilde{y}_g \equiv 0$ mit den Gleichungen von C&O übereinstimmen, wie man leicht nachrechnet.

4.3.4 Diskussion des RG-Flusses

Zur Diskussion des von den RG-Gleichungen 4.22 generierten Flusses der Kopplungen \tilde{y}_g und \tilde{y}_Δ ist es zweckmäßig, etwas übersichtlichere Größen

$$\eta(l) := \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} \quad \text{und} \quad \tilde{\kappa}(l) := \frac{p^2\kappa}{2\pi}$$

einzuführen, mit denen die Gleichungen 4.22 sich schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dl} &= -2\pi^2\eta^2 \tilde{y}_{gh}^2 \\ \frac{d\tilde{\kappa}}{dl} &= -4\pi^2\eta\tilde{\kappa} \tilde{y}_{gh}^2 + 2\pi^2\eta^2 \tilde{y}_\Delta^2 \\ \frac{d\tilde{y}_{gh}}{dl} &= \left(2 - \frac{\eta}{2} - \frac{\tilde{\kappa}}{2} - 2\pi\tilde{y}_\Delta\right) \tilde{y}_{gh} \\ \frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl} &= (2 - \eta) \tilde{y}_\Delta - 4\pi \tilde{y}_\Delta^2 \\ \frac{d\tilde{y}_g}{dl} &= (2 - \eta - \tilde{\kappa} - 4\pi\tilde{y}_\Delta) \tilde{y}_g \end{aligned}$$

Dabei sind Anfangsbedingungen

$$\eta(0) \lesssim 2 \quad \text{und} \quad \tilde{\kappa}(0) = 0 \quad (\text{wegen } \tilde{K}(0) = K(0))$$

zu beachten, wie bereits am Ende des Kapitels 4.1 herausgestellt wurde. Die Anfangsbedingung für die Fugazität y_{gh}

$$y_{gh}(0) = \frac{1}{2}\tilde{g}h = \frac{1}{2}\tilde{g}\langle \cos(pu_{i+1}^\alpha) \rangle_{\mathcal{H}_{MF}}$$

ist noch auszuwerten, bevor der Fluß betrachtet werden kann. Die MFA und die Abbildung auf ein Coulombgas können nur im Bereich $\tilde{g} \ll 1$ und $y_{gh} \ll 1$ gute Ergebnisse liefern aus den bereits genannten Gründen. In diesem Sinne sind die RG-Gleichungen auch als Entwicklung in diesen Größen anzusehen. Daher erscheint es nicht sinnvoll, $y_{gh}(0)$ in höherer Ordnung als der ersten in \tilde{g} auszuwerten. Dann kann wiederum in obiger Gleichung die Mittelung mit \mathcal{H}_{MF} bei $\tilde{g} = 0$ vorgenommen werden, und wir können abermals die Resultate aus Kapitel 3.3 verwenden (insbesondere Gleichung 3.16 mit $D = 0$):

$$\begin{aligned} y_{gh}(0) &= \frac{1}{2}\tilde{g} \langle \cos(p(u_{i+1}^\alpha - u_i^\alpha)) \rangle_{\tilde{g}=0} + \mathcal{O}(\tilde{g}^2) \\ &\stackrel{C.9}{=} \frac{1}{2}\tilde{g} \exp\left(-\frac{p^2}{2}\langle u_i^{\alpha 2} \rangle_{\tilde{g}=0}\right) + \mathcal{O}(\tilde{g}^2) \\ &\stackrel{3.16}{=} \frac{1}{2}\tilde{g} \left(\frac{L}{a}\right)^{-\frac{\eta}{2}\left(1 - \frac{K_{gs}}{\tilde{K}} - \pi^2\eta\tilde{y}_\Delta^{*2} \ln\left(\frac{L}{a}\right)\right)} + \mathcal{O}(\tilde{g}^2) \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß mit $L/a \tilde{y}_{gh}(0)$ beliebig klein gemacht werden kann gegenüber $\tilde{y}_\Delta(0)$ und $\tilde{y}_g(0)$. Dann ist es gerechtfertigt, sich in den RG-Gleichungen auf die erste Ordnung in \tilde{y}_{gh} zu beschränken, also die Gleichungen in \tilde{y}_{gh} zu linearisieren. Bei der Diskussion des Flusses von \tilde{y}_Δ und \tilde{y}_g kann dann von folgenden RG-Gleichungen ausgegangen werden (die Gleichung für \tilde{y}_{gh} selber ist dabei nicht mehr von Interesse):

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dl} &= 0 \\ \frac{d\tilde{\kappa}}{dl} &= 2\pi^2\eta^2 \tilde{y}_\Delta^2 \\ \frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl} &= (2 - \eta) \tilde{y}_\Delta - 4\pi \tilde{y}_\Delta^2 \\ \frac{d\tilde{y}_g}{dl} &= (2 - \eta - \tilde{\kappa} - 4\pi\tilde{y}_\Delta) \tilde{y}_g\end{aligned}$$

Unter den RG-Gleichungen bleibt η also in dieser Näherung invariant und \tilde{y}_Δ nimmt seinen C&O-Fixpunktwert

$$\tilde{y}_\Delta^* = \frac{1}{4\pi}(2 - \eta)$$

an, wenn mit Unordnung ($\tilde{y}_\Delta(0) > 0$) gerechnet wird. Ohne Unordnung bleibt $\tilde{y}_\Delta^* = 0$.

Für $\tilde{\kappa}$ wird dann für große l folgende Asymptotik gelten

$$\tilde{\kappa}(l) = \tilde{\kappa}_{as} + 2\pi^2\eta^2 \tilde{y}_\Delta^{*2} l$$

gelten. Für \tilde{y}_g liest man dann unmittelbar folgenden asymptotischen RG-Exponenten ab:

$$\begin{aligned}\lambda_g &= 2 - \eta - \tilde{\kappa}(l) - 4\pi\tilde{y}_\Delta^* \\ &= \begin{cases} -\tilde{\kappa}(l) = -\tilde{\kappa}_{as} - 2\pi^2\eta^2 \tilde{y}_\Delta^{*2} l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} < 0 & \text{für } \tilde{y}_\Delta^* > 0 \\ 2 - \eta - \tilde{\kappa}(l) = 2 - \eta - \tilde{\kappa}_{as} > 0 & \text{für } \tilde{y}_\Delta^* = 0 \end{cases} \quad (4.23)\end{aligned}$$

Im ersten Fall ist \tilde{y}_g und damit auch \tilde{g} *irrelevant* und die Kopplungen \tilde{y}_g und \tilde{y}_Δ fließen unter dem RG-Fluß zum stabilen C&O-Fixpunkt mit $\tilde{y}_g^* = 0$. Das System aus gekoppelten Schichten zerfällt also bei schwacher Schichtkopplung in *ungekoppelte 2-dimensionale Vortex-Gläser*. Dieses Resultat ist für den C&O-Fixpunkt bereits im vorangehenden Kapitel 4.2 erhalten worden, die RG-Rechnung kann diese Ergebnisse also reproduzieren.

Der zweite Fall ist der von M&K untersuchte, wo \tilde{y}_g *relevant* ist. M&K haben für diesen Fall argumentiert, daß bei weiter anwachsendem \tilde{y}_g unter der RG ein

Abbildung 4.2: RG-Flußdiagramm für die Gleichungen 4.22

Crossover zu einem 3-dimensionalen elastischen Modell stattfinden wird.

Weitere Fixpunkte außer dem C&O-Fixpunkt mit $\tilde{y}_g^* = 0$ und dem Fixpunkt $\tilde{y}_\Delta^* = 0 = \tilde{y}_g^*$ finden sich in diesen RG-Gleichungen nicht.

Insgesamt kann man dann für das betrachtete Modell in MFA ein Flußdiagramm wie in Abbildung 4.2 skizziert angeben, daß für kleine Schichtkopplungen \tilde{y}_g eine gute Näherung darstellen sollte.

4.4 Zusammenfassung

Die Ergebnisse aus den Kapiteln 4.2 und 4.3 lassen sich in Kürze folgendermaßen zusammenfassen:

- Der Replikahamiltonian 4.2, der ein gestapeltes System aus gekoppelten Schichten mit FL-Gittern mit Unordnung beschreibt, wurde zunächst einmal für *schwache* Schichtkopplungen, d.h. kleine \tilde{g} untersucht. Dies geschah vor allem im Hinblick auf die Frage nach wechselseitiger Beeinflussung durch die Unordnung, das System ohne Unordnung wurde bereits von M&K untersucht.
- Zwei voneinander unabhängige Rechnungen zeigten übereinstimmend, daß am C&O-Fixpunkt eine hinreichend schwache Schichtkopplung *irrelevant* ist. Dies kann dahingehend gedeutet werden, daß das System in Anwesenheit von Unordnung in *ungekoppelte 2-dimensionale Vortex-Gläser* zerfällt bei schwacher Schichtkopplung. Damit tritt in dieser Form auch in dem 3-dimensionalen System schwach gekoppelter gestapelter Schichten eine Vortex-Glas-Phase auf.
- Nach einer MFA war es in Kapitel 4.3 möglich, nach einer Abbildung auf ein Coulombgas aus Vektorladungen RG-Gleichungen zu finden und den RG-Fluß zu bestimmen für Unordnungs- und Schichtkopplung. Mit Unordnung

führt der RG-Fluß immer zum C&O-Fixpunkt, ohne Unordnung reproduziert man das von M&K [25] gefundene Verhalten, jeweils bei schwacher Schichtkopplung. Weitere nichttriviale Fixpunkte existieren nicht.

Kapitel 5

Vortex-Glas-Phase in zwei gekoppelten Schichten

Im letzten Kapitel sind die Flußliniengitter von vielen gestapelten Schichten mit Unordnung untersucht worden, wobei benachbarte Schichten gekoppelt waren. Eine RG-Transformation konnte allerdings erst nach einer Mean-Field-Approximation hergeleitet werden. Da auf diese Art gewonnene Ergebnisse aufgrund der MFA nur für sehr schwache Schichtkopplungen gültig sind, soll in diesem Kapitel versucht werden, eine RG-Transformation herzuleiten, ohne zuvor eine MFA durchzuführen. Um das Problem rechentechnisch handhaben zu können, werden aber nur *zwei Schichten* betrachtet, für die möglichst exakt gerechnet werden soll. Die RG-Transformation wird auch hier durch Abbildung auf ein Coulombgas hergeleitet.

Diese Rechnung bestätigt die bereits gewonnenen Resultate, daß eine hinreichend schwache Kopplung zwischen den Schichten in Anwesenheit von Unordnung irrelevant ist. Ist die Schichtkopplung groß gegenüber der von der Unordnung generierten Kopplung, findet man nun hingegen, daß die Schichtkopplung relevant ist.

Die Abbildung auf ein Coulombgas stellt jedoch nur für kleine Schichtkopplungen eine gute Näherung dar. Der Bereich starker Schichtkopplungen muß daher noch einmal gesondert betrachtet werden. Dies geschieht in einer harmonischen Approximation, wobei sich die Schichtkopplung als relevant erweist.

Zum Abschluß wird eine Rechnung mit funktionaler Renormierung präsentiert, wobei die Schichten als $(4 - \epsilon)$ -dimensional angesehen werden. Sie ergibt in Übereinstimmung mit den anderen Ergebnissen, daß eine hinreichend schwache Schichtkopplung bei Unordnung in 2 Dimensionen ($\epsilon = 2$) irrelevant ist.

5.1 Replikahamiltonian für zwei gekoppelte Schichten und Abbildung auf ein Coulombgas

Auch für zwei Schichten gehen wir aus vom im Kapitel 4.1 (Seite 73) abgeleiteten Replikahamiltonian 4.2 für gekoppelte FL-Gitter in gestapelten Schichten. Ein solches 2-Schicht-System braucht nicht unbedingt nur als relativ einfach zu handhabender Spezialfall des ursprünglichen Systems aus unendlich vielen gestapelten Schichten angesehen zu werden. Es ist auch experimentell direkt realisierbar als doppelter großflächiger Josephson-Kontakt, wobei zwei dünne Schichten aus Typ-II Supraleitern zwischen Typ-I Supraleitern liegen (siehe Skizze). Mit

Abbildung 5.1: 2-Schicht-System

dem Schichtabstand variiert auch (siehe 4.1) die Kopplung zwischen den beiden Schichten, wobei der Abstand groß genug sein soll ($> \xi_{\perp}$), um zu gewährleisten, daß die FL's in den Typ-II Schichten nur über ihre Magnetfelder wechselwirken, wie das auch im vorigen Kapitel vorausgesetzt wurde.

Wie in Kapitel 4.3 soll aber auch hier auf die Anisotropieterme verzichtet werden, um die Rechnungen nicht zu kompliziert werden zu lassen (dieser Verzicht ist mit den gleichen Argumenten wie dort zu rechtfertigen). Im Fall zweier Schichten ($i = 1, 2$) und mit $D = 0$ wird aus 4.2:

$$\mathcal{H}_2 = \int d^2r \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} K^{\alpha\beta} \nabla u_i^{\alpha} \cdot \nabla u_i^{\beta} - \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha,\beta} y_{\Delta} \cos(p(u_i^{\alpha} - u_i^{\beta})) - \sum_{\alpha} \tilde{g} \cos(p(u_1^{\alpha} - u_2^{\alpha})) \right\} , \quad (5.1)$$

Dieses Modell kann auf ein Coulombgas aus Vektorladungen abgebildet werden. Dabei werden die gleichen Methoden wie bei der Rechnung in MFA in Kapitel 4.3.2 verwendet. Da die Argumentation im Prinzip dieselbe bleibt, wird die Darstellung an einigen Stellen weniger ausführlich sein.

Auch auf die Zustandssumme für diesen Hamiltonian können die Standardmethoden aus [20]–[22] angewandt werden, um mit der Beziehung 4.7 für kleine Kopplungen y_{Δ} und \tilde{g} die Zustandssumme als Summation über Konfigurationen

von quasi-topologischen Ladungen zu schreiben. Man bekommt

$$\begin{aligned}
[Z^n] &= \prod_{j=1}^2 \prod_{\gamma=1}^n \int \mathcal{D}u_j^\gamma \exp(-\mathcal{H}_2) \\
&= \prod_{j=1}^2 \prod_{\gamma=1}^n \int \mathcal{D}u_j^\gamma \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^2r \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha,\beta} K^{\alpha\beta} \nabla u_i^\alpha(r) \cdot \nabla u_i^\beta(r)\right) \times \\
&\times \sum_{\{s_i^\alpha(r)\}} \exp\left(\int d^2r \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha} u_i^\alpha(r) [ip s_i^\alpha(r)] + \int d^2r \sum_{\alpha} \ln y_g (s_1^\alpha(r))^2\right) \times \\
&\times \sum_{\{n_i^{\alpha\beta}(r)\}} \exp\left(\int d^2r \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha} u_i^\alpha(r) [ip \sum_{\beta} n_i^{\alpha\beta}(r)] + \right. \\
&\quad \left. + \int d^2r \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha < \beta} \ln y_{\Delta} (n_i^{\alpha\beta}(r))^2\right)
\end{aligned}$$

mit $y_g := \frac{1}{2} \tilde{g}$ und

$$n_i^{\beta\alpha}(r) = -n_i^{\alpha\beta}(r) \quad \text{und} \quad s_1^\alpha(r) = -s_2^\alpha(r) =: s^\alpha(r) \quad .$$

Nach Ausführung der gaußschen Integration über die Felder u_j^γ ergibt sich

$$\begin{aligned}
[Z^n] &= \sum'_{\{s_i^\alpha(r)\}} \sum'_{\{n_i^{\alpha\beta}(r)\}} \exp\left(\int d^2r \sum_{\alpha} \ln y_g (s_1^\alpha(r))^2 + \right. \\
&\quad \left. + \int d^2r \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha < \beta} \ln y_{\Delta} (n_i^{\alpha\beta}(r))^2\right) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{p^2}{2} \int d^2r \int d^2r' \sum_{i,j=1}^2 \sum_{\alpha,\beta} [s_i^\alpha(r) + \sum_{\gamma} n_i^{\alpha\gamma}(r)] [(K^{-1})_{ij}^{\alpha\beta} G(r-r')] \times \right. \\
&\quad \left. \times [s_j^\beta(r') + \sum_{\delta} n_j^{\beta\delta}(r')] \right) \quad .
\end{aligned}$$

Genau wie bei der Rechnung in Kapitel 4.3.2 hat man hier eine entsprechende Neutralitätsbedingung, die bewirkt, daß die Selbstenergie der Ladungen nicht unendlich groß wird, sondern verschwindet. Wir können dann wieder die Greenfunktion \tilde{G} mit $\tilde{G}(r) = \frac{1}{2\pi} \ln(\frac{r}{a})$ und $\tilde{G}(0) = 0$ verwenden und dadurch eine Beschränkung der Ladungs-Konfigurationen auf solche mit einem Mindestabstand a zwischen den Ladungen einführen.

Für kleine y_{Δ} und y_g ist es auch hier möglich, sich auf Einheitsladungen zu beschränken, die dann das weitaus größte Boltzmann-Gewicht haben.

Es ist zu beachten, daß in obiger Formel eine Kopplungsmatrix $K_{ij}^{\alpha\beta}$ eingeführt wurde, die sich i.a. vom ursprünglich dort stehenden $K^{\alpha\beta} \delta_{ij}$ (wobei $K^{\alpha\beta}$ der von

C&O benutzte Ansatz aus den vorangehenden Kapiteln ist) unterscheidet, wenn man alle Terme, die unter der RG aufgrund der Schichtkopplung generiert werden, berücksichtigen will. Da das Problem invariant ist unter beliebiger Permutation der Replika (wenn man Replikasymmetriebrechung außer Betracht läßt, was auch in allen bisherigen Rechnungen implizit getan wurde) und unabhängig davon auch unter einer Permutation der Schichten, muß auch die Kopplungsmatrix diese Permutationsinvarianzen besitzen. Der allgemeinste, diesen Bedingungen genügende Ansatz für die Kopplungsmatrix ist dann von der Form

$$K_{ij}^{\alpha\beta} = \tilde{K}\delta^{\alpha\beta}\delta_{ij} + (K - \tilde{K})\delta_{ij} + \tilde{L}\delta^{\alpha\beta} + (L - \tilde{L}) \quad .$$

Das Inverse muß die gleichen Permutationssymmetrien besitzen und daher von der gleichen Form sein, also folgendem Ansatz genügen (wobei λ nicht mit der Eindringtiefe zu verwechseln ist):

$$(K^{-1})_{ij}^{\alpha\beta} = a\delta^{\alpha\beta}\delta_{ij} + \kappa\delta_{ij} + \lambda\delta^{\alpha\beta} + \tau \quad .$$

Man rechnet nun leicht nach, daß

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\tilde{K}} & \kappa &= -\frac{K - \tilde{K}}{\tilde{K}^2} & \lambda &= -\frac{\tilde{L}}{\tilde{K}(\tilde{K} + 2\tilde{L})} \\ \tau &= \frac{1}{\tilde{K}^2} \frac{2(K - \tilde{K})\tilde{L} + 2\tilde{L}(L - \tilde{L}) + n(K - \tilde{K})(L - \tilde{L})}{2\tilde{L} + n(K - \tilde{K})} \quad . \end{aligned}$$

Zu Beginn der Renormierung gilt $\tilde{K}(0) = K(0)$ und $\tilde{L}(0) = L(0) = 0$ bzw. $\kappa(0) = 0$, $\lambda(0) = 0$ und $\tau(0) = 0$.

Die Zustandssumme läßt sich dann schreiben als (unter Verwendung von $n_i^{\beta\alpha}(r) = -n_i^{\alpha\beta}(r)$ und $s_1^\alpha(r) = -s_2^\alpha(r) =: s^\alpha(r)$)

$$\begin{aligned} [Z^n] &= \sum_{\{s^\alpha(r)\}} ' \sum_{\{n_i^{\alpha\beta}(r)\}} ' \exp \left(\int d^2r \sum_\alpha \ln y_g (s^\alpha(r))^2 + \right. \\ &\quad \left. + \int d^2r \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha < \beta} \ln y_\Delta (n_i^{\alpha\beta}(r))^2 \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(\int \int_{r \neq r'} d^2r d^2r' \tilde{G}(r - r') \frac{p^2}{2} \left[\frac{2}{\tilde{K}} \sum_\alpha s^\alpha(r) s^\alpha(r') + 2\kappa \sum_{\alpha, \beta} s^\alpha(r) s^\beta(r') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\tilde{K}} + \lambda \right) \sum_{\alpha, \gamma, \delta} n_1^{\alpha\gamma}(r) n_1^{\alpha\delta}(r') + \left(\frac{1}{\tilde{K}} + \lambda \right) \sum_{\alpha, \gamma, \delta} n_2^{\alpha\gamma}(r) n_2^{\alpha\delta}(r') + 2\lambda \sum_{\alpha, \gamma, \delta} n_1^{\alpha\gamma}(r) n_2^{\alpha\delta}(r') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{\tilde{K}} \sum_{\alpha\gamma} s^\alpha(r) n_1^{\alpha\gamma}(r') - \frac{2}{\tilde{K}} \sum_{\alpha\gamma} s^\alpha(r) n_2^{\alpha\gamma}(r') \right] \right) \quad . \end{aligned} \quad (5.2)$$

An dieser Stelle sollen wie in 4.3.2 Vektorladungen und dazugehörige Skalarprodukte eingeführt werden, um dies als großkanonische Zustandssumme eines

2-dimensionalen Gases aus wechselwirkenden Vektorladungen zu schreiben. Man kann sich auch hier auf Einheitsladungen beschränken mit Fugazitäten y_g und y_Δ ; mit den Skalarprodukten (i)–(iii) aus 4.3.2 führt dies sofort auf einen zu 4.11 analogen Ausdruck für die Zustandssumme, der durch Interpretation von 5.2 als großkanonische Zustandssumme eines 2-dimensionalen Gases aus Vektoreinheitsladungen zustandekommt:

$$\begin{aligned}
[Z^n] &= \sum'_{\{N_i^{\alpha\beta}\}} \sum'_{\{S^{\pm\gamma}\}} \left\{ \prod_{\alpha \neq \beta=1}^n \prod_{\gamma=\pm 1}^{\pm n} \left(\frac{y_g^{S\gamma}}{S\gamma!} \frac{y_\Delta^{N_1^{\alpha\beta}}}{N_1^{\alpha\beta}!} \frac{y_\Delta^{N_2^{\alpha\beta}}}{N_2^{\alpha\beta}!} \right) \right\} \times \\
&\times \left\{ \prod_{\alpha \neq \beta=1}^n \prod_{n_{\alpha\beta 1}=1}^{N_1^{\alpha\beta}} \int d^2 r_{n_{\alpha\beta 1}}^{\alpha\beta} \prod_{\alpha \neq \beta=1}^n \prod_{n_{\alpha\beta 2}=1}^{N_2^{\alpha\beta}} \int d^2 r_{n_{\alpha\beta 2}}^{\alpha\beta} \prod_{\gamma=\pm 1}^{\pm n} \prod_{s_\gamma=1}^{S\gamma} \int d^2 r_{s_\gamma}^\gamma \exp(-\mathcal{H}_{C,2}) \right\}, \\
\exp(-\mathcal{H}_{C,2}) &= \left(\frac{1}{2} \sum_{(\alpha, s_\alpha) \neq (\gamma, s_\gamma)} \left(\frac{2p^2}{\tilde{K}} \bar{e}_{s_\alpha}^\alpha \cdot \bar{e}_{s_\gamma}^\gamma + 2p^2 \kappa \bar{e}_{s_\alpha}^\alpha * \bar{e}_{s_\gamma}^\gamma \right) \tilde{G}(\bar{r}_{s_\alpha}^\alpha - \bar{r}_{s_\gamma}^\gamma) + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{(\alpha\beta, n_{\alpha\beta 1}) \neq \\ (\gamma\delta, n_{\gamma\delta 1})}} p^2 \left(\frac{1}{\tilde{K}} + \lambda \right) \bar{\varepsilon}_{n_{\alpha\beta 1}}^{\alpha\beta} \cdot \bar{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta 1}}^{\gamma\delta} \tilde{G}(\dots) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{(\alpha\beta, n_{\alpha\beta 2}) \neq \\ (\gamma\delta, n_{\gamma\delta 2})}} p^2 \left(\frac{1}{\tilde{K}} + \lambda \right) \bar{\varepsilon}_{n_{\alpha\beta 2}}^{\alpha\beta} \cdot \bar{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta 2}}^{\gamma\delta} \tilde{G}(\dots) \\
&+ \sum_{(\alpha\beta, n_{\alpha\beta 1}), (\gamma\delta, n_{\gamma\delta 2})} p^2 \lambda \bar{\varepsilon}_{n_{\alpha\beta 1}}^{\alpha\beta} \cdot \bar{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta 2}}^{\gamma\delta} \tilde{G}(\dots) \\
&+ \left. \sum_{(\alpha, s_\alpha), (\gamma\delta, n_{\gamma\delta 1})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \bar{e}_{s_\alpha}^\alpha \cdot \bar{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta 1}}^{\gamma\delta} \tilde{G}(\dots) - \sum_{(\alpha, s_\alpha), (\gamma\delta, n_{\gamma\delta 2})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \bar{e}_{s_\alpha}^\alpha \cdot \bar{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta 2}}^{\gamma\delta} \tilde{G}(\dots) \right) \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist etwas kompliziert und in dieser Form auch nicht direkt einer RG-Rechnung analog zum MF-Modell in Kapitel 4.3.3 zu unterwerfen. Es ergibt sich allerdings ein einfacheres, bei der Herleitung der RG-Gleichungen besser durchschaubares Bild, wenn man zu einer Art Schwerpunkts- und Relativkoordinatenbeschreibung übergeht (für die im Kapitel 5.5 eine anschauliche Deutung gegeben wird), indem man in 5.2 eine Zerlegung

$$\begin{aligned}
n_1^{\alpha\beta}(r) &= \frac{1}{2} n_+^{\alpha\beta}(r) + \frac{1}{2} n_-^{\alpha\beta}(r) \\
n_2^{\alpha\beta}(r) &= \frac{1}{2} n_+^{\alpha\beta}(r) - \frac{1}{2} n_-^{\alpha\beta}(r)
\end{aligned}$$

vornimmt. Dies entkoppelt die Wechselwirkungen zwischen den Ladungen teilweise, und man erhält für den [...] geklammerten Ausdruck in 5.2:

$$\left[\frac{2}{\tilde{K}} \sum_\alpha s^\alpha(r) s^\alpha(r') + 2\kappa \sum_{\alpha, \beta} s^\alpha(r) s^\beta(r') + \right.$$

$$+ \frac{1}{2\tilde{K}} \sum_{\alpha,\gamma,\delta} n_-^{\alpha\gamma}(r) n_-^{\alpha\delta}(r') + \frac{2}{\tilde{K}} \sum_{\alpha\gamma} s^\alpha(r) n_-^{\alpha\gamma}(r') + \left(\frac{1}{2\tilde{K}} + \lambda \right) \sum_{\alpha,\gamma,\delta} n_+^{\alpha\gamma}(r) n_+^{\alpha\delta}(r') \Big]$$

Vergleich mit dem entsprechenden Ausdruck in 5.2 zeigt, daß durch diese Transformation die Ladungen dahingehend entkoppelt wurden, daß die s^α -Ladungen nur noch mit den $n_-^{\alpha\beta}$ -Ladungen wechselwirken, während die $n_+^{\alpha\beta}$ -Ladungen an keine der anderen beiden Sorten koppelt.

Beim Übergang zu einem mit entsprechenden Vektorladungen $\vec{\varepsilon}_+$ und $\vec{\varepsilon}_-$ formulierten Ausdruck als großkanonische Zustandssumme ist aber zu beachten, daß aufgrund ihrer obigen Definition die n_+ - und n_- -Ladungen immer zusammen auftreten. Dies ist im Vektorladungsbild dann so zu deuten, daß die $\vec{\varepsilon}_i$ -Ladungen zerlegt werden in

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} &= \vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} + \vec{\varepsilon}_-^{\alpha\beta} \\ \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta} &= \vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} - \vec{\varepsilon}_-^{\alpha\beta} \quad , \end{aligned}$$

wobei man den $\vec{\varepsilon}_+$ -Teil als ‘‘Schwerpunktsteil’’ und den $\vec{\varepsilon}_-$ -Teil als ‘‘Relativteil’’ bezeichnen könnte. Außerdem zeigt sich, daß bei der Zerlegung der Schwerpunktsteil $\vec{\varepsilon}_+$ weder mit dem Relativteil $\vec{\varepsilon}_-$ noch mit den \vec{e} -Ladungen wechselwirkt. Zur Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen den $\vec{\varepsilon}_+$ -, $\vec{\varepsilon}_-$ - und \vec{e} -Ladungen können also die bereits in Kapitel 4.3.2 definierten Skalarprodukte für $\vec{\varepsilon}$ und \vec{e} verwendet werden, wenn man zusätzlich

$$\vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}_-^{\gamma\delta} := 0 \quad \text{und} \quad \vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} \cdot \vec{e}^\gamma := 0$$

definiert. Für die Wechselwirkungsvorfaktoren aus 5.3 (für die im folgenden die Schreibweise mit dem Symbol \circ verwendet wird) erhält man dann folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned} \vec{e}^\alpha \circ \vec{e}^\gamma &:= &= \frac{2p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}^\gamma + 2p^2 \kappa \vec{e}^\alpha * \vec{e}^\gamma \\ \vec{\varepsilon}_i^{\alpha\beta} \circ \vec{\varepsilon}_i^{\gamma\delta} &:= p^2 \left(\frac{1}{\tilde{K}} + \lambda \right) \vec{\varepsilon}_i^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}_i^{\gamma\delta} &= p^2 \left(\frac{1}{2\tilde{K}} + \lambda \right) \vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}_+^{\gamma\delta} + \frac{p^2}{2\tilde{K}} \vec{\varepsilon}_-^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}_-^{\gamma\delta} \\ \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} \circ \vec{\varepsilon}_2^{\gamma\delta} &:= p^2 \lambda \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}_2^{\gamma\delta} &= p^2 \left(\frac{1}{2\tilde{K}} + \lambda \right) \vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}_+^{\gamma\delta} - \frac{p^2}{2\tilde{K}} \vec{\varepsilon}_-^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}_-^{\gamma\delta} \\ \vec{e}^\alpha \circ \vec{\varepsilon}_1^{\gamma\delta} &:= \frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{\varepsilon}_1^{\gamma\delta} &= \frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{\varepsilon}_-^{\gamma\delta} \\ \vec{e}^\alpha \circ \vec{\varepsilon}_2^{\gamma\delta} &:= -\frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{\varepsilon}_2^{\gamma\delta} &= \frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{\varepsilon}_-^{\gamma\delta} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Unter Zuhilfenahme dieser Transformation der Vektorladungen soll nun eine RG-Transformation gefunden werden. Dabei wird im Prinzip versucht, genauso zu verfahren wie schon beim MF-Modell im Kapitel 4.3.3. Allerdings werden einige Modifikationen nötig sein.

5.2 RG-Gleichungen für zwei Schichten

Auch hier müssen bei der Vergrößerung des Cutoffs von a auf ae^δ in der RG-Transformation die zu Beginn von Kapitel 4.3.3 genannten drei Schritte durchgeführt werden. Der erste Schritt besteht darin, in der Zustandssumme 5.3 Ladungskonfigurationen auszuintegrieren, in denen sich zwei Ladungen mit negativem Skalarprodukt nahekommen bis auf Entfernungen $a \leq |\vec{r} - \vec{r}'| \leq ae^\delta$. Diese Paar-Konfigurationen mit großem Boltzmann-Gewicht sind mit den im vorangehenden Kapitel eingeführten Vektorladungen die folgenden:

$$\begin{aligned} & \vec{e}^\alpha / \vec{e}^{-\alpha}\text{-Paare} \quad , \\ & \vec{\varepsilon}_i^{\alpha\beta} / \vec{\varepsilon}_j^{\beta\alpha}\text{-Paare} \quad , \quad \vec{\varepsilon}_i^{\alpha\beta} / \vec{\varepsilon}_j^{\beta\gamma}\text{-Paare} \quad , \\ & \vec{e}^\alpha / \vec{\varepsilon}_1^{\beta\alpha}\text{-Paare} \quad , \quad \vec{e}^{-\alpha} / \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta}\text{-Paare} \quad , \\ & \vec{e}^\alpha / \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta}\text{-Paare} \quad , \quad \vec{e}^{-\alpha} / \vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha}\text{-Paare} \quad . \end{aligned}$$

Beim Ausintegrieren einiger dieser Konfigurationen ergeben sich jedoch Probleme. So können $\vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} / \vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha}$ -Paare und $\vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} / \vec{\varepsilon}_2^{\beta\gamma}$ -Paare nicht mit den im MF-Modell benutzten Methoden aus [20],[21] ausintegriert werden. Diese Paarkonfigurationen haben aber eine schwächere Wechselwirkung im Vergleich zu den anderen Paarkonfigurationen, solange

$$\lambda \ll \frac{1}{K}$$

gilt, wie aus 5.3 ersichtlich ist (der entsprechende Vorfaktor ist $p^2\lambda$ im Vergleich zu den anderen Vorfaktoren, die Vielfache von $\frac{v^2}{K}$ sind). Zu Beginn der RG-Transformation gilt sogar $\lambda(0) = 0$, und diese Wechselwirkungen verschwinden. Beiträge von derartigen Paaren zu den RG-Gleichungen werden daher vernachlässigt, was eine gute Näherung bleibt, wenn nicht durch Renormierung λ stark anwächst.

Auch die $\vec{e}^\alpha / \vec{\varepsilon}_1^{\beta\alpha}$ -Paare und die anderen drei Paare entsprechender Bauart aus obiger Liste sind mit den bisher benutzten Methoden nicht auf direktem Wege auszuintegrieren. Beiträge dieser Paare zu den RG-Gleichungen können aber nicht mehr ohne Weiteres vernachlässigt werden. Solche Paare sollen aus diesem Grund explizit mitgeführt werden in Form einer Ersatzladung $\vec{\mu}$, die auf diesem Wege als eine neue Ladungssorte eingeführt werden soll. Unter Einbeziehung dieser Hilfsladungen $\vec{\mu}$ kann die Zustandssumme dann mit den bekannten Methoden renormiert werden.

Die Hilfsladung $\vec{\mu}$ soll so definiert sein, daß die entsprechenden Paare, die man sich in führender Ordnung in ihrem Abstandsvektor am selben Platz befindlich vorzustellen hat, mit dritten Vektorladungen genauso wechselwirken wie die zugehörige neu eingeführte Ersatzladung $\vec{\mu}_i^{\alpha\beta}$.

Auch für die Ersatzladung $\vec{\mu}$ soll eine Zerlegung in einen ‘‘Schwerpunktsteil’’ und einen ‘‘Relativteil’’ vorgenommen werden. Aufgrund der Entkopplung des

Schwerpunktsanteils $\vec{\varepsilon}_+$ der Ladungen $\vec{\varepsilon}_i$ von den $\vec{\varepsilon}$ -Ladungen ist klar, daß die zusammengesetzten Ladungen $\vec{\mu}_i$ den gleichen Schwerpunktteil wie die entsprechende $\vec{\varepsilon}_i$ -Ladungen haben werden, aus denen sie durch Paarung mit einer $\vec{\varepsilon}$ -Ladung hervorgehen sollen. Der Relativanteil $\vec{\mu}_-$ bestimmt sich dann aus dem Zusammenschluß der $\vec{\varepsilon}$ -Ladung mit dem Relativanteil $\vec{\varepsilon}_-$ der $\vec{\varepsilon}$ -Ladung. Der Relativanteil $\vec{\mu}_-$ wechselwirkt nur mit anderen Relativteilen und den $\vec{\varepsilon}$ -Ladungen, und zwar ergeben sich zur Beschreibung dieser Wechselwirkungen die Definitionen folgender Skalarprodukte für die Vektorladung $\vec{\mu}_-$ (man kann auch $\vec{\mu}_-^{\alpha\beta} = \vec{\mu}_-^{\beta\alpha}$ festlegen):

$$\begin{aligned}
\vec{e}^\alpha \cdot \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} &:= \delta_{\alpha\gamma} + \delta_{\alpha\delta} \\
\vec{e}^\alpha * \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} &:= 2 \\
\vec{\varepsilon}_-^{\alpha\beta} \cdot \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} &:= \delta_{\alpha\gamma} - \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} - \delta_{\beta\gamma} \\
\vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} \cdot \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} &:= 0 \\
\vec{\mu}_-^{\alpha\beta} \cdot \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} &:= \delta_{\alpha\gamma} + \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} + \delta_{\beta\gamma} \quad ((\vec{\mu}_-^{\alpha\beta})^2 = 2) \\
\vec{\mu}_-^{\alpha\beta} * \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} &:= 4
\end{aligned}$$

Für die oben angegebenen auszuintegrierenden Paare kann man dann folgende Ersatzladungen einführen:

$$\begin{aligned}
(\vec{e}^\alpha + \vec{\varepsilon}_1^{\beta\alpha} \stackrel{\wedge}{=}) \vec{\mu}_1^{\beta\alpha} &= \vec{\varepsilon}_+^{\beta\alpha} + \vec{\mu}_-^{\alpha\beta} \\
(\vec{e}^{-\alpha} + \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} \stackrel{\wedge}{=}) \vec{\mu}_2^{\alpha\beta} &= \vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} - \vec{\mu}_-^{\alpha\beta} \\
(\vec{e}^\alpha + \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta} \stackrel{\wedge}{=}) \vec{\mu}_1^{\alpha\beta} &= \vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} + \vec{\mu}_-^{\alpha\beta} \\
(\vec{e}^{-\alpha} + \vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha} \stackrel{\wedge}{=}) \vec{\mu}_2^{\beta\alpha} &= \vec{\varepsilon}_+^{\beta\alpha} - \vec{\mu}_-^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

(Es gilt dann $-\vec{\mu}_1^{\alpha\beta} = \vec{\mu}_2^{\beta\alpha}$ und $-\vec{\mu}_2^{\alpha\beta} = \vec{\mu}_1^{\beta\alpha}$.)

Baut man diese in die Zustandssumme 5.3 ein, erhält man zur Beschreibung der Wechselwirkungen dann folgende Wechselwirkungsvorfaktoren:

$$\begin{aligned}
\vec{e}^\alpha \circ \vec{\mu}_1^{\gamma\delta} &:= -\vec{e}^\alpha \circ \vec{\mu}_2^{\gamma\delta} := \frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} + p^2 \kappa \vec{e}^\alpha * \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} \\
\vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} \circ \vec{\mu}_1^{\gamma\delta} &:= \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta} \circ \vec{\mu}_2^{\gamma\delta} := p^2 \left(\frac{1}{2\tilde{K}} + \lambda \right) \vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}_+^{\gamma\delta} + \frac{p^2}{2\tilde{K}} \vec{\varepsilon}_-^{\alpha\beta} \cdot \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} \\
\vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} \circ \vec{\mu}_2^{\gamma\delta} &:= \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta} \circ \vec{\mu}_1^{\gamma\delta} := p^2 \left(\frac{1}{2\tilde{K}} + \lambda \right) \vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}_+^{\gamma\delta} - \frac{p^2}{2\tilde{K}} \vec{\varepsilon}_-^{\alpha\beta} \cdot \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} \\
\vec{\mu}_1^{\alpha\beta} \circ \vec{\mu}_1^{\gamma\delta} &:= \vec{\mu}_2^{\alpha\beta} \circ \vec{\mu}_2^{\gamma\delta} := p^2 \left(\frac{1}{2\tilde{K}} + \lambda \right) \vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}_+^{\gamma\delta} + \frac{p^2}{2\tilde{K}} \vec{\mu}_-^{\alpha\beta} \cdot \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} + \frac{p^2 \kappa}{2} \vec{\mu}_-^{\alpha\beta} * \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} \\
\vec{\mu}_1^{\alpha\beta} \circ \vec{\mu}_2^{\gamma\delta} &:= p^2 \left(\frac{1}{2\tilde{K}} + \lambda \right) \vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta} \cdot \vec{\varepsilon}_+^{\gamma\delta} - \frac{p^2}{2\tilde{K}} \vec{\mu}_-^{\alpha\beta} \cdot \vec{\mu}_-^{\gamma\delta} - \frac{p^2 \kappa}{2} \vec{\mu}_-^{\alpha\beta} * \vec{\mu}_-^{\gamma\delta}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Diese Vektorladungen $\vec{\mu}_i$ seien ausgestattet mit einer Fugazität y_μ , für die zu Beginn der RG-Transformation $y_\mu(0) = 0$ gilt, da ursprünglich keine Hilfsladungen

$\vec{\mu}_i$ vorhanden ist. Unter Verwendung dieser Fugazität und der oben angegebenen Vorfaktoren für die Wechselwirkungen sind die Hilfsladungen $\vec{\mu}_i$ nun völlig analog zu den anderen Ladungen in die Zustandssumme 5.3 einzubauen. Der entstehende Ausdruck wird allerdings noch länger als 5.3 und wird hier daher nicht ausgeschrieben. Auch eine entsprechende Neutralitätsbedingung gilt dann in einer solchen modifizierten Zustandssumme.

Dadurch, daß wir uns der Hilfsladungen $\vec{\mu}$ bedienen, können für die modifizierte Zustandssumme 5.3 RG-Gleichungen hergeleitet werden, insbesondere können nun alle Paar-Konfigurationen (bis auf $\vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta}/\vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha}$ -Paare und $\vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta}/\vec{\varepsilon}_2^{\beta\gamma}$ -Paare, die ja zunächst einmal vernachlässigt werden sollen) mit den größten Boltzmann-Gewichten ausintegriert werden. Unter Einbeziehung der $\vec{\mu}_i$ -Hilfsladungen sind das die folgenden:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \vec{e}^\alpha/\vec{e}^{\alpha\beta}\text{-Paare,} \quad \vec{\varepsilon}_i^{\alpha\beta}/\vec{\varepsilon}_i^{\beta\alpha}\text{-Paare,} \quad \vec{\mu}_{1/2}^{\alpha\beta}/\vec{\mu}_{2/1}^{\beta\alpha}\text{-Paare,} \\
(b) \quad & \vec{\varepsilon}_i^{\alpha\beta}/\vec{\varepsilon}_i^{\beta\gamma}\text{-Paare,} \quad \vec{\mu}_{1/2}^{\alpha\beta}/\vec{\varepsilon}_{2/1}^{\beta\gamma}\text{-Paare,} \\
& \vec{e}^\alpha/\vec{\varepsilon}_1^{\beta\alpha}\text{-Paare,} \quad \vec{e}^{\alpha\beta}/\vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta}\text{-Paare,} \quad \vec{e}^\alpha/\vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha}\text{-Paare,} \quad \vec{e}^{\alpha\beta}/\vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha}\text{-Paare,} \\
& \vec{e}^\alpha/\vec{\mu}_2^{\beta\alpha}\text{-Paare,} \quad \vec{e}^{\alpha\beta}/\vec{\mu}_1^{\alpha\beta}\text{-Paare,} \quad \vec{e}^\alpha/\vec{\mu}_2^{\alpha\beta}\text{-Paare,} \quad \vec{e}^{\alpha\beta}/\vec{\mu}_1^{\beta\alpha}\text{-Paare,} \\
& \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta}/\vec{\mu}_1^{\beta\alpha}\text{-Paare,} \quad \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta}/\vec{\mu}_2^{\beta\alpha}\text{-Paare,} \quad \vec{\varepsilon}_1^{\beta\alpha}/\vec{\mu}_2^{\alpha\beta}\text{-Paare,} \quad \vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha}/\vec{\mu}_1^{\alpha\beta}\text{-Paare,} \\
& \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta}/\vec{\mu}_1^{\beta\gamma}\text{-Paare,} \quad \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta}/\vec{\mu}_2^{\beta\gamma}\text{-Paare,} \quad \vec{\varepsilon}_1^{\beta\alpha}/\vec{\mu}_2^{\gamma\beta}\text{-Paare,} \quad \vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha}/\vec{\mu}_1^{\gamma\beta}\text{-Paare} \quad .
\end{aligned}$$

Die Ausintegration der unter (a) aufgeführten Paarkonfigurationen verläuft analog zu den Rechnungen im MF-Modell für die entsprechenden Konfigurationen (siehe auch Anhang D.1). Dabei werden die Wechselwirkungen zwischen den Ladungen mithilfe der Schwerpunkts- und Relativteile der Ladungen geschrieben und bei der Ausintegration so verfahren, daß keine Kopplungen zwischen den Schwerpunktsanteilen $\vec{\varepsilon}_+$ und den übrigen Relativteilen bzw. \vec{e} -Ladungen generiert werden, die Entkopplung des Schwerpunktsanteils also erhalten bleibt unter der Renormierung. Um dies zu erreichen, müssen zwar einige Terme weggelassen werden, diese sind aber proportional zur Replikaanzahl n und verschwinden im Limes $n \rightarrow 0$, in dem die Renormierungsgleichungen letztlich zu betrachten sind im Rahmen des Replikaformalismus. Daher sollten die so abgeleiteten RG-Gleichungen korrekt bleiben bei $n \rightarrow 0$.

Die Rechnungen sind noch länger als die analog verlaufenden für das MF-Modell aus Anhang D.1 und werden daher nicht explizit ausgeführt. Als Ergebnis der Beiträge der unter (a) aufgeführten Paare bekommt man folgende Renormierung der Kopplungen \tilde{K} , κ und λ (mit $\tilde{y}_g := y_g a^2$ und $\tilde{y}_\mu := y_\mu a^2$):

$$\left(\frac{d\tilde{K}}{dl} \right)_{\vec{e}\vec{e}} = 2\pi p^2 \tilde{y}_g^2 \tag{5.6}$$

$$\left(\frac{d\kappa}{dl} \right)_{\vec{e}\vec{e}} = -2\pi p^2 \tilde{y}_g^2 \kappa \left(n\kappa + \frac{2}{\tilde{K}} \right) \tag{5.7}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dl}\right)_{\vec{e}\vec{e}} = \pi p^2 \tilde{y}_g^2 \frac{1}{\tilde{K}^2} \quad (5.8)$$

$$\left(\frac{d\tilde{K}}{dl}\right)_{\vec{e}\vec{e}} = \pi p^2 n \tilde{y}_\Delta^2 \quad (5.9)$$

$$\left(\frac{d\kappa}{dl}\right)_{\vec{e}\vec{e}} = \pi p^2 \tilde{y}_\Delta^2 \frac{1}{\tilde{K}^2} \quad (5.10)$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dl}\right)_{\vec{e}\vec{e}} = -\pi p^2 n \tilde{y}_\Delta^2 \left(2\frac{\lambda}{\tilde{K}} + 2\lambda^2\right) \quad (5.11)$$

$$\left(\frac{d\tilde{K}}{dl}\right)_{\vec{\mu}\vec{\mu}} = \pi p^2 (n-2) \tilde{y}_\mu^2 \quad (5.12)$$

$$\left(\frac{d\kappa}{dl}\right)_{\vec{\mu}\vec{\mu}} = -\pi p^2 \tilde{y}_\mu^2 \frac{1}{\tilde{K}} \left(4(n-1)\kappa + \frac{1}{\tilde{K}} + 2n(n-1)\kappa^2\tilde{K}\right) \quad (5.13)$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dl}\right)_{\vec{\mu}\vec{\mu}} = -\pi p^2 \tilde{y}_\mu^2 \left(\frac{1}{\tilde{K}^2} + 2n\frac{\lambda}{\tilde{K}} + 2n\lambda^2\right) \quad (5.14)$$

Für die unter (b) aufgeführten Paare von Vektorladungen kann die Ausintegration dadurch erfolgen, daß Ersatzladungen eingeführt werden, die die gleiche Wechselwirkung mit dritten Vektorladungen zeigen wie das betrachtete Paar. Dabei befinden sich die beiden Ladungen des Paares in diesem Fall in führender Ordnung in ihrem Abstandsvektor am selben Ort.

Um hier alle Paare ausintegrieren zu können, wurden ja die Hilfsladungen $\vec{\mu}_i$ explizit als Ersatzladung eingeführt, und tatsächlich ist es nun möglich, auf die beschriebene Art und Weise für alle Konfigurationen unter (b) eine Ersatzladung anzugeben:

$$\begin{array}{ll} \vec{e}^\alpha + \vec{\varepsilon}_1^{\beta\alpha} \longrightarrow \vec{\mu}_1^{\beta\alpha} & \vec{e}^{-\alpha} + \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} \longrightarrow \vec{\mu}_2^{\alpha\beta} \\ \vec{e}^\alpha + \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta} \longrightarrow \vec{\mu}_1^{\alpha\beta} & \vec{e}^{-\alpha} + \vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha} \longrightarrow \vec{\mu}_2^{\beta\alpha} & 2 \\ \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} + \vec{\varepsilon}_1^{\beta\gamma} \longrightarrow \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\gamma} & \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta} + \vec{\varepsilon}_2^{\beta\gamma} \longrightarrow \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\gamma} & n-2 \\ \vec{\mu}_1^{\alpha\beta} + \vec{\varepsilon}_2^{\beta\gamma} \longrightarrow \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\gamma} & \vec{\mu}_2^{\alpha\beta} + \vec{\varepsilon}_1^{\beta\gamma} \longrightarrow \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\gamma} & n-2 \\ \vec{e}^\alpha + \vec{\mu}_2^{\beta\alpha} \longrightarrow \vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha} & \vec{e}^\alpha + \vec{\mu}_2^{\alpha\beta} \longrightarrow \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} \\ \vec{e}^{-\alpha} + \vec{\mu}_1^{\alpha\beta} \longrightarrow \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta} & \vec{e}^{-\alpha} + \vec{\mu}_1^{\beta\alpha} \longrightarrow \vec{\varepsilon}_1^{\beta\alpha} & 2 \\ \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} + \vec{\mu}_1^{\beta\alpha} \longrightarrow \vec{e}^\alpha & \vec{\varepsilon}_1^{\beta\alpha} + \vec{\mu}_2^{\alpha\beta} \longrightarrow \vec{e}^{-\alpha} \\ \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta} + \vec{\mu}_2^{\beta\alpha} \longrightarrow \vec{e}^{-\alpha} & \vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha} + \vec{\mu}_1^{\alpha\beta} \longrightarrow \vec{e}^\alpha & 2(n-1) \\ \vec{\varepsilon}_1^{\alpha\beta} + \vec{\mu}_1^{\beta\gamma} \longrightarrow \vec{\mu}_1^{\alpha\gamma} & \vec{\varepsilon}_1^{\beta\alpha} + \vec{\mu}_2^{\gamma\beta} \longrightarrow \vec{\mu}_2^{\gamma\alpha} \\ \vec{\varepsilon}_2^{\alpha\beta} + \vec{\mu}_2^{\beta\gamma} \longrightarrow \vec{\mu}_2^{\gamma\alpha} & \vec{\varepsilon}_2^{\beta\alpha} + \vec{\mu}_1^{\gamma\beta} \longrightarrow \vec{\mu}_1^{\gamma\alpha} & 2(n-2) \end{array}$$

Die Rechnungen verlaufen auch hier ganz analog zu denen für das MF-Modell

(siehe auch Anhang D.2) und werden deshalb nicht noch einmal in aller Ausführlichkeit angegeben. Es ergibt sich jeweils eine Renormierung der Fugazität der Ersatzladung durch die Fugazitäten der ausintegrierten Paare. Die in der letzten Spalte angegebene Zahl bezeichnet immer die Anzahl von Möglichkeiten, die jeweilige Ersatzladung auf die beschriebene Art “zusammensetzen”; diese Anzahlen fließen auch in die RG-Gleichungen ein. Man bekommt schließlich folgende RG-Gleichungen:

$$\left(\frac{d\tilde{y}_g}{dl}\right)_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}} = 2\pi 2(n-1) \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_\mu \quad (5.15)$$

$$\left(\frac{d\tilde{y}_\mu}{dl}\right)_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}} = 2\pi 2 \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_g + 2\pi 2(n-2) \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_\mu \quad (5.16)$$

$$\left(\frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl}\right)_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon},\tilde{\mu}\tilde{\mu},\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}} = 2\pi (n-2) \tilde{y}_\Delta^2 + 2\pi (n-2) \tilde{y}_\mu^2 + 2\pi 2 \tilde{y}_\mu \tilde{y}_g \quad (5.17)$$

Auch die nun noch durchzuführende Vergrößerung des Cutoffs in den Greenfunktionen \tilde{G} in 5.3 und die Reskalierung der Fugazitäten wird ganz genauso durchgeführt wie im Kapitel 4.3.3. Auch hier wird deshalb nur das Ergebnis dieser Rechnungen in Form der resultierenden Renormierungen der Fugazitäten angegeben:

$$\left(\frac{d\tilde{y}_g}{dl}\right)_{(ii),(iii)} = \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} - \frac{p^2\kappa}{2\pi}\right) \tilde{y}_g \quad (5.18)$$

$$\left(\frac{d\tilde{y}_\mu}{dl}\right)_{(ii),(iii)} = \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} - \frac{p^2\lambda}{2\pi} - \frac{p^2\kappa}{2\pi}\right) \tilde{y}_\mu \quad (5.19)$$

$$\left(\frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl}\right)_{(ii),(iii)} = \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} - \frac{p^2\lambda}{2\pi}\right) \tilde{y}_\Delta \quad . \quad (5.20)$$

Insgesamt erhält man aus 5.6–5.20 folgende RG-Gleichungen (es sei nochmals daran erinnert, daß die Gleichungen nur im Limes $n \rightarrow 0$ exakt sind, da nur in diesem Limes die Entkopplung der Schwerpunktsanteile der Vektorladungen erhalten bleibt unter der RG-Transformation, und außerdem $\lambda \ll \frac{1}{\tilde{K}}$ vorausgesetzt wird, so daß die Gleichungen nur noch mit Einschränkungen gelten, wenn λ stark anwächst unter der RG-Transformation.)¹:

$$\frac{d\tilde{K}}{dl} = 2\pi p^2 \tilde{y}_g^2 + \pi p^2 n \tilde{y}_\Delta^2 + \pi p^2 (n-2) \tilde{y}_\mu^2$$

¹die RG-Gleichung für τ kann analog zu [20] aus der Bedingung bestimmt werden, daß der Eigenwert $\tilde{K} + n(K - \tilde{K}) + 2\tilde{L} + 2n(L - \tilde{L})$ zu einem Eigenvektor \vec{u} mit $u_i^\alpha = 1$ für alle i, α unrenormiert bleiben muß, da dieser Eigenvektor weder an die Unordnungs- noch an die Schichtkopplung ankoppelt.

$$\begin{aligned}
\frac{d\kappa}{dl} &= -2\pi p^2 \tilde{y}_g^2 \kappa \left(n\kappa + \frac{2}{\tilde{K}} \right) + \pi p^2 \tilde{y}_\Delta^2 \frac{1}{\tilde{K}^2} - \\
&\quad - \pi p^2 \tilde{y}_\mu^2 \frac{1}{\tilde{K}} \left(4(n-1)\kappa + \frac{1}{\tilde{K}} + 2n(n-1)\kappa^2 \tilde{K} \right) \\
\frac{d\lambda}{dl} &= \pi p^2 \tilde{y}_g^2 \frac{1}{\tilde{K}^2} - \pi p^2 n \tilde{y}_\Delta^2 \left(2\frac{\lambda}{\tilde{K}} + 2\lambda^2 \right) - \pi p^2 \tilde{y}_\mu^2 \left(\frac{1}{\tilde{K}^2} + 2n\frac{\lambda}{\tilde{K}} + 2n\lambda^2 \right) \\
\frac{d\tilde{y}_g}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} - \frac{p^2\kappa}{2\pi} \right) \tilde{y}_g + 4\pi (n-1) \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_\mu \\
\frac{d\tilde{y}_\mu}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} - \frac{p^2\lambda}{2\pi} - \frac{p^2\kappa}{2\pi} \right) \tilde{y}_\mu + 4\pi \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_g + 4\pi (n-2) \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_\mu \\
\frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} - \frac{p^2\lambda}{2\pi} \right) \tilde{y}_\Delta + 2\pi (n-2) \tilde{y}_\Delta^2 + 2\pi (n-2) \tilde{y}_\mu^2 + 4\pi \tilde{y}_\mu \tilde{y}_g
\end{aligned}$$

Man kann (trotz obiger Approximationen) diese Gleichungen in Spezialfällen testen. Zunächst einmal verifiziert man, daß für $\tilde{y}_g \equiv 0$ auch $\tilde{y}_\mu \equiv 0$ bleibt (wegen $\tilde{y}_\mu(0) = 0$), und die RG-Gleichungen in diejenigen von C&O übergehen. Außerdem sollte es bei $n = 2$ möglich sein, die Rollen der 2 Schichten und der 2 Replikas zu vertauschen; dies entspricht einer Transformation $\lambda \leftrightarrow \kappa$ und $\tilde{y}_g \leftrightarrow \tilde{y}_\Delta$. Tatsächlich kann man die Invarianz der obigen Gleichungen unter dieser Transformation bei $n = 2$ nachrechnen.

Die Gleichungen sind im Replikaformalismus im Limes $n \rightarrow 0$ zu betrachten, wo auch die oben erwähnte Approximation exakt wird:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{K}}{dl} &= 2\pi p^2 (\tilde{y}_g^2 - \tilde{y}_\mu^2) \\
\frac{d\kappa}{dl} &= -\pi p^2 \frac{4\kappa}{\tilde{K}} (\tilde{y}_g^2 - \tilde{y}_\mu^2) + \pi p^2 \frac{1}{\tilde{K}^2} (\tilde{y}_\Delta^2 - \tilde{y}_\mu^2) \\
\frac{d\lambda}{dl} &= \pi p^2 \frac{1}{\tilde{K}^2} (\tilde{y}_g^2 - \tilde{y}_\mu^2) \\
\frac{d\tilde{y}_g}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} - \frac{p^2\kappa}{2\pi} \right) \tilde{y}_g - 4\pi \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_\mu \\
\frac{d\tilde{y}_\mu}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} - \frac{p^2\lambda}{2\pi} - \frac{p^2\kappa}{2\pi} \right) \tilde{y}_\mu + 4\pi \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_g - 8\pi \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_\mu \\
\frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl} &= \left(2 - \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} - \frac{p^2\lambda}{2\pi} \right) \tilde{y}_\Delta - 4\pi \tilde{y}_\Delta^2 - 4\pi \tilde{y}_\mu^2 + 4\pi \tilde{y}_\mu \tilde{y}_g
\end{aligned} \tag{5.21}$$

5.3 Diskussion des RG-Flusses

Wie schon in den Flußgleichungen für das MF-Modell können auch hier die übersichtlicheren Größen

$$\eta(l) := \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}} \quad \text{und} \quad \tilde{\kappa}(l) := \frac{p^2\kappa}{2\pi} \quad \text{und} \quad \tilde{\lambda}(l) := \frac{p^2\lambda}{2\pi}$$

verwendet werden, mit denen 5.21 sich umschreiben läßt zu

$$\frac{d\eta}{dl} = -4\pi^2 \eta^2 (\tilde{y}_g^2 - \tilde{y}_\mu^2) \quad (5.22)$$

$$\frac{d\tilde{\kappa}}{dl} = -8\pi^2 \eta \tilde{\kappa} (\tilde{y}_g^2 - \tilde{y}_\mu^2) + 2\pi^2 \eta^2 (\tilde{y}_\Delta^2 - \tilde{y}_\mu^2) \quad (5.23)$$

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{dl} = 2\pi^2 \eta^2 (\tilde{y}_g^2 - \tilde{y}_\mu^2) \quad (5.24)$$

$$\frac{d\tilde{y}_g}{dl} = (2 - \eta - \tilde{\kappa}) \tilde{y}_g - 4\pi \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_\mu \quad (5.25)$$

$$\frac{d\tilde{y}_\mu}{dl} = (2 - \eta - \tilde{\kappa} - \tilde{\lambda}) \tilde{y}_\mu - 8\pi \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_\mu + 4\pi \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_g \quad (5.26)$$

$$\frac{d\tilde{y}_\Delta}{dl} = (2 - \eta - \tilde{\lambda}) \tilde{y}_\Delta - 4\pi \tilde{y}_\Delta^2 - 4\pi \tilde{y}_\mu^2 + 4\pi \tilde{y}_\mu \tilde{y}_g \quad (5.27)$$

Die Anfangsbedingungen seien hier auch noch einmal zusammengefaßt:

$$\eta(0) \lesssim 2, \quad \tilde{\kappa}(0) = 0, \quad \tilde{\lambda}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{y}_\mu(0) = 0$$

Es ist zudem hilfreich, folgende Gleichungen zu betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{d(\tilde{y}_\Delta - \tilde{y}_\mu)}{dl} &= (2 - \eta - \tilde{\lambda}) (\tilde{y}_\Delta - \tilde{y}_\mu) - 4\pi (\tilde{y}_\Delta - \tilde{y}_\mu)^2 - \\ &\quad - 4\pi \tilde{y}_g (\tilde{y}_\Delta - \tilde{y}_\mu) + \tilde{\kappa} \tilde{y}_\mu \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\frac{d(\tilde{y}_g - \tilde{y}_\mu)}{dl} = (2 - \eta - \tilde{\kappa}) (\tilde{y}_g - \tilde{y}_\mu) - 4\pi (\tilde{y}_g - \tilde{y}_\mu) + \tilde{\lambda} \tilde{y}_\mu \quad (5.29)$$

Bei der Diskussion des Flusses der Parameter \tilde{y}_Δ und \tilde{y}_g , der von diesen Gleichungen generiert wird, soll vor allem nochmals die Frage nach der Relevanz der Schichtkopplung untersucht werden. Es stellt sich heraus, daß in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen hier zwei prinzipiell unterschiedliche Fälle zu betrachten sind. Zum ersten kann die Schichtkopplung zu Beginn sehr viel kleiner als die Unordnungskopplung sein, also $\tilde{y}_g(0) \ll \tilde{y}_\Delta(0)$, zum anderen ist der umgekehrte Fall $\tilde{y}_\Delta(0) \ll \tilde{y}_g(0)$ zu untersuchen.

Zuerst wird der Fall

$$\tilde{y}_g(0) \ll \tilde{y}_\Delta(0)$$

untersucht; er entspricht der in den Kapiteln 4.2 und 4.3 betrachteten Situation, wo mithilfe der Resultate über die u-Mittelungen aus Kapitel 3.3 und einer Mean-Field-Approximation der Bereich kleiner Schichtkopplungen in dem System aus unendlich vielen Schichten studiert wurde. Es sollten sich daher übereinstimmende Resultate ergeben. Die Diskussion geht in diesem Fall von der Betrachtung der Gleichung 5.27 für \tilde{y}_Δ aus. Dort werden die letzten beiden Summanden aufgrund der Anfangsbedingungen vernachlässigt, desweiteren ändern sich in diesem Fall η und $\tilde{\lambda}$ nur langsam unter der RG, wie man aus den entsprechenden Gleichungen 5.22 und 5.24 abliest. Daher wird für diese Anfangsbedingungen \tilde{y}_Δ in einen mit $-\eta - \tilde{\lambda}$ langsam anwachsenden C&O-artigen “Fix”-Punkt

$$\tilde{y}_\Delta = \frac{1}{4\pi}(2 - \eta - \tilde{\lambda})$$

fließen.

Verwendet man dieses Resultat wiederum in der Gleichung 5.29, wo (ebenfalls aufgrund der Anfangsbedingungen) der letzte Summand vernachlässigt werden kann, erhält man dort

$$\frac{d(\tilde{y}_g - \tilde{y}_\mu)}{dl} = (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa})(\tilde{y}_g - \tilde{y}_\mu) \quad .$$

In dieser Gleichung ist das Vorzeichen des Vorfaktors $\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}$ entscheidend dafür, ob $(\tilde{y}_g - \tilde{y}_\mu)$ exponentiell anwächst oder gegen Null konvergiert. Mithilfe der Gleichungen 5.23 und 5.24 erkennt man, daß wegen der in diesem Fall vorliegenden Anfangsbedingungen (Terme $\propto \tilde{y}_g^2$ können dann vernachlässigt werden gegenüber Termen $\propto \tilde{y}_\Delta^2$; Terme $\propto \tilde{y}_\mu^2$ können ebenfalls vernachlässigt werden)

$$\tilde{y}_\Delta(0) > \tilde{y}_g(0)$$

gilt und letzteres der Fall sein wird. Das bedeutet, daß unter dem RG-Fluß asymptotisch $\tilde{y}_g = \tilde{y}_\mu$ gelten wird.

Einsetzen dieser Beziehung in die RG-Gleichung \tilde{y}_g ergibt einen Exponenten von

$$\lambda_g = \tilde{\lambda} - \tilde{\kappa} \quad ,$$

der, wie bereits gesehen, aufgrund der gewählten Anfangsbedingungen negativ wird. Das bedeutet, daß in diesem Fall die Schichtkopplung *irrelevant* ist, was in Übereinstimmung steht mit dem bei der Untersuchung des MF-Modells gefundenem Fluß und den Ergebnissen aus Kapitel 4.3. Auch für die übrigen Größen in den Flußgleichungen kann nun unmittelbar folgende Asymptotik verifiziert werden:

$$\begin{aligned} \eta &\rightarrow \eta^* < \eta(0) \\ \tilde{\lambda} &\rightarrow \tilde{\lambda}^* > 0 \\ \tilde{y}_\Delta &\rightarrow \tilde{y}_\Delta^* = \frac{1}{4\pi}(2 - \eta^* - \tilde{\lambda}^*) \\ \tilde{\kappa} &\rightarrow \tilde{\kappa}_{as} + 2\pi^2\eta^{*2}\tilde{y}_\Delta^{*2}l \\ \tilde{y}_g &\rightarrow 0 \\ \tilde{y}_\mu &\rightarrow 0 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Diese Asymptotik beschreibt im Prinzip einen Fluß zu einem C&O-artigen Fixpunkt, in dem die Schichtkopplung irrelevant ist. Ganz genauso wie in den Kapiteln 4.2 und 4.3 kann dies auch hier dahingehend interpretiert werden, daß die beiden Schichten zwei *entkoppelte Vortex-Gläser* darstellen, wenn die Schichtkopplung hinreichend schwach ist gegenüber der Unordnungskopplung. Wie aus obiger Rechnung ersichtlich ist, kann dies noch etwas genauer spezifiziert werden durch die Beziehung $\tilde{y}_g(0) < \tilde{y}_\Delta(0)$, die das negative Vorzeichen von λ_g bzw. die Irrelevanz der Schichtkopplung bewirkt. Die exakte RG-Rechnung hat damit (zumindest für zwei Schichten) die bereits in den Kapiteln 4.2 und 4.3 gewonnenen Resultate bestätigt.

Es ist möglich, die Diskussion der Flußgleichungen 5.22–5.27 noch etwas zu konkretisieren, wenn man den C&O-Fixpunkt $\tilde{y}_\Delta^* = \frac{1}{4\pi}(2 - \eta(0))$, $\tilde{y}_g^* = \tilde{y}_\mu^* = 0$ betrachtet und eine Stabilitätsuntersuchung für kleine Anfangswerte $\tilde{y}_g(0)$ durchführt mit den Flußgleichungen. Dann können die Flußgleichungen in \tilde{y}_g und \tilde{y}_μ linearisiert werden, so daß man in 5.22 $\eta \equiv \eta(0)$, in 5.24 $\tilde{\lambda} \equiv 0$ und in 5.27 $\tilde{y}_\Delta \equiv \tilde{y}_\Delta^*$ erhält; für $\tilde{\kappa}$ bekommt man aus 5.23 zudem unmittelbar den Fluß $\tilde{\kappa}(l) = 2\pi^2\eta(0)^2\tilde{y}_\Delta^{*2} l$. Gleichung 5.29 liest sich dann

$$\frac{d(\tilde{y}_g - \tilde{y}_\mu)}{dl} = -\tilde{\kappa}(l)(\tilde{y}_g - \tilde{y}_\mu) \quad ,$$

so daß aus den Ergebnissen für $\tilde{\kappa}(l)$ sofort folgt, daß sich asymptotisch $\tilde{y}_g = \tilde{y}_\mu$ ergibt. Dann ist es wiederum möglich, den RG-Exponenten λ_g von \tilde{y}_g aus 5.23 abzulesen, der asymptotisch

$$\lambda_g = -\tilde{\kappa}(l) = -2\pi^2\eta(0)^2\tilde{y}_\Delta^{*2} l$$

betragen wird. Dieses Ergebnis stimmt nun exakt mit dem Resultat 4.23 aus Kapitel 4.3 überein und zeigt explizit die Irrelevanz einer schwachen Schichtkopplung am C&O-Fixpunkt, der ja entkoppelte 2-dimensionale Vortex-Gläser in den beiden Schichten beschreibt.

Für den Fall

$$\tilde{y}_\Delta \ll \tilde{y}_g$$

ergibt sich hier jedoch ein wesentlich anderes Flußverhalten. Bei der Untersuchung dieses Falles wird von der Gleichung 5.25 für \tilde{y}_g selber ausgegangen; dort kann aufgrund der gewählten Anfangsbedingungen der letzte Summand vernachlässigt werden, und man liest folgenden Exponenten λ_g für die Schichtkopplung ab:

$$\lambda_g = 2 - \eta - \tilde{\lambda}$$

Um das Vorzeichen dieses Exponenten zu erhalten, sind die Gleichungen 5.22 und 5.24 für η und $\tilde{\lambda}$ zu betrachten, wobei die hier gewählten Anfangsbedingungen zu beachten sind. Zu Beginn der RG-Transformation gilt $\lambda_g = 2 - \eta(0) \gtrsim 0$ und

mithilfe der Gleichungen 5.22, 5.24 überzeugt man sich, daß bei den hier vorliegenden Anfangsbedingungen (Terme $\propto \tilde{\kappa}$ und Terme $\propto \tilde{y}_\mu^2$ können vernachlässigt werden)

$$\tilde{y}_g(0) > \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}_\Delta(0)$$

gilt und damit der Exponent weiter anwächst und insbesondere positiv bleibt. Das bedeutet, daß in diesem Fall \tilde{y}_g *relevant* ist und zu Beginn der RG-Transformation exponentiell wächst.

Aus Gleichung 5.28 ist dann ersichtlich, daß asymptotisch $\tilde{y}_\Delta = \tilde{y}_\mu$ gelten wird. Außerdem kann dann aus den ersten drei Gleichungen 5.22–5.24 folgende Asymptotik erhalten werden:

$$\begin{aligned} \eta &\rightarrow 0 \\ \tilde{\kappa} &\rightarrow 0 \\ \tilde{\lambda} &\rightarrow \tilde{\lambda}^* > 0 \end{aligned} \quad , \quad (5.31)$$

wobei die letzte Beziehung nur für nicht zu große Werte $\tilde{y}_g(0)$ gilt. Setzt man zudem in den Gleichungen 5.25–5.27 $\tilde{y}_\Delta = \tilde{y}_\mu$ erhält man einen neuen nichttrivialen Fixpunkt für \tilde{y}_Δ und \tilde{y}_g :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_g^* &= \frac{1}{2\pi} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}\tilde{\lambda}^*} \right)^2 \\ \tilde{y}_\Delta^* &= \tilde{y}_\mu^* = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}\tilde{\lambda}^*} \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Dieser Fixpunkt ist allerdings nur unter einigen Vorbehalten ernstzunehmen. Erstens ist die Abbildung auf ein Coulombgas nur für kleine Kopplungen ($\tilde{y}_g, \tilde{y}_\Delta, \tilde{y}_\mu \ll 1$) ganz korrekt und die daraus abgeleiteten Flußgleichungen daher als Entwicklung in den Kopplungen $\tilde{y}_g, \tilde{y}_\Delta$ und \tilde{y}_μ anzusehen. In diesem Fixpunkt wachsen die Kopplungen jedoch bis zur $\mathcal{O}(1)$ an. Zum zweiten wächst $\tilde{\lambda}$ in diesem Fixpunkt bis auf $\tilde{\lambda}^* > 0$, während η verschwindet; bei der Herleitung der RG-Gleichungen wurde jedoch die Approximation kleiner λ ($\tilde{\lambda} \ll \eta$, siehe Seite 95) verwendet.

Aber auch wenn dieser Fixpunkt ein Artefakt der verwendeten Methoden darstellt, ist festzustellen, daß bei einer gegenüber der Schichtkopplung hinreichend schwachen Unordnungskopplung die Schichtkopplung *relevant* wird bei ebenfalls relevanter Unordnung. Auch in diesem Fall kann aus den obigen Betrachtungen heraus dies noch genauer spezifiziert werden durch die Ungleichung $\tilde{y}_g(0) > \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}_\Delta(0)$, die hier die Positivität von λ_g und damit die Relevanz der Schichtkopplung bewirkt.

Da die Unordnung relevant ist, kann auch dieser Zustand als glasartiger Zustand verstanden werden, jedoch zerfällt das System nicht mehr in mehrere entkoppelte Glaszustände, sondern nimmt einen Glaszustand ein, in dem beide Schichten korreliert sind.

Der RG-Fluß führt im eben betrachteten Fall in einen Bereich stärkerer Schichtkopplungen, der im Rahmen der Coulombgasabbildung eigentlich nicht mehr

zugänglich ist. Daher wird das Verhalten im Bereich großer Schichtkopplung auch in Bezug auf den hier gefundenen Fixpunkt im nächsten Abschnitt noch einmal genauer studiert werden.

Bevor dies geschieht, sollen die Resultate aus der Diskussion der Flußgleichungen 5.21 bzw. 5.22–5.27 in einem Vorschlag für ein RG-Flußdiagramm zusammengefaßt werden (Abbildung 5.2). Die Separatrix, die den oberen Bereich relevanter

Abbildung 5.2: RG-Flußdiagramm für die Gleichungen 5.21

Schichtkopplung vom unteren Bereich irrelevanter Schichtkopplung trennt, kann dabei nach den obigen Rechnungen ungefähr durch eine Gleichung

$$\tilde{y}_g \sim \tilde{y}_\Delta \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}_\Delta$$

beschrieben werden. Diese Separatrix läßt sich nur “erahnen” und ihre genaue Gestalt wird auch vom Wert $\eta(0)$ abhängen, also materialabhängig sein. Der C&O-Fixpunktwert von \tilde{y}_Δ wächst bei irrelevanter Kopplung an, da η im Laufe der Renormierung kleiner wird. Dieser Fluß des C&O-“Fix”-Punktes ist ebenfalls angedeutet in der Skizze. Ohne Unordnung, also bei $\tilde{y}_\Delta \equiv 0$, erhält man mit den RG-Gleichungen 5.21 wie M&K eine exponentiell wachsende Schichtkopplung, was durch die Pfeile auf der \tilde{y}_g -Achse angedeutet wird.

5.4 Untersuchung des Bereiches starker Kopplung

Im vorangehenden Kapitel wurde ein Fixpunkt des 2-Schicht-Modells mit $\tilde{y}_g^* > 0$ gefunden, d.h. relevanter nicht-verschwindender Schichtkopplung. Die prinzipiellen Probleme bei der Untersuchung dieses Fixpunktes und generell des Bereiches großer Schichtkopplung mit den durch Abbildung auf ein Coulombgas erhaltenen RG-Gleichungen wurden bereits erläutert. Daher soll in diesem Kapitel ein anderer Weg eingeschlagen werden, um diesen Bereich zu betrachten.

Und zwar sollen für die Auslenkungen u_i^α Schwerpunkts- und Relativkoordinaten eingeführt werden bezüglich der beiden Schichten:

$$r^\alpha := \frac{1}{2}(u_1^\alpha - u_2^\alpha) \quad \text{und} \quad s^\alpha := \frac{1}{2}(u_1^\alpha + u_2^\alpha)$$

Dies geschieht aus zweierlei Gründen:

Bei großen Schichtkopplungen werden in den beiden Schichten “gegenüberliegende” Flußlinien stark aneinander gekoppelt, so daß kleine Fluktuationen in ihrer Relativkoordinate die Folge sein werden. Es wird daher die Möglichkeit von Approximationen durch Entwicklung für kleine Relativkoordinaten bestehen.

Zum anderen wurden bereits im vorangehenden Kapitel im Rahmen der Coulombgasrechnung Vektorladungen in eine Art Schwerpunkts- und Relativanteil zerlegt. Die obige Transformation bringt eine etwas anschaulichere Deutung dieser Zerlegung und stellt eine Verbindung zu den Rechnungen des vorigen Kapitels her.

Schreibt man den Hamiltonian 5.1 für das replizierte System aus zwei Schichten mit obiger Transformation um, erhält man folgendes:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & \int d^2r \left\{ \sum_{\alpha,\beta} K^{\alpha\beta} (\nabla r^\alpha \cdot \nabla r^\beta + \nabla s^\alpha \cdot \nabla s^\beta) - \right. \\ & \left. - \sum_{\alpha,\beta} 2y_\Delta \cos(p(s^\alpha - s^\beta)) \cos(p(r^\alpha - r^\beta)) - \sum_\alpha \tilde{g} \cos(2pr^\alpha) \right\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Der Zusammenhang mit den Schwerpunkts- und Relativanteilen der Vektorladungen $\vec{\varepsilon}$ und \vec{e} aus dem vorigen Kapitel wird hier offensichtlich. Die Ladungen $\vec{\varepsilon}_+^{\alpha\beta}$ beschreiben die cos-Kopplung der Schwerpunktskoordinaten verschiedener Replikas α und β durch die Unordnung, die Ladungen $\vec{\varepsilon}_-^{\alpha\beta}$ hingegen die entsprechende cos-Kopplung der Relativkoordinaten. Die \vec{e}^α -Ladungen werden generiert vom die Schichtkopplung beschreibenden cos-Potential für die Relativkoordinaten im letzten Summanden.

Wie bereits angedeutet, soll das weitere Vorgehen für starke Schichtkopplung darin bestehen, eine Entwicklung in den Relativkoordinaten vorzunehmen. Dies kann dadurch begründet werden, das bei starker Kopplung die Fluktuationen

$\langle r^{\alpha 2} \rangle$ klein sein werden. Daher werden in diesem Fall nur die niedrigsten Ordnungen in den Relativkoordinaten von Interesse sein im Hamiltonian 5.33, so daß man eine in den Relativkoordinaten quadratische Approximation erhält. Diese harmonische Approximation kann etwa mit einer selbstkonsistenten Methode, wie sie von Pokrovskii und Uimin [27] verwendet wurde, oder mit einem entsprechenden selbstkonsistenten harmonischen Variationsansatz erfolgen. Man erhält dann

$$\mathcal{H}_2 = \int d^2r \left\{ \sum_{\alpha,\beta} K^{\alpha\beta} (\nabla r^\alpha \cdot \nabla r^\beta + \nabla s^\alpha \cdot \nabla s^\beta) - \sum_{\alpha,\beta} 2y_\Delta \sigma \cos(p(s^\alpha - s^\beta)) + \sum_\alpha 2p^2 \tilde{g} \rho r^{\alpha 2} \right\}, \quad (5.34)$$

wobei $\sigma := \langle \cos(p(r^\alpha - r^\beta)) \rangle$ und $\rho := \langle \cos(2pr^\alpha) \rangle$

und die Mittelungen in den letzten Ausdrücken selbstkonsistent mit der quadratischen Approximation des Hamiltonian erfolgt.

Bei der Vorgehensweise hier wurden die kleinen Fluktuationen der Relativkoordinate bei starken Schichtkopplungen ausgenutzt. Sie stellt insofern das Gegenstück zur Mean-Field-Approximation aus Kapitel 4.3 dar, da dort die großen Fluktuationen in der Relativkoordinate bei kleinen Schichtkopplungen dazu ausgenutzt wurde, die in der anderen Schicht “gegenüberliegende” FL als weitgehend unabhängig anzusehen und ihren Einfluß nur durch ein mittleres Feld h zu beschreiben.

Der Hamiltonian 5.34 ist dadurch gekennzeichnet, daß hier die Relativ- von den Schwerpunktskoordinaten separiert sind. Die Relativkoordinaten koppeln lediglich an die Schichtkopplung an, während die Schwerpunktskoordinaten nur an die Unordnung ankoppeln. Das Verhalten eines solchen Systems unter Renormierung läßt sich sofort angeben:

Die Schwerpunktskoordinaten werden sich im wesentlichen so verhalten wie die Auslenkungen in einer einzelnen Schicht (siehe Kapitel 3), wobei η hier durch $\eta/2$ zu ersetzen ist (da die Gradientenkopplungen doppelt so groß sind nach der Transformation auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten: soll der Schwerpunkt zweier “gegenüberliegender” FL’s ausgelenkt werden, müssen dazu im Prinzip beide FL’s ausgelenkt werden, was die doppelte elastische Energie kostet). Dies ändert allerdings nichts an der Relevanz der Unordnung und anderen wesentlichen Eigenschaften; es ergeben sich wieder RG-Gleichungen wie bei C&O. Man kann aufgrund dieses Verhaltens der Schwerpunktskoordinaten auch im Fall starker Schichtkopplungen von einer Vortex-Glas-Phase sprechen.

Für die Relativkoordinaten wurde eine harmonische Approximation vorgenommen, so daß sie sich wie in einem gaußschen Modell verhalten. Insbesondere ist auch die Schichtkopplung relevant. Dieser Crossover zu dem gaußschen Verhalten steht in völliger Analogie zu den Rechnungen von M&K für ein System aus unendlich vielen Schichten. Da die Schichtkopplung hier relevant ist, liegt gewissermaßen eine echte “3-dimensionale” Vortex-Glas-Phase vor (soweit man bei

zwei Schichten davon sprechen kann).

Die in 5.34 vorgenommene Entwicklung kann aber auch durch den von den RG-Gleichungen 5.21 generierten Fluß bei großen Schichtkopplungen \tilde{y}_g begründet werden. Im vorigen Kapitel haben wir bei der Diskussion des RG-Flusses für größere Schichtkopplungen \tilde{y}_g gesehen, daß der Parameter λ der Kopplungsmatrix wächst in diesem Fall, während $\eta = \frac{p^2}{2\pi K}$ und κ gegen Null streben unter dem RG-Fluß. Betrachtet man unter diesem Gesichtspunkt die Wechselwirkungen der Vektorladungen $\vec{\varepsilon}_+$, $\vec{\varepsilon}_-$ und \vec{e} , wie sie in Kapitel 5.1 in 5.4 aufgeführt sind, wird folgendes klar: Bei großem $\lambda \gg \frac{1}{K}$ sind die Relativanteile $\vec{\varepsilon}_-$ der unordnungsinduzierten Vektorladungen \vec{e} zu vernachlässigen, da sie mit viel kleineren Wechselwirkungsenergien behaftet sind als die Schwerpunktsanteile $\vec{\varepsilon}_+$, die damit im wesentlichen das Boltzmann-Gewicht des jeweiligen Konfigurationssummanden bestimmen. Eine solche Vernachlässigung der Beiträge von $\vec{\varepsilon}_-$ -Ladungen stimmt zufolge der oben beschriebenen Entsprechungen zu den verschiedenen cos-Termen im Hamiltonian 5.33 mit der in 5.34 vorgenommenen Approximation bzgl. des cos-Terms in der Unordnungskopplung überein. Die quadratische Approximation des von der Schichtkopplung herrührenden cos-Terms in 5.33 entspricht der Berücksichtigung lediglich freier \vec{e} -Ladungen, die nicht wechselwirken. Diese Situation wird dahingehend von dem RG-Fluß realisiert, daß die Wechselwirkung der \vec{e} -Ladungen mit η und κ gegen Null streben unter dem RG-Fluß.

Für große Schichtkopplungen wird in diesem Sinne also ein Crossover zu einem Verhalten stattfinden, daß nicht mehr durch den Hamiltonian 5.1 sondern vielmehr durch die selbstkonsistente quadratische Approximation 5.34 dieses Hamiltonians beschrieben wird.

Die Frage, ob der im letzten Kapitel gefundene Fixpunkt ein Artefakt der dort verwendeten Rechenmethoden darstellt, ist daher eher zu bejahen; er repräsentiert unter Umständen nur die Überbleibsel des oben geschilderten Crossovers zur harmonischen Approximation im Coulombgasbild, das in diesem Bereich nicht mehr uneingeschränkt gilt.

Denkbar wäre allerdings, daß der oben gefundene Fixpunkt eine dritte Phase beschreibt, in der die Kopplung der Relativkoordinaten an die Unordnung relevant ist (dies wäre die Deutung eines nicht verschwindenden $\tilde{y}_\mu^* > 0$ an diesem Fixpunkt) im Gegensatz zu den anderen beiden Phasen.

5.5 Untersuchung des 2-Schicht-Systems mit FRG

In diesem abschließenden Kapitel werden noch einige Betrachtungen zur Relevanz einer schwachen Schichtkopplung in Anwesenheit von Unordnung mit einer funktionalen Renormierungsgruppenrechnung (FRG) durchgeführt.

Wir gehen dazu aus vom Hamiltonian 5.1, in dem die ursprüngliche diagona-

le Form der Kopplungsmatrix wieder verwendet wird, die $1/T$ -Faktoren aus der Zustandssumme wieder explizit gemacht werden (vgl. auch Seiten 47 und 73). Außerdem wird die elastische Konstante $\Gamma = K T$ absorbiert in T ($\Gamma/T \rightarrow 1/T$). Jede der beiden Schichten soll im folgenden als *d-dimensional* angesehen werden und es wird mittels der FRG eine Entwicklung in $\epsilon = 4 - d$ vorgenommen (für den bisher betrachteten Fall also $\epsilon = 2$). Für die replizierte Zustandssumme schreiben wir dann folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
[Z^n] &= \prod_{j=1}^2 \prod_{\gamma=1}^n \int \mathcal{D}u_j^\gamma \exp(-\mathcal{H}_2) \\
\mathcal{H}_2 &= \int d^d r \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha} \frac{1}{2T} \nabla u_i^\alpha \cdot \nabla u_i^\alpha - \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2T^2} \Delta(u_i^\alpha - u_i^\beta) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i,j=1}^2 \sum_{\alpha} \frac{1}{2T} G(u_i^\alpha - u_j^\alpha) \right\} , \tag{5.35}
\end{aligned}$$

$$\text{wobei } \Delta(x) := \frac{2\Delta}{\Gamma^2 l^2} \cos(px) \quad , \quad G(x) := \frac{g}{\Gamma} \cos(px)$$

Für eine Schicht ($G \equiv 0$) sind FRG-Gleichungen bis zur Ordnung ϵ bereits von Giarmarchi und Le Doussal [10] angegeben worden, bzw. von D.S. Fisher [28],[29] (für das XY-Modell im Zufallsfeld und das random manifold Problem). Die von Fisher verwendeten Methoden [28] können hier adaptiert werden für obigen 2-Schicht-Hamiltonian. Die erforderlichen Rechnungen sollen kurz skizziert werden. Bei der Rechnung für eine Schicht findet man einen Fixpunkt bei $T = 0$ mit nicht-trivialer Fixpunktfunktion $\Delta^*(x)$. Mit den FRG-Gleichungen für zwei Schichten soll dieser Fixpunkt hinsichtlich seiner Stabilität bezüglich einer schwachen Schichtkopplung G untersucht werden.

Da die dynamischen Variablen u über periodische Funktionen Δ und G gekoppelt sind, werden sie nicht reskaliert. Für T , Δ und G liest man in 5.35 aus der Reskalierung die führenden Ordnungen der FRG-Gleichungen ab:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dl} &= (2 - d)T \\
\frac{d\Delta}{dl} &= (4 - d)\Delta = \epsilon \Delta \\
\frac{dG}{dl} &= 2G
\end{aligned}$$

Die FRG-Gleichungen sollen in führender Ordnung in ϵ berechnet werden, so daß in den auszuwertenden Diagrammen die äußeren Impulse Null sind. Daher ergeben sich keine weiteren Beiträge zur FRG-Gleichung 5.36 für T im folgenden. T ist irrelevant für $\epsilon < 2$ und wird marginal für $\epsilon = 2$, wobei wir am Tieftemperaturverhalten des Systems interessiert sind bei der Untersuchung einer möglichen Glasphase; daher wird der Fixpunkt $T = 0$ untersucht und die übrigen Renormierungsgleichungen nur bis zur führenden Ordnung in T berechnet.

Dies geschieht auf dem in [28] vorgezeichneten Weg, die Auslenkungen u_i^α in einen langwelligen Anteil $u_i^{\alpha>}$ und einen kurzwelligen Anteil $u_i^{\alpha<}$ aufzuspalten, den Hamiltonian 5.35 nach den langwelligen Anteilen zu entwickeln (bei kleinen äußeren Impulsen) und schließlich die langwelligen Anteile in einer Impulsschale ($>$) $\Lambda < q < \Lambda e^{-\delta l}$ (wobei $\Lambda \sim 1/a$ der Cutoff im Impulsraum ist) auszuintegrieren. Dies führt zu einer Renormierung der verbleibenden kurzwelligen Anteile im Hamiltonian. Man bekommt im einzelnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & \mathcal{H}_2^< + \int_q^> \sum_{i,j}^{\alpha,\beta} \left\{ - \frac{q^2}{2T} \delta^{\alpha\beta} \delta_{ij} - \right. \\ & - \frac{1}{2T^2} \sum_\gamma \Delta''(u_i^{\alpha<} - u_i^{\gamma<}) \delta^{\alpha\beta} \delta_{ij} + \frac{1}{2T^2} \Delta''(u_i^{\alpha<} - u_i^{\beta<}) \delta_{ij} \\ & \left. - \frac{1}{2T} \sum_k G'''(u_i^{\alpha<} - u_k^{\alpha<}) \delta^{\alpha\beta} \delta_{ij} + \frac{1}{2T} G'''(u_i^{\alpha<} - u_j^{\alpha<}) \delta^{\alpha\beta} \right\} u_i^{\alpha>}(\vec{q}) u_j^{\beta>}(-\vec{q}) \end{aligned}$$

In der führenden Ordnung T^0 kann G nur durch Diagramme mit einem G'' - und einem Δ'' -Vertex renormiert werden, ebenso Δ nur durch Diagramme mit zwei Δ'' -Vertizes. Außerdem kann bei einer 1-loop-Rechnung bis zur $\mathcal{O}(\epsilon)$ in den Diagrammen $d = 4$ gesetzt werden. Auswertung der entsprechenden Diagramme führt dann zu folgenden FRG-Gleichungen in der 1-loop-Rechnung (zusammen mit den obigen Reskalierungsanteilen):

$$\frac{dT}{dl} = (2-d)T \quad (5.36)$$

$$\frac{d\Delta}{dl} = \epsilon \Delta + C_4 \frac{1}{2} (\Delta'')^2 - C_4 \Delta'' \Delta''(0) + \mathcal{O}(T) \quad (5.37)$$

$$\frac{dG}{dl} = 2G - C_4 G'' \Delta''(0) + C_4 G''(0) \Delta''(0) + \mathcal{O}(T) \quad (5.38)$$

(wobei $C_4 = (2\pi)^{-4} \times$ Oberfläche der 4-dim. Einheitskugel).

Für $G \equiv 0$ erhält man wieder die FRG-Gleichungen für eine Schicht, die den stabilen nichttrivialen Fixpunkt [10] ($\Delta^*(x)$ muß periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{p} = l$ sein)

$$\Delta^*(x) = \frac{1}{C_4} \frac{\epsilon}{72} \left(\frac{l^4}{36} - x^2(l-x)^2 \right) \quad \text{auf } [0, l] \quad , \quad T^* = 0$$

besitzt. Dieser beschreibt im Rahmen der FRG-Flusses den glasartigen Fixpunkt des Systems, also die Vortex-Glas-Phase des FL-Gitters.

Im folgenden soll der Einfluß einer schwachen Schichtkopplung G der Form $G(x) := \frac{2g}{\Gamma} \cos(px)$ an diesem Fixpunkt untersucht werden oder mit anderen Worten die Relevanz des Parameters g , der die Stärke der Schichtkopplung bestimmt. Dazu wird die Beziehung $G'''(0) = -p^2 \frac{2g}{\Gamma}$ ausgenutzt und die Gleichung 5.38 für $x = 0$

am glasartigen Fixpunkt betrachtet:

$$\begin{aligned}\frac{dG''(0)}{dl} &= 2G''(0) - C_4 G''''(0)\Delta^{*''}(0) \quad \text{bzw.} \\ \frac{dg}{dl} &= 2g + p^2\left(-\frac{\epsilon l^2}{36}\right)g = \left(2 - \epsilon\frac{\pi^2}{9}\right)g\end{aligned}$$

Daraus leitet sich folgende Dimensionsbedingung für die Relevanz der Schichtkopplung ab:

$$\boxed{\epsilon > \frac{18}{\pi^2} \quad \text{bzw.} \quad d < 4 - \frac{18}{\pi^2} \simeq 2,177} \quad (5.39)$$

Insbesondere ist damit für $d = 2$ die Schichtkopplung am Glasfixpunkt entkoppelter Schichten *irrelevant*. Dieses Resultat, was im Vergleich zu den bisherigen Rechnungen mit einer gänzlich anderen Methode, nämlich einer FRG hergeleitet wurde, untermauert die Ergebnisse aus den vergangenen Abschnitten, wo gefunden wurde, daß in zwei Dimensionen eine hinreichend schwache Kopplung am C&O-Fixpunkt für entkoppelte Schichten irrelevant ist; das 2-Schicht System zerfällt bei hinreichend schwacher Kopplung und Anwesenheit von Unordnung in zwei entkoppelte Vortex-Gläser.

5.6 Zusammenfassung

Die Resultate dieses Kapitels können am besten in einem Phasendiagramm zusammengefaßt werden.

Insgesamt kann für das in diesem Kapitel betrachtete System aus zwei gekoppelten Flußliniengittern in Schichten ein schematisches Phasendiagramm vorgeschlagen werden in Abhängigkeit von den Parametern \tilde{y}_Δ und \tilde{y}_g , wie es Abbildung 5.3 zeigt.

Im unteren Bereich kleiner Schichtkopplungen erhält man eine Phase, in der das System in zwei entkoppelte Schichten zerfällt, die bei Unordnung jeweils einen Vortex-Glas-Zustand einnehmen. Dieses Ergebnis ergab sowohl die Rechnung mit der Abbildung auf ein Coulombgas als auch unabhängig davon eine FRG-Rechnung.

Oberhalb einer Phasengrenze, die sich nur ungefähr ermitteln ließ als $\tilde{y}_g \sim \tilde{y}_\Delta$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}_\Delta$ wird die Schichtkopplung relevant. Dann findet entweder direkt ein Crossover zu einer Phase statt, in der sich die Relativkoordinaten in einem elastischen Potential befinden und sich die Schwerpunktskoordinaten im wesentlichen wie die Auslenkungen einer einzelnen Schicht mit Unordnung verhalten (siehe Kapitel 5.4). Oder man erhält bei noch nicht zu großen Schichtkopplungen zwischen diesen beiden Phasen noch eine dritte Phase, für die die Relevanz der Kopplung der Relativkoordinate an die Unordnung (r - Δ -Kopplung) charakteristisch ist (Die Existenz einer solchen Phase ergab sich bei den Rechnungen mit

Abbildung 5.3: Phasendiagramm für 2-Schichtsystem von FL-Gittern

der Coulombgasabbildung, hier sind jedoch Zweifel angebracht). Da in beiden Phasen sowohl Schichtkopplung als auch Unordnung relevant sind, können beide Phasen gewissermaßen als echte “3-dimensionale” Vortex-Glas-Phasen bezeichnet werden.

Die Frage, inwieweit ein solches Diagramm auch für unendlich viele Schichten übernommen werden kann, bleibt offen.

Zusammenfassung und Ausblick

Abschließend sollen nochmals die Hauptresultate zusammengefaßt werden und, wenn möglich, mit anderen Arbeiten verglichen werden.

Das zentrale Thema der Arbeit ist die Untersuchung von Vortex-Glas-Phasen mithilfe eines elastischen Modells des Flußliniengitters in Systemen aus einer einzelnen Schicht oder mehreren gekoppelten Schichten mit parallelem Magnetfeld. Für den Fall einer einzelnen Schicht liegt bei einer ausreichend dünnen Schicht ein zweidimensionales Flußliniengitter vor mit uniaxialen Auslenkungen. Ein elastisches Modell eines solchen Flußliniengitters ist direkt einer Renormierungsgruppenrechnung zugänglich, wie sie im dritten Kapitel durchgeführt wurde; eine wesentliche Voraussetzung dafür ist die Uniaxialität der Flußlinienauslenkungen. Daher sind Rechnungen, wie sie in dieser Arbeit durchgeführt werden, nicht auf höher dimensionale Flußliniengitter zu übertragen.

In der RG-Rechnung kann die Vortex-Glas-Phase in Form eines nichttrivialen Fixpunktes bei nichtverschwindender Unordnung nachgewiesen werden; zudem können die elastischen Konstanten berechnet werden mit ihren Dispersionsbeziehungen und diese Ergebnisse mit einbezogen werden in die Untersuchung der statistisch-physikalischen Eigenschaften des Flußliniengitters. Ein weiteres wichtiges Ergebnis der RG-Rechnung (auf dem teilweise auch Resultate für das System aus gekoppelten Schichten beruhen) sind die Verschiebungs-(uu -)Korrelationen (siehe Kapitel 3, Beziehungen 3.16,3.17); sie zeigen in einer reinen Phase logarithmische Divergenzen ($\langle uu \rangle \propto \ln L$), in der Vortex-Glas-Phase hingegen divergieren sie mit dem Quadrat des Logarithmus ($\langle uu \rangle \propto \ln^2 L$), wodurch die Vortex-Glas-Phase charakterisiert werden kann. Diese Korrelationen sind in zahlreichen Arbeiten sowohl für zweidimensionale als auch höher dimensionale Flußliniengitter studiert worden [5],[24],[8]–[13].

Das Ergebnis kann mit Resultaten verglichen werden [8],[10],[11], wo Variationsansätze mit Replikasymmetriebrechung verwendet werden. Sowohl Giamarchi und Le Doussal [10] als auch Korshunov [11] erhalten logarithmische Divergenzen für Flußliniengitter in $2 \leq d < 4$ Dimensionen; Bouchaud *et al.* berücksichtigen nicht die Gitterperiodizität und bekommen abweichende Resultate. In diesen Arbeiten werden also für den hier betrachteten zweidimensionalen Fall keine mit dem Quadrat des Logarithmus divergierenden Korrelationen erhalten; der Grund

für diese Abweichungen ist bisher noch nicht ganz klar, er könnte aber in der nicht ausreichenden Genauigkeit der Variationsmethode für den zweidimensionalen Fall liegen [10]. Balents und Kardar [9] erhalten mit einer Abbildung auf Weltlinien von Fermionen in einer Dimension hingegen eine Divergenz mit einem Exponenten 1 ($\langle uu \rangle \propto L^1$) für das zweidimensionale Flußliniengitter.

Vortex-Glas-Phasen in dreidimensionalen Flußliniengittern sind bisher noch nicht nachgewiesen worden. In dieser Arbeit gelingt dies für den Fall eines Flußliniengitters in einem aus schwach gekoppelten Schichten bestehenden Systems. Interessant ist dort auch die Realisierung der Vortex-Glas-Phase durch quasi-entkoppelte zweidimensionale Vortex-Gläser in den Schichten; das dreidimensionale System zerfällt also gewissermaßen in zweidimensionale Systeme.

Dieses Ergebnis wird bestätigt für ein Flußliniengitter in nur zwei gekoppelten Schichten; in einem solchen System kann auch der Bereich stärkerer Kopplungen studiert werden. Auch dort wird eine Vortex-Glas-Phase gefunden, allerdings mit relevanter Schichtkopplung, d.h. man findet keine entkoppelten Schichten mehr, sondern ein echtes “3-dimensionales” Vortex-Glas. Inwieweit diese Ergebnisse auf unendlich viele Schichten übertragen werden können, wird noch zu klären sein.

Die hier erzielten Ergebnisse können zum besseren Verständnis der Vortex-Glas-Phase in dreidimensionalen Flußliniengittern beitragen und sind ein erster Schritt in Richtung eines generellen Nachweises einer solchen Phase. Durch die Betrachtung geschichteter Systeme konnte man sich bei den in dieser Arbeit untersuchten Systemen immer auf uniaxiale Auslenkungen der Flußlinien beschränken; ob für dreidimensionale Flußliniengitter, in denen diese Einschränkung nicht mehr gilt, ähnliche Resultate gewonnen werden können, bleibt eine zentrale offene Frage in diesem Themenbereich.

Literaturverzeichnis

- [1] J.G. Bednorz und K.A. Müller, Z. Physik B **64**, 189 (1986)
- [2] M.P.A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **62**, 1415 (1989)
- [3] D.R. Nelson und H.S. Seung, Phys. Rev. B **39**, 9153 (1989)
- [4] D.R. Nelson und P. Le Doussal, Phys. Rev. B **42**, 10113 (1990)
- [5] T. Nattermann, I. Lyuksyutov und M. Schwartz, Europhys. Lett. **16**, 265 (1991)
- [6] T. Nattermann, M. Feigelmann und I. Lyuksyutov, Z. Phys. B **84**, 353 (1991)
- [7] D.S. Fisher, M.P.A. Fisher und D. Huse, Phys. Rev. B **43**, 130 (1991)
- [8] J. Bouchaud, M. Mézard und J. Yedidia, Phys. Rev. B **46**, 14686 (1992)
- [9] L. Balents und M. Kardar, preprint (1992)
- [10] T. Giamarchi und P. Le Doussal, preprint (1993)
- [11] S.E. Korshunov, preprint (1993)
- [12] M.V. Feigel'man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin und V.M. Vinokur, Phys. Rev. Lett. **63**, 2303 (1989)
- [13] E.M. Chudnovsky, Phys. Rev. B **43**, 7831 (1991); Phys. Rev. Lett. **65**, 3060 (1990)
- [14] E.H. Brandt, J. Low Temp. Phys. **26**, 735 (1977)
- [15] E.H. Brandt, J. Low Temp. Phys. **42**, 557 (1981)
- [16] A.A. Abrikosov, Soviet Phys. JETP **5**, 1174 (1957)
- [17] A.A. Abrikosov, Soviet Phys. JETP **19**, 988 (1964)
- [18] S. Takács, Czech. J. Phys. B **33**, 1248 (1983)

- [19] J. Guimpel, L. Civale, F. de la Cruz, J.M. Murduck and I.K. Schuller, Phys. Rev. B **38**, 2342 (1988)
- [20] J.L. Cardy und S. Ostlund, Phys. Rev. B **25**, 6899 (1982)
- [21] J.M. Kosterlitz, J. Phys. C **6**, 1046 (1974)
- [22] J. José, L.P. Kadanoff, S. Kirkpatrick und D.R. Nelson, Phys. Rev. B **16**, 1217 (1977)
- [23] A.P. Young, Phys. Rev. B **19**, 1855 (1979)
- [24] J. Toner und D.P. DiVincenzo, Phys. Rev. B **41**, 632 (1990)
- [25] L.V. Mikheev und E.B. Kolomeisky, Phys. Rev. B **43**, 10431 (1991)
- [26] B.I. Ivlev, N.B. Kopnin und V.L. Pokrovsky, J. Low Temp. Phys. **80**, 187 (1990)
- [27] V.L. Pokrovskii und G.V. Uimin, Soviet Phys. JETP **38**, 847 (1974)
- [28] D.S. Fisher, Phys. Rev. B **31**, 7233 (1985)
- [29] D.S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **56**, 1964 (1986)

Anhang A

zu Kapitel 1

A.1 Fouriertransformation von ϕ^{ij} , 1.12

Herleitung der zu Gleichung 1.12 führenden Fouriertransformation von $\phi^{ij}(\vec{R}_\nu^0)$ aus 1.10 ($i, j = 1, 2$):

(Im folgenden soll vereinfacht notiert werden

$$\vec{R}_\nu := \vec{R}_\nu^0 = (X_\nu^0, Y_\nu^0, z) =: (\vec{r}_\nu, z) \quad)$$

$$\begin{aligned} \phi^{ij}(\vec{k}) &= \sum_\nu \int dz \phi^{ij}(\vec{R}_\nu) e^{-i\vec{k}\vec{R}_\nu} \\ &\stackrel{1.10}{=} \int dz \left\{ -\delta^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} W \right) (0, z) + \sum_{\mu \neq 0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} W \right) (\vec{R}_\mu) \right\} e^{-ik_z z} + \\ &\quad + \sum_{\nu \neq 0} \int dz \left\{ -\delta^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} W \right) (\vec{R}_\nu) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} W \right) (\vec{R}_\nu) \right\} e^{-i\vec{k}\vec{R}_\nu} \\ &= \delta^{ij} \sum_\nu \int dz \left(- \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} W \right) (\vec{R}_\nu) \right) e^{-i\vec{k}\vec{R}_\nu} + \\ &\quad + \sum_\nu \int dz \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} W \right) (\vec{R}_\nu) (1 - e^{-i\vec{k}\vec{r}_\nu}) e^{-ik_z z} \\ &= \delta^{ij} \sum_\nu \int dz \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q_z^2 W(\vec{q}) e^{i(\vec{q}-\vec{k})\vec{R}_\nu} + \\ &\quad + \sum_\nu \int dz \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} (-q^i q^j) W(\vec{q}) (e^{i\vec{q}\vec{r}_\nu} - e^{i(\vec{q}-\vec{k})\vec{r}_\nu}) e^{i(q_z - k_z)z} \\ &= \delta^{ij} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q_z^2 W(\vec{q}) [n (2\pi)^2 \sum_{\vec{Q}} \delta(\vec{q} - \vec{k} - \vec{Q})] [2\pi \delta(q_z - k_z)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q^i q^j W(\vec{q}) \quad \times \\
& \quad \times \left([n (2\pi)^2 \sum_{\vec{Q}} \delta(\vec{q} - \vec{k} - \vec{Q})] - [n (2\pi)^2 \sum_{\vec{Q}} \delta(\vec{q} - \vec{Q})] \right) [2\pi \delta(q_z - k_z)] \\
= & \delta^{ij} n \sum_{\vec{Q}} k_z^2 W(\vec{k} + \vec{Q}) + \\
& + n \sum_{\vec{Q}} \left\{ (\vec{k} + \vec{Q})^i (\vec{k} + \vec{Q})^j W(\vec{k} + \vec{Q}) - Q^i Q^j W(k_z \vec{e}_z + \vec{Q}) \right\}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort die angestrebte Gleichung 1.12 für die Fouriertransformierte $\phi^{11}(\vec{k})$.

A.2 Herleitung von 1.16

Im hier betrachteten Fall $k_y = 0$ bekommt man in 1.12 mit W bzw. V aus den Gleichungen 1.8 bzw. 1.6¹ :

$$\begin{aligned}
\phi^{11}(\vec{k}, k_y = 0) & = n \sum_{mn} k_z^2 W(\vec{k} + \vec{Q}) \\
& \quad + n \sum_{mn} \left\{ (k_x + Q_x)^2 W(\vec{k} + \vec{Q}) - Q_x^2 W(k_z \vec{e}_z + \vec{Q}) \right\} \\
= & n \sum_{mn} \left\{ k_z^2 V(\vec{k} + \vec{Q}) (1 - e^{i(\vec{k} + \vec{Q}) \cdot \vec{d}}) + (k_x + Q_x)^2 V(\vec{k} + \vec{Q}) (1 - e^{i(\vec{k} + \vec{Q}) \cdot \vec{d}}) \right. \\
& \quad \left. - Q_x^2 V(k_z \vec{e}_z + \vec{Q}) (1 - e^{i(k_z \vec{e}_z + \vec{Q}) \cdot \vec{d}}) \right\} \\
(\vec{k} \cdot \vec{d} = 0 \quad (k_y = 0) \quad , \quad \vec{Q}_{mn} \cdot \vec{d} = n\pi) & \\
= & 2n \sum_{\substack{mn \\ n \text{ ungerade}}} \left\{ k_z^2 V(\vec{k} + \vec{Q}) + (k_x + Q_x)^2 V(\vec{k} + \vec{Q}) - Q_x^2 V(k_z \vec{e}_z + \vec{Q}) \right\} \\
= & \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{1}{dl} \frac{d^2}{\pi^2 \lambda^2} \sum_m \left\{ (k_z^2 + (k_x + Q_x)^2) \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{\frac{d^2}{\pi^2} (\frac{1}{\lambda^2} + (k_x + Q_x)^2 + k_z^2) + n^2} \right. \\
& \quad \left. - Q_x^2 \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{\frac{d^2}{\pi^2} (\frac{1}{\lambda^2} + Q_x^2 + k_z^2) + n^2} \right\} \\
= & \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{1}{dl} \frac{d^2}{\pi^2 \lambda^2} \sum_m \left\{ k_z^2 \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{A^2 + n^2} + (k_x + Q_x)^2 \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{A^2 + n^2} \right. \\
& \quad \left. - Q_x^2 \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{B^2 + n^2} \right\}
\end{aligned}$$

¹Es war: $\vec{Q} = \vec{Q}_{mn} = m \frac{2\pi}{l} \vec{e}_x + n \frac{\pi}{d} \vec{e}_y$, $\vec{d} = d \vec{e}_y$

Wobei

$$A^2 := \frac{d^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + (k_x + Q_x)^2 + k_z^2 \right) \quad , \quad B^2 := \frac{d^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + Q_x^2 + k_z^2 \right)$$

wie in 1.16.

Mit der Formel

$$\sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{A^2 + n^2} = \frac{\pi}{2A} \tanh \frac{\pi A}{2}$$

bekommt man dann offensichtlich die Gleichung 1.16.

A.3 Berechnung der Integrale I_s^r aus 1.20

Die Integrale I_s^r aus 1.20 werden mittels Residuensatz berechnet:

$$I_s^r = \int_{-\infty}^{\infty} dQ_x e^{iQ_x l s} \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} \left[Q_x^2 \frac{1}{2 \tilde{Q}_x} \tanh \frac{d}{2} \tilde{Q}_x \right]$$

mit

$$\tilde{Q}_x^2 := \frac{1}{\lambda^2} + Q_x^2 \quad \text{und} \quad r \text{ gerade} \geq 2 \quad , \quad s \neq 0 \quad .$$

Die Integranden in den I_s^r fallen schnell genug ab (beachte $r \geq 2$), so daß die Integrale in der komplexen Ebene geschlossen werden können. Und zwar können die I_s^r mit $s > 0$ in der oberen Halbebene geschlossen werden und die I_s^r mit $s < 0$ über die Beziehung

$$I_s = I_{-s}^* = I_{-s}$$

erhalten werden.

Die Funktion $\left[\frac{Q_x^2}{2 \tilde{Q}_x} \tanh \frac{d}{2} \tilde{Q}_x \right]$ besitzt in der oberen Halbebene nur die auf den \tanh zurückzuführenden einfachen Polstellen bei

$$r_n = i \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2 \frac{\pi^2}{d^2}} \quad n \text{ ungerade} \geq 1$$

mit Residuen

$$\begin{aligned} \text{Res}_{Q_x=r_n} \frac{Q_x^2}{2 \tilde{Q}_x} \tanh \frac{d}{2} \tilde{Q}_x &= \frac{Q_x^2}{2 \tilde{Q}_x} \text{Res}_{Q_x=r_n} \tanh \frac{d}{2} \tilde{Q}_x \\ &= \frac{Q_x^2}{2 \tilde{Q}_x} \left. \frac{2 \tilde{Q}_x}{d Q_x} \right|_{Q_x=r_n} = \frac{r_n}{d} \end{aligned}$$

Dann besitzt die Funktion $\exp(iQ_x ls) \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} [\dots]$ eine $(r+1)$ -fache Polstelle bei $Q_x = r_n$ und es gilt

$$\begin{aligned} e^{iQ_x ls} \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} [\dots] &= e^{iQ_x ls} \left(\frac{Res_{Q_x=r_n} [\dots]}{(Q_x - r_n)^{r+1}} + \text{analyt. Fkt.} \right) \\ Res_{Q_x=r_n} e^{iQ_x ls} \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} [\dots] &= \frac{1}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} e^{iQ_x ls} \Big|_{Q_x=r_n} r! (-1)^r \frac{r_n}{d} \\ &= \frac{\partial^r}{\partial Q_x^r} e^{iQ_x ls} \Big|_{Q_x=r_n} \frac{r_n}{d} \quad \text{für } r \text{ gerade} \end{aligned}$$

Damit erhält man für gerade r nach Residuensatz das Ergebnis 1.21.

A.4 Herleitung von 1.24

Es soll in 1.22 die n -Summe mittels Poisson-Summation ausgewertet und nur der $(s=1)$ -Summand behalten werden. Ausgehend von 1.22 bekommt man dann:

$$\begin{aligned} \phi^{11}(k, 0, 0) &= \frac{\phi_0^2}{2\pi} \frac{1}{d\lambda^2} \left\{ \sum_{n \text{ unger. } \geq 1} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2 \frac{\pi^2}{d^2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \sum_{s>0} \exp\left(-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2 \frac{\pi^2}{d^2}} ls\right) (1 - \cos kls) \right\} \right\} \\ &\simeq \frac{\phi_0^2}{2\pi} \frac{1}{d\lambda^2} (1 - \cos kl) \times \\ &\quad \times \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (1 - (-1)^n) \frac{\partial^2}{\partial l^2} \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2 \frac{\pi^2}{d^2}} l\right)}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2 \frac{\pi^2}{d^2}}} \\ &= \frac{\phi_0^2}{8\pi} \frac{1}{d\lambda^2} (1 - \cos kl) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_t \exp(2\pi itn) (1 - \exp(i\pi n)) \frac{\partial^2}{\partial l^2} \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2 \frac{\pi^2}{d^2}} l\right)}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2 \frac{\pi^2}{d^2}}} \\ &= \frac{\phi_0^2}{8\pi^2} \frac{1}{\lambda^2} (1 - \cos kl) \times \\ &\quad \times \frac{\partial^2}{\partial l^2} \sum_t \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + x^2} l\right)}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + x^2}} (\exp(i2tdx) - \exp(i(2t+1)dx)) \end{aligned}$$

Und mithilfe der Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + x^2} l\right)}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + x^2}} \exp(iax) = 2 K_0 \left(\frac{\sqrt{l^2 + a^2}}{\lambda} \right)$$

erhält man das gesuchte

$$\phi^{11}(k, 0, 0) = \frac{\phi_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{\lambda^2} (1 - \cos kl) \sum_t (-1)^t \frac{\partial^2}{\partial l^2} K_0 \left(\frac{\sqrt{l^2 + (td)^2}}{\lambda} \right) .$$

Anhang B

zu Kapitel 2

B.1 Anhang zur Berechnung von T_1

Berechnung des Integrals $I(\vec{R})$, 2.2

Es sei $\vec{R} = (X, Y, z)$. Damit

$$\begin{aligned} I(\vec{R}) &= \int_{|y| \leq d/2} d^3r V(\vec{r} - \vec{R}) \\ &= \int_{-d/2}^{d/2} dy \int d^2r \frac{\phi_0^2}{(4\pi\lambda)^2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (y - Y)^2}} e^{-\sqrt{r^2 + (y - Y)^2}/\lambda} \\ &= \frac{\phi_0^2}{8\pi\lambda^2} \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_{|y-Y|}^{\infty} r \frac{u}{r} du \frac{1}{u} e^{-u/\lambda} \quad (\text{mit } u^2 = r^2 + (y - Y)^2) \\ &= \frac{\phi_0^2}{8\pi\lambda} \int_{-d/2}^{d/2} dy e^{-|y-Y|/\lambda} \\ &= \frac{\phi_0^2}{8\pi} \left\{ \begin{array}{ll} e^{v/\lambda} & v < 0 \\ 2 - e^{-v/\lambda} & v > 0 \end{array} \right\} \Bigg|_{-d/2-Y}^{d/2+Y} = I(Y) \end{aligned}$$

Dies liefert durch Fallunterscheidung das Ergebnis 2.2.

Herleitung von 2.3

Unter Verwendung des Ergebnisses 2.2 für $I(Y)$ erhält man

$$\begin{aligned}
T_1 &= -\frac{H_a L}{\phi_0} \sum_{\tilde{\nu} \text{ Bild}+\text{real}} \text{sgn}(FL\tilde{\nu}) I(Y_{\tilde{\nu}}) \\
&= -\frac{H_a L}{\phi_0} \sum_{\tilde{m}\tilde{n}} (-1)^{\tilde{m}+\tilde{n}} I(\tilde{n} + (-1)^{\tilde{m}+\tilde{n}} u) \\
&= -L H_a \frac{\phi_0}{4\pi} \left\{ \sum_{\tilde{m}=0} [1 - e^{-d/2\lambda} \cosh(u/\lambda)] + \right. \\
&\quad \left. + \sinh(d/2\lambda) \sum_{\tilde{m}} \left[\sum_{\tilde{n}>0} (-1)^{\tilde{n}} e^{-\tilde{n}d/\lambda} \exp((-1)^{\tilde{m}+\tilde{n}} u/\lambda) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\tilde{n}<0} (-1)^{\tilde{n}} e^{\tilde{n}d/\lambda} \exp(-(-1)^{\tilde{m}+\tilde{n}} u/\lambda) \right] \right\} \\
&= -L H_a \frac{\phi_0}{4\pi} N_r \left\{ [1 - e^{-d/2\lambda} \cosh(u/\lambda)] + \right. \\
&\quad \left. + \sinh(d/2\lambda) \cosh(u/\lambda) \left[2 \sum_{\tilde{n}>0} (-1)^{\tilde{n}} e^{-\tilde{n}d/\lambda} \right] \right\} \\
&\stackrel{\text{geom.Reihe}}{=} -L N_r H_a \frac{\phi_0}{4\pi} \times \\
&\quad \times \left\{ 1 + \cosh(u/\lambda) \left[-e^{-d/2\lambda} + 2 \sinh(d/2\lambda) \frac{-e^{-d/\lambda}}{1 + e^{-d/\lambda}} \right] \right\} \\
&= -\frac{Vol}{dl} H_a \frac{\phi_0}{4\pi} \left\{ 1 + \cosh(u/\lambda) e^{-d/2\lambda} \left[1 + \frac{\sinh(d/2\lambda)}{\cosh(d/2\lambda)} \right] \right\} \\
&= -\frac{Vol}{dl} H_a \frac{\phi_0}{4\pi} \left(1 - \frac{\cosh(u/\lambda)}{\cosh(d/\lambda)} \right)
\end{aligned}$$

B.2 Anhang zur Berechnung von T_2

Um 2.5 aus 2.4 erhalten zu können, ist zunächst die m-Summe in

$$\begin{aligned}
T_2 &= Vol \frac{1}{d^2 l^2} \sum_{mn} V(\vec{Q}_{mn}) \left\{ [1 + (-1)^m \cos(n \frac{2\pi}{d} u)] - \right. \\
&\quad \left. (-1)^n [\cos(n \frac{2\pi}{d} u) + (-1)^m] \right\} ,
\end{aligned}$$

mittels Poisson-Summation auszuführen:

$$T_2 = Vol \frac{1}{8d^2 l^2} \int dm \sum_s e^{i2\pi ms} \left\{ \sum_m \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{l^2}{\pi^2 \lambda^2} \frac{1}{\frac{l^2}{\pi^2 \lambda^2} + n^2 \frac{l^2}{d^2} + m^2} \times \right.$$

$$\times \left[1 - (-1)^n \cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) + e^{im\pi} \left(\cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) - (-1)^n \right) \right] \Big\}$$

Der Integrationsweg kann in der komplexen Ebene geschlossen werden, um die m-Integrale mittels Residuensatz zu berechnen.

$$\left[\frac{1}{\frac{l^2}{\pi^2\lambda^2} + n^2\frac{l^2}{d^2} + m^2} \text{ besitzt einfache Polstellen bei} \right. \\ \left. \pm i\frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + n^2\frac{\pi^2}{d^2}} = \pm\frac{l}{\pi}r_n = \pm i\frac{l}{\pi\lambda_n} \text{ mit Residuen } \frac{\pi\lambda_n}{\pm 2il} \right]$$

$$\begin{aligned} T_2 &= Vol \frac{1}{8d^2l^2} \frac{\phi_0^2}{4\pi} \frac{l^2}{\pi^2\lambda^2} \left\{ \sum_{s \geq 0} \sum_n (2\pi i) e^{-2sl/\lambda_n} \frac{\pi\lambda_n}{2il} \times \right. \\ &\quad \times \left[1 - (-1)^n \cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) + e^{-l/\lambda_n} \left(\cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) - (-1)^n \right) \right] + \\ &\quad + \sum_{-s < 0} \sum_n (-2\pi i) e^{-2sl/\lambda_n} \frac{\pi\lambda_n}{-2il} \times \\ &\quad \times \left. \left[1 - (-1)^n \cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) + e^{l/\lambda_n} \left(\cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) - (-1)^n \right) \right] \right\} \\ &= Vol \frac{\phi_0^2}{32\pi \lambda^2 d^2 l} \sum_n \lambda_n \times \\ &\quad \times \left\{ \left[1 - (-1)^n \cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) + e^{-l/\lambda_n} \left(\cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) - (-1)^n \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{s > 0} e^{-2sl/\lambda_n} \right) 2 \left[1 - (-1)^n \cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) + \cosh(l/\lambda_n) \left(\cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) - (-1)^n \right) \right] \right\} \\ &= Vol \frac{\phi_0^2}{32\pi \lambda^2 d^2 l} \sum_n \lambda_n \left(\left[1 - (-1)^n \cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \begin{array}{l} \text{n ung.} \quad \left[\cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) + 1 \right] \left[e^{-l/\lambda_n} + 2 \frac{\exp(2l/\lambda_n)}{1 - \exp(2l/\lambda_n)} (1 + \cosh(l/\lambda_n)) \right] \\ \text{n ger.} \quad \left[\cos\left(n\frac{2\pi}{d}u\right) - 1 \right] \left[e^{-l/\lambda_n} + 2 \frac{\exp(2l/\lambda_n)}{1 - \exp(2l/\lambda_n)} (-1 + \cosh(l/\lambda_n)) \right] \end{array} \right\} \right) \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck führt nach einigen elementaren Umformungen in der letzten [...] -Klammer zur Gleichung 2.5.

Anhang C

zu Kapitel 3

C.1 Sammlung oft benutzter Formeln

Matrixinversion

Das Inverse einer Matrix $K_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$) der Form

$$K_{\alpha\beta} = a\delta_{\alpha\beta} + b$$

lautet

$$K_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{a}\delta_{\alpha\beta} - \frac{b}{[nb + a]a} \quad (\text{C.1})$$

bzw. im häufig verwendeten Limes $n \rightarrow 0$

$$K_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{a}\delta_{\alpha\beta} - \frac{b}{a^2} = \frac{1}{a} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{b}{a} \right) \quad (\text{C.2})$$

Impulsraumintegrale

Zur Berechnung der Funktionen G_i am Ort $(x, z) = 0$, wobei die G_i im (2-dimensionalen) Impulsraum durch

$$G_1(q) = \frac{1}{q^2} \quad , \quad G_2(q) = \frac{1}{q^2} \ln(qa) \quad , \quad G_3(q) = \frac{q_x^2}{q^4}$$

gegeben sind, werden Integrale über den Impulsraum unter Beachtung des UV-Cutoffs $\Lambda \sim 1/a$ und des IR-Cutoffs $1/L$ benötigt:

$$G_1(r=0) = \int \frac{d^2q}{4\pi^2} \frac{1}{q^2} = \int_{1/L}^{1/a} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{q} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{L}{a}\right) \quad (\text{C.3})$$

$$G_2(r=0) = \int \frac{d^2q}{4\pi^2} \frac{1}{q^2} \ln(qa) = \int_{1/L}^{1/a} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{q} \ln(qa) = -\frac{1}{4\pi} \ln^2\left(\frac{L}{a}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$G_3(r=0) = \int \frac{d^2q}{4\pi^2} \frac{q_x^2}{q^4} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{1/L}^{1/a} dq q \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos^2 \varphi}{q^2} = \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{L}{a}\right) \quad (\text{C.5})$$

Fouriertransformationen

Die entsprechenden Korrelationsfunktionen $\tilde{G}_i(x, z) := G_i(x, z) - G_i(0)$ werden durch Fouriertransformationen der obigen q -Funktionen berechnet. Da $\tilde{G}_i(\vec{r})$ bei $\vec{r} = 0$ verschwindet, wird man bis auf eine recht kleine additive Konstante korrekte Ergebnisse erhalten, wenn von $\tilde{G}_i(a) = 0$ ausgegangen wird¹ :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(r) &= \int \frac{d^2q}{4\pi^2} \frac{1}{q^2} (1 - \cos(\vec{q}\vec{r})) = \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{q} (1 - J_0(qr)) \quad , \text{ also} \\ \tilde{G}'_1(r) &= \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} J_1(qr) = \frac{1}{2\pi r} \quad , \text{ und damit} \\ \tilde{G}_1(r) &= \tilde{G}_1(a) + \int_a^r d\tilde{r} \tilde{G}'_1(\tilde{r}) \simeq \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(r) &= \int \frac{d^2q}{4\pi^2} \frac{1}{q^2} \ln(qa) (1 - \cos(\vec{q}\vec{r})) = \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{q} \ln(qa) (1 - J_0(qr)) \\ \tilde{G}'_2(r) &= \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \ln(qa) J_1(qr) = -\frac{1}{2\pi r} \left(\ln\left(\frac{r}{2a}\right) + \mathcal{C} \right) \\ &\simeq -\frac{1}{2\pi r} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \\ \tilde{G}_2(r) &= \tilde{G}_2(a) + \int_a^r d\tilde{r} \tilde{G}'_2(\tilde{r}) = -\frac{1}{4\pi} \ln^2\left(\frac{r}{a}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_3(r) &= \int \frac{d^2q}{4\pi^2} \frac{q_x^2}{q^4} (1 - \cos(\vec{q}\vec{r})) \\ &= \int \frac{d^2q}{4\pi^2} \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial q_x^2} \ln q + \frac{1}{q^2} \right) (1 - \cos(\vec{q}\vec{r})) \\ &\stackrel{\text{C.6/part.Int.}}{=} \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{x}{2} \int \frac{d^2q}{4\pi^2} \frac{q_x}{q^2} \sin(q_x x) \cos(q_y y) \end{aligned}$$

¹ J_ν ist die ν -te Bessel-Funktion und $\mathcal{C}=0,577$ =Eulersche Konstante

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{r}{a} \right) + \frac{x^2}{r^2} \right) \quad (\text{C.8})$$

Gaußsche Mittelwerte

Ist das Feld $u(\vec{r})$ gaußverteilt mit Mittelwerten $\langle u \rangle = 0$ und Korrelationen $\langle u^2 \rangle$, dann gilt für Mittelwerte über u-Produkte das Wick-Theorem. Danach gilt

$$\begin{aligned} \langle u^{2n} \rangle &= \frac{(2n)!}{2^n n!} \langle u^2 \rangle^n \\ \langle u^{2n+1} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhält man folgende Formeln

$$\begin{aligned} \langle \cos(pu) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} p^{2n} \langle u^{2n} \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-p^2}{2} \langle u^2 \rangle \right)^n \\ &= \exp \left(-\frac{p^2}{2} \langle u^2 \rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\langle \sin(pu) \rangle = 0 \quad (\text{C.10})$$

C.2 Berechnung der Selbstenergien aus Kapitel 3.3.2

Berechnung von Σ^1 , 3.18

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta}^1(r-r') &= \delta(r-r') \Lambda^2 \tilde{y}_{\Delta}^-(q) \left\langle \frac{\delta}{\delta u_{\alpha}(r)} \frac{\delta}{\delta u_{\beta}(r)} \sum_{\gamma,\delta} \cos(p(u_{\gamma}(r) - u_{\delta}(r))) \right\rangle_0 \\ &= \delta(r-r') \Lambda^2 \tilde{y}_{\Delta}^-(q) 2p^2 \times \\ &\quad \times \left\{ \left\langle \cos(p(u_{\alpha}(r) - u_{\beta}(r))) \right\rangle_0 - \delta_{\alpha\beta} \sum_{\delta} \left\langle \cos(p(u_{\alpha}(r) - u_{\delta}(r))) \right\rangle_0 \right\} \\ &\stackrel{\text{C.9}}{=} \delta(r-r') \Lambda^2 \tilde{y}_{\Delta}^-(q) 2p^2 \times \\ &\quad \times \left\{ \exp \left(-\frac{p^2}{2} \langle (u_{\alpha}(r) - u_{\beta}(r))^2 \rangle_0 \right) - \delta_{\alpha\beta} \sum_{\delta} \exp \left(-\frac{p^2}{2} \langle (u_{\alpha}(r) - u_{\delta}(r))^2 \rangle_0 \right) \right\} \\ &= \delta(r-r') \Lambda^2 \tilde{y}_{\Delta}^-(q) 2p^2 \times \\ &\quad \times \left\{ \exp \left(p^2 (G_{\alpha\beta}^0(0) - G_{\alpha\alpha}^0(0)) \right) - \delta_{\alpha\beta} \sum_{\delta} \exp \left(p^2 (G_{\alpha\delta}^0(0) - G_{\alpha\alpha}^0(0)) \right) \right\} \end{aligned}$$

(Beziehung C.9, die für gaußverteilte Größen gilt, konnte oben ausgenutzt werden, da z.B. mit $u_\alpha(r)$ und $u_\beta(r)$ auch die Differenz $u_\alpha(r) - u_\beta(r)$ gaußverteilt ist.) $G^0(r=0)$ kann mit den Formeln aus dem Anhang C.1 ausgewertet werden, wobei darauf zu achten ist, daß der UV-Cutoff nun q ist, da mit dem effektiven Hamiltonian 3.13 gearbeitet wird, also

$$G_{\alpha\delta}^0(0) - G_{\alpha\alpha}^0(0) \stackrel{C.3}{=} \frac{1}{2\pi\tilde{K}}(\delta_{\alpha\delta} - 1) \ln(Lq) \quad .$$

Mit $\eta = \frac{p^2}{2\pi\tilde{K}}$ erhält man dann

$$\Sigma_{\alpha\beta}^1(r-r') = \delta(r-r')\Lambda^2 \tilde{y}_\Delta^* \frac{q^2}{\Lambda^2} 2p^2 \left\{ (Lq)^{\eta(\delta_{\alpha\beta}-1)} - \delta_{\alpha\beta} \sum_{\delta} (Lq)^{\eta(\delta_{\alpha\delta}-1)} \right\}$$

bzw. nach Fouriertransformation der Delta-Funktion

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta}^1(q) &= \tilde{y}_\Delta^* q^2 2p^2 \times \\ &\quad \times \left\{ \delta_{\alpha\beta} + (Lq)^{-\eta}(1 - \delta_{\alpha\beta}) - \delta_{\alpha\beta} \left(1 - (Lq)^{-\eta} + n(Lq)^{-\eta} \right) \right\} \\ &\stackrel{n \rightarrow 0}{=} \tilde{y}_\Delta^* q^2 2p^2 (Lq)^{-\eta} \quad . \end{aligned}$$

Dies ist die Beziehung 3.18.

Berechnung von $\sigma^{2,1}$, 3.19

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{2,1}(r-r') &= \frac{1}{2!} \Lambda^4 \tilde{y}_\Delta^{\bar{}}(q)^2 \left[\left\langle \left\{ \frac{\delta}{\delta u_\alpha(r)} \sum_{\gamma,\delta} \cos(p(u_\gamma(r) - u_\delta(r))) \right\} \right\rangle \times \right. \\ &\quad \times \left. \left\langle \left\{ \frac{\delta}{\delta u_\beta(r')} \sum_{\mu,\nu} \cos(p(u_\mu(r') - u_\nu(r'))) \right\} \right\rangle_0 - \left\langle \left\{ \dots \right\} \right\rangle_0 \left\langle \left\{ \dots \right\} \right\rangle_0 \right] \\ &= \Lambda^4 \tilde{y}_\Delta^{\bar{}}(q)^2 \sum_{\delta,\nu} 2p^2 \left[\left\langle \sin(p(u_\alpha(r) - u_\delta(r))) \sin(p(u_\beta(r') - u_\nu(r'))) \right\rangle_0 - \right. \\ &\quad \left. - \left\langle \sin(\dots) \right\rangle_0 \left\langle \sin(\dots) \right\rangle_0 \right] \end{aligned}$$

Nach Formel C.10 verschwinden die sin-Mittelungen $\langle \sin(\dots) \rangle_0$. Die anderen Mittelungen können nach Verwendung des Additionstheorems $\sin x \sin y = 1/2(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ ausgeführt werden mittels Beziehung C.9. Man erhält:

$$= \Lambda^4 \tilde{y}_\Delta^{\bar{}}(q)^2 \sum_{\delta,\nu} p^2 \left\langle \left\{ \cos(p([u_\alpha - u_\delta](r) - [u_\beta - u_\nu](r'))) \right\} \right\rangle_0 -$$

$$\begin{aligned}
& - \left\langle \cos (p([u_\alpha - u_\delta](r) + [u_\beta - u_\nu](r'))) \right\rangle_0 \Big\} \\
\stackrel{C.9}{=} & \Lambda^4 \tilde{y}_\Delta(q)^2 \sum_{\delta, \nu} p^2 \times \\
& \times \left\{ \exp \left(-\frac{p^2}{2} \left\{ \langle [u_\alpha - u_\delta]_r^2 \rangle + \langle [u_\beta - u_\nu]_{r'}^2 \rangle - 2 \langle [u_\alpha - u_\delta]_r [u_\beta - u_\nu]_{r'} \rangle \right\} \right) - \right. \\
& \left. - \exp \left(-\frac{p^2}{2} \left\{ \langle [u_\alpha - u_\delta]_r^2 \rangle + \langle [u_\beta - u_\nu]_{r'}^2 \rangle + 2 \langle [u_\alpha - u_\delta]_r [u_\beta - u_\nu]_{r'} \rangle \right\} \right) \right\} \\
= & \tilde{y}_\Delta^*{}^2 q^4 \sum_{\delta, \nu} p^2 \exp (p^2(G_{\alpha\delta}^0(0) - G_{\alpha\alpha}^0)) \exp (p^2(G_{\beta\nu}^0(0) - G_{\beta\beta}^0)) \times \\
& \times \left\{ \exp (+p^2(G_{\alpha\beta}^0(r - r') - G_{\alpha\nu}^0(r - r') - G_{\delta\beta}^0(r - r') + G_{\delta\nu}^0(r - r'))) - \right. \\
& \left. - \exp (-p^2(G_{\alpha\beta}^0(r - r') - G_{\alpha\nu}^0(r - r') - G_{\delta\beta}^0(r - r') + G_{\delta\nu}^0(r - r'))) \right\}
\end{aligned}$$

$G^0(r = 0)$ und $G^0(r - r')$ können wieder mit den Formeln aus dem Anhang C.1 ausgewertet werden unter Verwendung eines UV-Cutoffs q . Dies führt dann auf den angegebenen Ausdruck 3.19.

Anhang D

zu Kapitel 4

D.1 Herleitung der RG-Gleichungen 4.12–4.15

Renormierung durch $\bar{e}^\alpha/\bar{e}^{\pm\alpha}$ -Paare

Es wird der Teil des exp-Ausdrucks in der Zustandssumme 4.11 betrachtet, der ein Paar aus je einer entgegengesetzt geladenen \bar{e}^α - und $\bar{e}^{\pm\alpha}$ -Vektorladung mit einem Abstand $\vec{b} := \vec{r}^{\pm\alpha} - \vec{r}^\alpha$ enthält, wobei die Beiträge für $a \leq |\vec{b}| \leq ae^\delta$ ausintegriert werden sollen. Die Integrationen über die Orte aller übrigen Vektorladungen (mit Abständen $\geq ae^\delta$ voneinander) bleiben dabei unangetastet. Der durch die Ausintegration generierte Beitrag soll die Kopplungen in einer Zustandssumme mit einem Cutoff ae^δ renormieren. Der betrachtete exp-Ausdruck kann durch Entwicklung nach dem kleinen Abstand \vec{b} umgeformt werden (im folgenden werden kartesische Skalarprodukte mit “.” geschrieben):

$$\begin{aligned} & \exp \left(\sum_{(\gamma, s_\gamma)} \left(\frac{p^2}{\bar{K}} \bar{e}^\alpha \cdot \bar{e}_{s_\gamma}^\gamma + p^2 \kappa \bar{e}^\alpha * \bar{e}_{s_\gamma}^\gamma \right) \left(\tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}^\alpha) - \tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}^{\pm\alpha}) \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{(\gamma\delta, n_{\gamma\delta})} \frac{p^2}{\bar{K}} \bar{e}^\alpha \cdot \bar{e}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \left(\tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}^\alpha) - \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}^{\pm\alpha}) \right) \right) \\ & \simeq \exp \left(\sum_{(\gamma, s_\gamma)} \left(\frac{p^2}{\bar{K}} \bar{e}^\alpha \cdot \bar{e}_{s_\gamma}^\gamma + p^2 \kappa \bar{e}^\alpha * \bar{e}_{s_\gamma}^\gamma \right) \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}^{\pm\alpha}) \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{(\gamma\delta, n_{\gamma\delta})} \frac{p^2}{\bar{K}} \bar{e}^\alpha \cdot \bar{e}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}^{\pm\alpha}) \right) \right) \end{aligned}$$

Es gebe in einem beliebigen Summanden der großkanonischen Zustandssumme 4.11 $S^\alpha S^{-\alpha}$ Paare der betrachteten Sorte, wobei jeweils ausintegriert werden soll über $\int_\Omega d^2 r^{-\alpha} \int_{a \leq |\vec{b}| \leq ae^\delta} d^2 b$ (Ω bezeichnet die ganze Fläche der Schicht), so daß al-

le möglichen Paarkonfigurationen (sowohl was die Zusammensetzung als auch die Anordnung im Ortsraum betrifft) der betrachteten Sorte ausintegriert werden. Dabei wird die exp-Funktion entwickelt in der kleinen Größe \vec{b} bis zur zweiten Ordnung (die erste Ordnung verschwindet bei der Integration). Nach dieser Integration bleiben in 4.11 noch $\tilde{S}^\alpha = (S^\alpha - 1)$ bzw. $\tilde{S}^{-\alpha} = (S^{-\alpha} - 1)$ Integrationen über die Orte der verbleibenden Ladungen der betrachteten Sorten. Der Faktor $S^\alpha S^{-\alpha}$ für die Auswahl möglicher Paare der hier untersuchten Zusammensetzung kürzt sich. Die Integrationen für alle übrigen Ladungssorten werden nicht verändert, so daß das Ergebnis der bis hierher vorgenommenen Integration einem Summanden in der großkanonischen Zustandssumme 4.11 zugeschlagen werden kann, der eine Konfiguration mit \tilde{S}^α bzw. $\tilde{S}^{-\alpha}$ Vektorladungen der betrachteten Sorte beschreibt.

Dies wird in dem betreffenden Summanden durch Renormierung von \tilde{K} und κ aufgefangen. Die beiden "überschüssigen" Fugazitäten y_{gh}^2 müssen ebenfalls mitgeführt werden, und man erhält als zusätzlichen Beitrag von der Ausintegration der $\vec{e}^\alpha/\vec{e}^{-\alpha}$ -Paare im $\tilde{S}^\alpha/\tilde{S}^{-\alpha}$ -Konfigurationssummanden in 4.11 (die übrigen Integrationen in diesem Beitrag werden im folgenden durch $\int \int \int \dots$ angedeutet):

$$\int \int \int \dots y_{gh}^2 \int_{\Omega} d^2 r^{-\alpha} \int_{a \leq |\vec{b}| \leq a e^\delta} d^2 b \dots \quad .$$

Da von jedem $\alpha = 1, \dots, n$ dort Beiträge generiert werden, muß noch summiert $\sum_{\alpha=1}^n$ werden und der zusätzliche Beitrag $(\Delta Z)_{\vec{e}\vec{e}}$, der sich für jeden Summanden in der Zustandssumme 4.11 durch die Ausintegration der $\vec{e}^\alpha/\vec{e}^{-\alpha}$ -Paare ergibt, lautet somit:

$$\begin{aligned} (\Delta Z)_{\vec{e}\vec{e}} &= \int \int \int \dots y_{gh}^2 \sum_{\alpha} \int_{\Omega} d^2 r^{-\alpha} \int_{\delta} d^2 b \exp \left((\dots) \cdot \vec{b} \right) \\ &\simeq \int \int \int \dots y_{gh}^2 \sum_{\alpha} \int_{\Omega} d^2 r^{-\alpha} \int_{\delta} d^2 b \left\{ 1 + (\dots) \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} \left((\dots) \cdot \vec{b} \right)^2 \right\} \\ &= \int \int \int \dots y_{gh}^2 \sum_{\alpha} \int_{\Omega} d^2 r^{-\alpha} 2\pi a^2 \delta \left\{ 1 + \frac{1}{4} a^2 (\dots) \cdot (\dots) \right\} \\ &= \int \int \int \dots y_{gh}^2 \sum_{\alpha} \int_{\Omega} d^2 r^{-\alpha} 2\pi a^2 \delta \left\{ 1 + \frac{1}{4} a^2 \times \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{(\gamma, s_\gamma)} \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma + p^2 \kappa \vec{e}^\alpha * \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma \right) \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}^{-\alpha}) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{(\gamma, n_\gamma \delta)} \frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{\varepsilon}_{n_\gamma \delta}^{\gamma \delta} \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{n_\gamma \delta}^{\gamma \delta} - \vec{r}^{-\alpha}) \right) \right\} \\ &\quad \cdot \left(\sum_{(\nu, s_\nu)} \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}_{s_\nu}^\nu + p^2 \kappa \vec{e}^\alpha * \vec{e}_{s_\nu}^\nu \right) \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{s_\nu}^\nu - \vec{r}^{-\alpha}) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left. \sum_{(\nu\mu, n_{\nu\mu})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{\varepsilon}_{n_{\nu\mu}}^{\nu\mu} \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\nu\mu}}^{\nu\mu} - \vec{r}^{\nu\mu}) \right\}$$

Nach partieller Integration unter Ausnutzung von

$$\vec{\nabla}^2 \tilde{G}(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

und Ausführung der Summation über α mithilfe der in einem weiteren Anhang angegebenen ‘‘Vollständigkeitsrelationen’’ für die Skalarprodukte von Vektorladungen bekommt man daraus

$$\begin{aligned} (\Delta Z)_{\vec{e}\vec{e}} &= \int \int \int \dots y_{gh}^2 \left\{ n\Omega 2\pi a^2 \delta - \frac{\pi}{2} a^4 \delta \times \right. \\ &\times \left(\sum_{(\gamma, s_\gamma) \neq (\nu, s_\nu)} \left(\left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \right)^2 \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma \cdot \vec{e}_{s_\nu}^{\nu} + 2 \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} p^2 \kappa \right) \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma * \vec{e}_{s_\nu}^{\nu} + (p^2 \kappa)^2 n \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma * \vec{e}_{s_\nu}^{\nu} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left. \times \tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}_{s_\nu}^\nu) + \right. \right. \\ &+ \sum_{(\gamma, s_\gamma), (\nu\mu, n_{\nu\mu})} 2 \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \right)^2 \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma \cdot \vec{\varepsilon}_{n_{\nu\mu}}^{\nu\mu} \tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}_{n_{\nu\mu}}^{\nu\mu}) + 0 + \\ &\left. \left. + \sum_{(\gamma\delta, n_{\gamma\delta}) \neq (\nu\mu, n_{\nu\mu})} \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \right)^2 \vec{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \cdot \vec{\varepsilon}_{n_{\nu\mu}}^{\nu\mu} \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}_{n_{\nu\mu}}^{\nu\mu}) \right) \right\} \end{aligned}$$

Bei jedem Summanden der Zustandssumme 4.11 kommt also dieser Beitrag $(\Delta Z)_{\vec{e}\vec{e}}$ hinzu. Zwischen den Fugazitätsfaktoren und den Integrationen steht dann in 4.11 statt einem Faktor 1 ein Faktor

$$1 + y_{gh}^2 \times \{ \dots \} \quad .$$

Da $\{ \dots \} \propto \delta$ kann in erster Ordnung in δ re-exponenziert werden, was einen Faktor

$$\exp \left(y_{gh}^2 \times \{ \dots \} \right)$$

ergibt. Man sieht, daß der erste Summand in $\{ \dots \}$ einen konstanten Vorfaktor in der Zustandssumme ergibt und damit weggelassen werden kann im folgenden. Der zweite Summand in $\{ \dots \}$ kann hingegen durch folgende Renormierung in den Kopplungen \tilde{K} und κ absorbiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2\tilde{K}} &\xrightarrow{RG} \frac{p^2}{2\tilde{K}} - \frac{\pi}{2} a^4 \delta \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \right)^2 y_{gh}^2 \\ \frac{p^2 \kappa}{2} &\xrightarrow{RG} \frac{p^2 \kappa}{2} - \frac{\pi}{2} a^4 \delta \left(2 \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} p^2 \kappa \right) + (p^2 \kappa)^2 n \right) y_{gh}^2 \end{aligned}$$

Dies führt dann mit $dl = \delta$ und $\tilde{y}_{gh} = y_{gh}a^2$ zu den gesuchten RG-Gleichungen 4.12 und 4.13:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tilde{K}}{dl}\right)_{\tilde{e}\tilde{e}} &= \pi p^2 \tilde{y}_{gh}^2 \\ \left(\frac{d\kappa}{dl}\right)_{\tilde{e}\tilde{e}} &= -\pi p^2 \tilde{y}_{gh}^2 \kappa \left(n\kappa + \frac{2}{\tilde{K}}\right) \end{aligned}$$

“Vollständigkeitsrelationen” für die verwendeten Skalarprodukte von Vektorladungen

$$\begin{aligned} (i) \quad \sum_{\alpha} (\tilde{e}^{\alpha} \cdot \tilde{e}^{\gamma})(\tilde{e}^{\alpha} \cdot \tilde{e}^{\delta}) &= \tilde{e}^{\gamma} \cdot \tilde{e}^{\delta} \\ (ii) \quad \sum_{\alpha} (\tilde{e}^{\alpha} * \tilde{e}^{\gamma})(\tilde{e}^{\alpha} * \tilde{e}^{\delta}) &= n\tilde{e}^{\gamma} * \tilde{e}^{\delta} \\ (iii) \quad \sum_{\alpha} (\tilde{e}^{\alpha} \cdot \tilde{e}^{\gamma})(\tilde{e}^{\alpha} * \tilde{e}^{\delta}) &= \tilde{e}^{\gamma} * \tilde{e}^{\delta} \\ (iv) \quad \sum_{\alpha} (\tilde{e}^{\alpha} \cdot \tilde{\varepsilon}^{\gamma\delta})(\tilde{e}^{\alpha} \cdot \tilde{\varepsilon}^{\nu\mu}) &= \tilde{\varepsilon}^{\gamma\delta} \cdot \tilde{\varepsilon}^{\nu\mu} \\ (v) \quad \sum_{\alpha} (\tilde{e}^{\alpha} \cdot \tilde{\varepsilon}^{\gamma\delta})(\tilde{e}^{\alpha} \cdot \tilde{e}^{\nu}) &= \tilde{\varepsilon}^{\gamma\delta} \cdot \tilde{e}^{\nu} \\ (vi) \quad \sum_{\alpha} (\tilde{e}^{\alpha} \cdot \tilde{\varepsilon}^{\gamma\delta})(\tilde{e}^{\alpha} * \tilde{e}^{\nu}) &= 0 \end{aligned}$$

Renormierung durch $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta}/\tilde{\varepsilon}^{\beta\alpha}$ -Paare

Die Rechnungen verlaufen hier völlig analog zu denen für $\tilde{e}^{\alpha}/\tilde{e}^{-\alpha}$ -Paare im vorangehenden Teil des Anhangs. Daher sollen hier nur einige Schritte der Rechnung angegeben werden. Es wird der Teil des exp-Ausdrucks in 4.11 betrachtet, der ein Paar aus einer $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ - und einer $\tilde{\varepsilon}^{\beta\alpha}$ -Vektorladung enthält, und nach dem Abstandsvektor $\vec{b} := \vec{r}^{\beta\alpha} - \vec{r}^{\alpha\beta}$ entwickelt mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \exp \left(\sum_{(\gamma\delta, n_{\gamma\delta})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}^{\beta\alpha}) \right) + \right. \\ \left. + \sum_{(\gamma, s_{\gamma})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{e}_{s_{\gamma}}^{\gamma} \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{s_{\gamma}}^{\gamma} - \vec{r}^{\beta\alpha}) \right) \right) \end{aligned}$$

Der zusätzliche Beitrag $(\Delta Z)_{\tilde{e}\tilde{e}}$, der für jeden Summanden der Zustandssumme 4.11 durch die Ausintegration der $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta}/\tilde{\varepsilon}^{\beta\alpha}$ -Paare entsteht, lautet dann (es werden neben den bereits angegebenen “Vollständigkeitsrelationen” noch weitere benötigt, die wieder in einem nachfolgenden Anhang stehen):

$$\begin{aligned} (\Delta Z)_{\tilde{e}\tilde{e}} &= \int \int \int \dots y_{\Delta}^2 \sum_{\alpha < \beta} \int_{\Omega} d^2 r^{\beta\alpha} \int_{\delta} d^2 b \exp \left((\dots) \cdot \vec{b} \right) \\ &= \int \int \int \dots y_{\Delta}^2 \sum_{\alpha < \beta} \int_{\Omega} d^2 r^{\beta\alpha} 2\pi a^2 \delta \left\{ 1 + \frac{1}{4} a^2 \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{(\gamma\delta, n_{\gamma\delta})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}^{\beta\alpha}) + \sum_{(\gamma, s_\gamma)} \frac{p^2}{\tilde{K}} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{e}_{s_\gamma}^\gamma \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}^{\beta\alpha}) \right) \\
& \cdot \left(\sum_{(\nu\mu, n_{\nu\mu})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{\varepsilon}_{n_{\nu\mu}}^{\nu\mu} \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\nu\mu}}^{\nu\mu} - \vec{r}^{\beta\alpha}) + \sum_{(\nu, s_\nu)} \frac{p^2}{\tilde{K}} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{e}_{s_\nu}^\nu \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}_{s_\nu}^\nu - \vec{r}^{\beta\alpha}) \right) \Bigg\} \\
& \int \int \int \dots y_\Delta^2 \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \Omega 2\pi a^2 \delta - \frac{\pi}{2} a^4 \delta \times \right. \\
& \times \left(\sum_{(\gamma\delta, n_{\gamma\delta}) \neq (\nu\mu, n_{\nu\mu})} \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \right)^2 n \tilde{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \cdot \tilde{\varepsilon}_{n_{\nu\mu}}^{\nu\mu} \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}_{n_{\nu\mu}}^{\nu\mu}) + \right. \\
& + \sum_{(\gamma\delta, n_{\gamma\delta}), (\nu, s_\nu)} 2 \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \right)^2 n \tilde{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \cdot \tilde{e}_{s_\nu}^\nu \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}_{s_\nu}^\nu) + \\
& \left. \left. + \sum_{(\gamma, s_\gamma) \neq (\nu, s_\nu)} \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \right)^2 (n \tilde{e}_{s_\gamma}^\gamma \cdot \tilde{e}_{s_\nu}^\nu - \tilde{e}_{s_\gamma}^\gamma * \tilde{e}_{s_\nu}^\nu) \tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}_{s_\nu}^\nu) \right) \right\}
\end{aligned}$$

Dies führt zu einer RG-Transformation

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{2\tilde{K}} & \xrightarrow{RG} \frac{p^2}{2\tilde{K}} - \frac{\pi}{2} a^4 \delta \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \right)^2 n y_\Delta^2 \\
\frac{p^2 \kappa}{2} & \xrightarrow{RG} \frac{p^2 \kappa}{2} + \frac{\pi}{2} a^4 \delta \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \right)^2 y_\Delta^2
\end{aligned}$$

und schließlich zu den gesuchten RG-Gleichungen 4.14 und 4.15:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\tilde{K}}{dl} \right)_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}} & = \pi p^2 n \tilde{y}_\Delta^2 \\
\left(\frac{d\kappa}{dl} \right)_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}} & = \pi p^2 \tilde{y}_\Delta^2 \frac{1}{\tilde{K}^2}
\end{aligned}$$

Weitere “Vollständigkeitsrelationen”

$$\begin{aligned}
(vii) \quad \sum_{\alpha < \beta} (\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{\varepsilon}^{\gamma\delta}) (\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{\varepsilon}^{\nu\mu}) & = n \tilde{\varepsilon}^{\gamma\delta} \cdot \tilde{\varepsilon}^{\nu\mu} \\
(viii) \quad \sum_{\alpha < \beta} (\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{\varepsilon}^{\gamma\delta}) (\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{e}^\nu) & = n \tilde{\varepsilon}^{\gamma\delta} \cdot \tilde{e}^\nu \\
(ix) \quad \sum_{\alpha < \beta} (\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{e}^\gamma) (\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \cdot \tilde{e}^\nu) & = n \tilde{e}^\gamma \cdot \tilde{e}^\nu - \tilde{e}^\gamma * \tilde{e}^\nu
\end{aligned}$$

D.2 Herleitung der RG-Gleichungen 4.16,4.17

Renormierung durch $\vec{e}^\alpha/\vec{\varepsilon}^{\beta\alpha}$ - und $\vec{e}^{-\alpha}/\vec{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ -Paare

Es wird der Teil des exp-Ausdrucks in der Zustandssumme 4.11 betrachtet, der ein Paar aus einer \vec{e}^α - und $\vec{\varepsilon}^{\beta\alpha}$ -Vektorladung mit einem Abstand $\vec{b} := \vec{r}^{\beta\alpha} - \vec{r}^\alpha$ enthält, wobei die Beiträge für $a \leq |\vec{b}| \leq ae^\delta$ ausintegriert werden sollen. Die Integrationen über die Orte aller übrigen Vektorladungen (mit Abständen $\geq ae^\delta$ voneinander) bleiben dabei unangetastet. Der durch die Ausintegration generierte Beitrag soll die Kopplungen in einer Zustandssumme mit einem Cutoff ae^δ renormieren. Wird hier nach dem kleinen Abstand \vec{b} entwickelt, ist die führende Ordnung die nullte und man kann folgende Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned}
& \exp \left(\sum_{(\gamma\delta, n_{\gamma\delta})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \left(\vec{e}^\alpha \cdot \vec{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}^\alpha) + \vec{\varepsilon}^{\beta\alpha} \cdot \vec{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}^{\beta\alpha}) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{(\gamma, s_\gamma)} \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma + p^2 \kappa \vec{e}^\alpha * \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma \right) \tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}^\alpha) + \frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{\varepsilon}^{\beta\alpha} \cdot \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma \tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}^{\beta\alpha}) \right) \\
& \simeq \exp \left(\sum_{(\gamma\delta, n_{\gamma\delta})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \left(\vec{e}^\alpha \cdot \vec{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} + \vec{\varepsilon}^{\beta\alpha} \cdot \vec{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \right) \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}^\alpha) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{(\gamma, s_\gamma)} \left(\left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma + p^2 \kappa \vec{e}^\alpha * \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma \right) + \frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{\varepsilon}^{\beta\alpha} \cdot \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma \right) \tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}^\alpha) \right) \\
& = \exp \left(\sum_{(\gamma\delta, n_{\gamma\delta})} \frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\beta \cdot \vec{\varepsilon}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} \tilde{G}(\vec{r}_{n_{\gamma\delta}}^{\gamma\delta} - \vec{r}^\alpha) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{(\gamma, s_\gamma)} \left(\frac{p^2}{\tilde{K}} \vec{e}^\beta \cdot \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma + p^2 \kappa \vec{e}^\beta * \vec{e}_{s_\gamma}^\gamma \right) \tilde{G}(\vec{r}_{s_\gamma}^\gamma - \vec{r}^\alpha) \right)
\end{aligned}$$

Das $\vec{e}^\alpha/\vec{\varepsilon}^{\beta\alpha}$ -Paar kann also durch die Ladung \vec{e}^β am Ort \vec{r}^α ersetzt werden, wenn man in der letzten Gleichung die Definition der Skalarprodukte für die Vektorladungen beachtet. Es gebe $N^{\beta\alpha} S^\alpha$ Paare der betrachteten Sorte und S^β Ladungen von der Sorte der Ersatzladung in einem beliebigen Summanden der Zustandssumme 4.11. Für jedes Paar wird integriert über $\int_\Omega d^2 r^\alpha \int_{a \leq |\vec{b}| \leq ae^\delta} d^2 b$, wobei die Integration $\int_{a \leq |\vec{b}| \leq ae^\delta} d^2 b$ trivial ist, da der Integrand nicht mehr von \vec{b} abhängt. Es bleiben dann noch $\tilde{S}^\alpha = (S^\alpha - 1)$ bzw. $\tilde{N}^{\beta\alpha} = (N^{\beta\alpha} - 1)$ Integrationen für die Teilchensorten, aus denen das Paar zusammengesetzt ist, und mit der noch nicht ausgeführten Integration $\int_\Omega d^2 r^\alpha$ hat man $\tilde{S}^\beta = (S^\beta + 1)$ Integrationen für Ladungen der Sorte \vec{e}^β . Der Faktor $N^{\beta\alpha} S^\alpha$ für die Anzahl möglicher Paarzusammensetzungen kann gekürzt werden. Die Integrationen für alle übrigen Ladungsorten ändern sich nicht. Der gesamte Beitrag kann dann einem Summanden in

der großkanonischen Zustandssumme 4.11 zugeschlagen werden, der eine Konfiguration mit \tilde{S}^α , $\tilde{N}^{\beta\alpha}$ und \tilde{S}^β Ladungen der involvierten Sorten beschreibt. Dabei muß eine zusätzliche Fugazität y_Δ und ein zusätzlicher Faktor \tilde{S}^β berücksichtigt werden. Außerdem gibt es $(n-1)$ Möglichkeiten, eine Ladung \tilde{e}^β auf diese Art zu generieren, so daß auch dieser Faktor noch hinzugefügt werden muß zum zusätzlichen Beitrag, der sich für den $\tilde{S}^\alpha/\tilde{N}^{\beta\alpha}/\tilde{S}^\beta$ -Summanden in der Zustandssumme 4.11 durch Ausintegration der $\tilde{e}^\alpha/\tilde{e}^{\beta\alpha}$ -Paare zusätzlich ergibt. Da für jedes $\beta = 1, \dots, n$ dort Beiträge generiert werden, muß über diesen Index noch summiert werden. Schließlich ergibt sich für den zusätzlichen Beitrag $(\Delta Z)_{\tilde{e}\tilde{e}}$ der zu jedem Summanden in der Zustandssumme hinzugefügt wird aufgrund der ausintegrierten Beiträge:

$$(\Delta Z)_{\tilde{e}\tilde{e}} = \int \int \int \dots y_\Delta \sum_{\beta=1}^n (n-1) \tilde{S}^\beta 2\pi a^2 \delta \exp(\dots)$$

Zwischen den Fugazitätsfaktoren und den Integrationen steht dann in 4.11 statt einem Faktor 1 ein Faktor (Umformung in erster Ordnung in δ)

$$1 + y_\Delta \sum_{\beta=1}^n (n-1) \tilde{S}^\beta 2\pi a^2 \delta \simeq \prod_{\beta=1}^n (1 + y_\Delta (n-1) \tilde{S}^\beta 2\pi a^2 \delta) \quad .$$

Genau die gleichen Überlegungen können für $\tilde{e}^{-\alpha}/\tilde{e}^{\alpha\beta}$ -Paare durchgeführt werden, wobei man statt einer Ersatzladung \tilde{e}^β eine Ersatzladung $\tilde{e}^{-\beta}$ erhält. Dann kann das Produkt in der letzten Gleichung auf Indizes $\prod_{\beta=\pm 1}^{\pm n}$ ausgedehnt werden. Der gesamte Faktor kann dann (siehe 4.11) wegen

$$(y_{gh} + \delta y_{gh})^{\tilde{S}^\beta} \simeq y_{gh}^{\tilde{S}^\beta} \left(1 + \frac{\tilde{S}^\beta}{y_{gh}} \delta y_{gh}\right)$$

in einer Renormierung

$$\delta y_{gh} = y_\Delta y_{gh} (n-1) 2\pi a^2 \delta$$

von y_{gh} absorbiert werden. Dies führt mit $dl = \delta$ und $\tilde{y}_{gh} = y_{gh} a^2$ zu der RG-Gleichung 4.17:

$$\left(\frac{d\tilde{y}_{gh}}{dl}\right)_{\tilde{e}\tilde{e}} = 2\pi(n-1) \tilde{y}_\Delta \tilde{y}_{gh}$$

Renormierung durch $\tilde{e}^{\alpha\beta}/\tilde{e}^{\beta\alpha}$ -Paare

Die Überlegungen hierzu verlaufen völlig analog zu denen des letzten Abschnitts (siehe in diesem Fall auch [20]) und werden daher nicht mehr gesondert aufgeführt.

Danken . . .

. . . möchte ich allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben:

- Prof. T. Nattermann, der die Arbeit ausgezeichnet betreute, sich stets (auch in der Ferne) zur Diskussion bereitfand und mit seinen Hinweisen neue Anstöße gab,
- Igor Lyuksyutov, der mir immer mit seinem fachkundigen Rat zur Seite stand,
- Heiko Leschhorn, Markus Mentzel, Semjon Stepanow und Lei-Han Tang für das angenehme Arbeitsklima in unserer Arbeitsgruppe und
- den Mitbewohnern von Zimmer 105K (Marc Binderberger, Ralf Bundschuh, Thomas Dupré, Rochus Klesse und Marcus Metzler) für die gute freundschaftliche Atmosphäre während des vergangenen Jahres.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich meine Diplomarbeit selbständig angefertigt habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Köln, den