
**Kontinuierliche unitäre Transformationen
für Hardcore-Bosonen
im Ising-Modell im transversalen Feld**

Masterarbeit

Lehrstuhl für Theoretische Physik I
Fakultät Physik
Technische Universität Dortmund

Gary Ferkinghoff
2017

Gutachter : Prof. Dr. G.S. Uhrig
Dr. Jörg Bünemann
Abgabedatum: 07.11.2017

Kurzfassung

Hardcore-Bosonen sind Quasiteilchen, welche Eigenschaften von Fermionen und Bosonen vereinen und in diversen Festkörper-Systemen auftauchen. Das Lösen des Hamiltonoperators von stark korrelierten Systemen, deren elementare Anregungen Hardcore-Bosonen sind, ist im Allgemeinen eine nicht-triviale Aufgabe in der theoretischen Physik. Eine etablierte und numerisch robuste Methode, um derartige Hamiltonoperatoren zu diagonalisieren, stellt die der kontinuierlichen unitären Transformation (KUT) dar.

In dieser Arbeit wird das Ising-Modell im transversalen Feld (IMTF) im Grenzfall eines starken Magnetfeldes am quantenkritischen Punkt (QKP) betrachtet, um die Effektivität der KUT für Hardcore-Bosonen im Impulsraum zu testen. Als Referenzpunkte werden die analytische Lösung des IMTF hergeleitet und zusätzlich eine KUT im Ortsraum durchgeführt. Zur Beschreibung der niederenergetischen Beiträge werden in der KUT nur Operatorterme bis zur quartischen Ordnung berücksichtigt, wie über ein Skalierungsargument begründet wird.

Insbesondere wird das Vorzeichen der Wechselwirkungsterme sowie die Energielücke für verschiedene Störparameter analysiert. Hierbei werden die Ergebnisse mit denen einer Vorarbeit zu demselben Thema [1] verglichen und es wird untersucht, welchen Einfluss unphysikalische Terme, die aus der Hardcore-Algebra entstehen, auf die KUT haben.

Abstract

Hard-core bosons are quasiparticles, which combine properties of fermions and bosons and appear in various solid-state systems. Solving Hamiltonians of strongly correlated systems, whose elementary excitations are hard-core bosons, is generally a non-trivial problem in theoretical physics. A well established and numerically robust method to diagonalize Hamiltonians of this type are continuous unitary transformations (CUTs).

In this thesis the transverse field Ising model (TFIM) for strong magnetic fields will be considered at its quantum critical point (QCP) to check the applicability of CUTs to models of hard-core bosons in momentum space. As a point of reference the analytic solution of the TFIM will be derived and additionally a CUT in real space will be performed. To describe the low energy contribution only operatorterms up to quartic order in the CUT will be taken into account, as it will be justified by a scaling argument.

Especially the sign of the interaction terms will be analyzed, as well as the gap for different perturbation parameters. The received results will be compared with a preceding thesis concerning the same topic [1]. Additionally the influence of non-physical terms, which occur from the hard-core algebra, on the CUT will be studied.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Grundlegendes	1
1.2. Hardcore-Bosonen und Magnetismus	2
1.3. Aufbau dieser Arbeit	3
2. Theorie	5
2.1. Hardcore-Bosonen	5
2.1.1. Hardcore-Algebra im Ortsraum	6
2.1.2. Hardcore-Algebra im Impulsraum	7
2.1.3. Physikalische Beispiele	9
2.2. IMTF: Ising-Modell im transversalen Feld	10
2.2.1. Modellbeschreibung	10
2.2.2. Äquivalenz zu Hardcore-Bosonen-Modellen	11
2.2.3. Grenzfall eines starken Magnetfeldes	13
2.2.4. Analytischer Lösungsweg	14
2.2.5. Analytische Ergebnisse am quantenkritischen Punkt	17
2.2.6. Vergleich zwischen Hardcore-Bosonen und Bosonen	22
2.2.7. Grenzen des analytischen Lösungsansatzes	22
3. Methodik	23
3.1. KUT - Kontinuierliche unitäre Transformation	23
3.1.1. Grundidee	24
3.1.2. Selbstähnliche KUT	26
3.1.3. MKU-Generator	28
3.2. Aufstellen der Flussgleichungen für das IMTF	29
3.2.1. Grundlegendes zur Bearbeitung der Flussgleichungen	30
3.2.2. Wahl des Trunkierungsschema	31
3.2.3. Bestimmung von H und η	34
3.2.4. Physikalische Bedeutung der Terme von $\bar{H}^{(1)}$	39
3.2.5. Reduktion der Terme von $\bar{H}^{(1)}$	40

3.2.6.	Berechnung des Kommutators $[\bar{\eta}^{(1)}, \bar{H}^{(1)}]$	44
3.2.7.	Irrelevante Terme	48
3.3.	Lösen der Flussgleichungen für das IMTF	49
3.3.1.	Residual Off Diagonality (ROD)	50
4.	Ergebnisse	51
4.1.	Konvergenz im Impulsraum	51
4.2.	Konvergenz im Ortsraum	54
4.3.	Energielücke	56
4.4.	Wechselwirkung $C_{k,k',q}$	59
5.	Fazit	60
A.	Jordan-Wigner-Transformation des IMTF	61
B.	Fourier-Transformation des IMTF	65
C.	KUT für einfache Bosonen	67
D.	Kommutatoren der KUT für Hardcore-Bosonen	69
4.1.	Impulsraum	69
4.2.	Ortsraum	85
E.	Flussgleichungen der KUT für Hardcore-Bosonen	95
5.1.	Impulsraum	95
5.2.	Ortsraum	115
	Abbildungsverzeichnis	125
	Glossar	128
	Literaturverzeichnis	130

1. Einleitung

1.1. Grundlegendes

Nach unserem heutigen Verständnis lässt sich unsere physikalische Welt auf fundamentale Elementarteilchen herunterbrechen, welche bestimmten Symmetrien gehorchen. Welche Symmetrien dabei möglich sind, hängt stark von der Dimension des Raums ab, in welchem diese Teilchen existieren [2]. So existieren in 2 Raumdimensionen **Anyonen**, welche bei der Vertauschung zweier beliebiger Teilchen einen Phasenfaktor $|\Psi_1\Psi_2\rangle = e^{i\theta}|\Psi_2\Psi_1\rangle$ erhalten [3].

In unserer dreidimensionalen Welt existieren jedoch nur **Bosonen** ($\theta = 2\pi$) mit einer symmetrischen Wellenfunktion und **Fermionen** ($\theta = \pi$) mit einer antisymmetrischen Wellenfunktion. Aus der Antisymmetrie der Fermionen resultiert das **Pauli-Prinzip**, nach welchem keine zwei Teilchen in demselben Zustand vorliegen dürfen. Dieses führt zu fundamentalen Unterschieden zwischen der Physik von Bosonen und Fermionen [4].

Zur Differenzierung der unterschiedlichen emergenten Phänomene in der Festkörperphysik unterscheidet man zwischen unterschiedlichen **Phasen**¹, in denen Festkörper vorliegen können. Während sich physikalische Phasen durch einfache makroskopische Parameter wie die Dichte oder Korrelationen definieren lassen, liefert die **Landau-Theorie** einen Zugang über die vorliegenden Symmetrien, die durch einen (in der Ginzburg-Landau-Theorie lokalen) Ordnungsparameter gekennzeichnet ist [5].

Findet durch Änderung eines physikalischen Parameters wie der Temperatur oder des Drucks ein kontinuierlicher **Phasenübergang**² und damit ein Symmetriebruch statt, wird der entsprechende Übergangspunkt im Phasendiagramm als **kritischer Punkt (KP)** bezeichnet.

Wird ein Phasenübergang bei verschwindender Temperatur untersucht, der nicht thermisch sondern durch einen gewissen Quantenparameter (beispielsweise die Größe der vorliegenden physikalischen Kopplungen oder der Dotierungsstärke) induziert wird, ist von einem **quantenkritischen Punkt (QKP)** die Rede. In Abbildung 1.1 ist dieser Sachverhalt schematisch dargestellt.

¹Prominente Beispiele sind (anti-)ferromagnetische und paramagnetische Phasen.

²Anders als bei diskontinuierlichen Phasenübergängen (Phasenübergänge 1. Ordnung) weist das thermodynamische Potential bei kontinuierlichen Phasenübergängen keinen Knick auf. Ein berühmtes Beispiel ist der Übergang vom Para- zum Ferromagnetismus, während die Verdampfung von Wasser ein typisches Beispiel für einen diskontinuierlichen Übergang ist. [6]

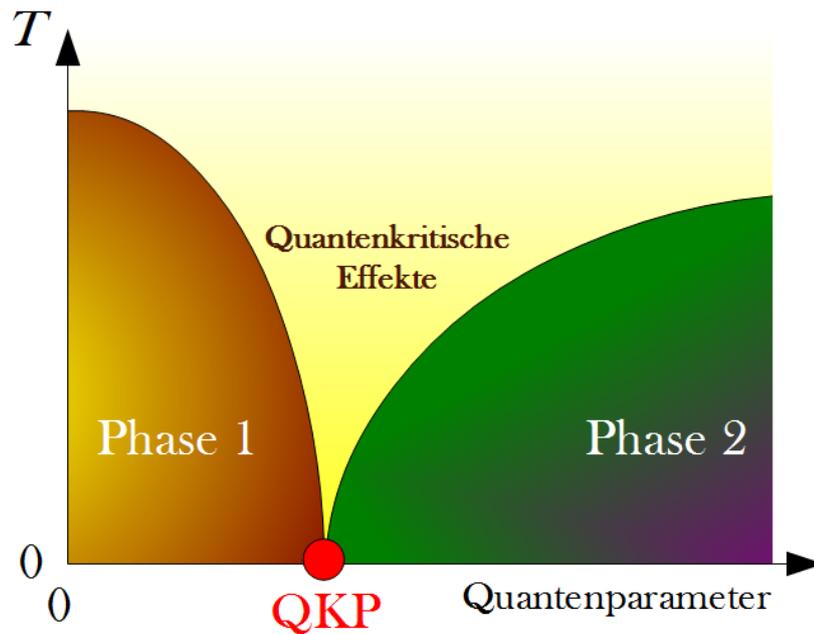


Abb. 1.1.: Schematische Phasendiagramm in der Nähe eines quantenkritischen Punktes. Bei verschwindender Temperatur findet abhängig von einem hier nicht näher definierten Quantenparameter (Dotterung, Kopplungsstärke, ...) ein Phasenübergang statt.

1.2. Hardcore-Bosonen und Magnetismus

In der theoretischen Festkörperphysik interessiert man sich für Systemen mit makroskopisch vielen ($> 10^{23}$) wechselwirkenden Teilchen und den resultierenden emergenten Phänomenen, die weit über die mikroskopischen Eigenschaften der einzelnen Teilchen hinausgehen. Da sich physikalische Systeme in der Regel in der Nähe ihres Zustandes mit der niedrigsten Energie befinden, aus dem sie sich nur durch thermische Anregungen herausbewegen, wird in der Niederenergiephysik häufig versucht, diesen **Grundzustand** zu finden und Abweichungen von ihm durch **elementare Anregungen**³ zu beschreiben. Diese fundamentalen Anregungen werden als Quasiteilchen beschrieben, die erzeugt und vernichtet werden sowie miteinander interagieren können, aber nicht zwangsweise bosonischen oder fermionischen Charakter aufweisen.

Ein Beispiel für nichttriviale⁴ Anregungen sind **Hardcore-Bosonen**, welche Eigenschaften von Bosonen und Fermionen kombinieren. Diese Quasiteilchen kommen in der Beschreibung verschiedener Phänomene der Festkörperphysik⁵ vor, weshalb Lösungsstrategien für Probleme mit Hardcore-Bosonen interessant sind.

Durch die kompliziertere Hardcore-Algebra ist es jedoch schwieriger, Modelle mit diesen Teilchen zu behandeln, weshalb in dieser Arbeit auch ein einfaches Hardcore-Bosonen-Modell in einer Dimension untersucht werden soll.

³Eine typische elementare Anregung bei Quantenmagneten sind Triplonen in stark dimerisierten Quanten-Antiferromagneten [7, 8]. Siehe hierzu auch Abschnitt 2.1.3.

⁴Nicht rein bosonische oder fermionische

⁵Beispiele für Hardcore-Bosonen sind Triplonen (siehe oben) und die in dieser Arbeit behandelten Anregungen des Ising-Modells im starken transversalen Feld, siehe auch 2.2.2. Für weitere Beispiele siehe 2.1.3.

Ein konkretes Anwendungsbeispiel findet sich in Hochtemperatur-Supraleitern, die, anders als konventionelle Supraleiter, kritische Temperaturen T_c jenseits von 30 K bis zu 138 K (noch höher unter Druckeinwirkung) besitzen [9]. Während konventionelle Supraleiter gut im Rahmen der BCS-Theorie⁶ durch Bildung von Cooper-Paaren aus phononischen Wechselwirkungen beschrieben werden können [10], ist die grundlegende Physik von Hochtemperatur-Supraleitern weiterhin ein Gegenstand der aktuellen Forschung [11, 12].

Da viele dieser Supraleiter ohne Dotierung eine magnetisch geordnete Phase aufweisen [13, 14], liegt die Vermutung nahe, dass die magnetische Wechselwirkung für diese Materialien dominant ist und damit auch für die Entstehung der supraleitenden Phase bei Dotierung zentral ist. In Abbildung 1.2 ist ein typisches Phasendiagramm für einen solchen Hochtemperatur-Supraleiter zu sehen.

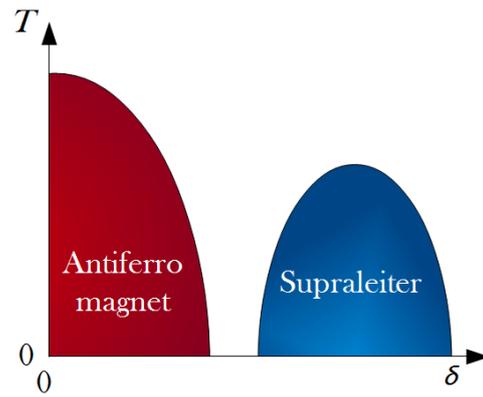


Abb. 1.2.: Typisches Phasendiagramm eines Hochtemperatur-Supraleiters für verschiedene Temperaturen T und Dotierungsstärken δ .

1.3. Aufbau dieser Arbeit

In Kapitel 2 wird zuerst in 2.1 die Algebra der Hardcore-Bosonen eingeführt und es werden Beispiele genannt, in welchen diese Teilchen zur Beschreibung eines physikalischen System nützlich sind. Ferner wird in 2.2 das **IMTF (Ising-Modell im transversalen Feld)** vorgestellt, welches ein Spezialfall des Heisenberg-Modells und äquivalent zu einem Hardcore-Bosonen-Modell ist [15, 16].

Da die elementaren Anregungen dieses Systems im Grenzfall eines sehr starken Magnetfeldes Hardcore-Bosonen sind, lassen sich hieran Lösungsmethode für diese Art von Quasiteilchen testen. Hierzu wird in 2.2.4 die analytische Lösung dieses Modells in einer Dimension hergeleitet. Die wesentlichen Resultate der Rechnung in Form der **Energiedispersion** und **Energielücke** werden in 2.2.5 kurz aufgeführt und die Äquivalenz zu Hardcore-Bosonen wird in 2.2.2 aufgezeigt.

Ferner ergeben sich für das IMTF einige physikalische Anwendungen. Als analytisch lösbarer Spezialfall des allgemeineren Heisenberg-Modells ist dieses Modell geeignet zur Beschreibung magnetischer Ordnung und findet in abgewandelter Form Anwendung bei verschiedenen Problemen. Beispiele sind Spin-Gläser [17, 18], Gittereichtheorien [19] und gewisse biologische Vorgänge wie das Öffnen/Schließen von Ionenkanälen [20].

⁶Benannt nach John Bardeen, Leon Neil Cooper und John Robert.

In Kapitel 3 wird auf die in dieser Arbeit angewandten Methodik zur Diagonalisierung von Hamiltonoperatoren eingegangen, welche anhand des IMTF bezüglich ihrer Anwendung auf Hardcore-Bosonen getestet werden soll. Hierbei wird zuerst die **kontinuierliche unitäre Transformation (KUT)** eingeführt, mit welcher Hamiltonoperatoren durch die Lösung eines Differentialgleichungssystems diagonalisiert oder zumindest auf ein effektives Modell reduziert werden können. Hierzu muss ein passender **Generator** gewählt werden, wozu hier in 3.1.3 der **MKU-Generator**⁷ vorgestellt wird. Mit diesem lassen sich die **Flussgleichungen** aufstellen, die nur noch numerisch integriert werden müssen.

In dieser Arbeit wird konkret eine **selbstähnlichen KUT (sKUT)** angewendet, bei welcher unwichtige Terme trunziert werden, da sonst beliebig viele Beiträge auftauchen können. Das **Trunkierungsschema** wird in 3.2.2 anhand eines Skalierungsargumentes ausgearbeitet und es wird der Unterschied zum Schema aus einer Vorarbeit [1] klargestellt. Ferner werden in 3.2 die Flussgleichungen für das vorliegende System im Ortsraum und Impulsraum aufgestellt und in 3.3 gezeigt wie diese gelöst wurden. Hierbei werden die Vorzüge der beiden Darstellungen für Quantenphasenübergänge aufgezeigt und es wird darauf eingegangen, wie die Hardcore-Kommutatoren beim Aufstellen und Lösen dieser Gleichungen explizit beachtet werden müssen.

Ferner wird auf diverse Symmetrien zur Vereinfachung der Flussgleichungen eingegangen. Darüber hinaus werden in 3.2.5.4 **unphysikalische Terme** diskutiert, welche aus der Hardcore-Algebra resultieren. Die **Residual Off Diagonality (ROD)** wird in 3.3.1 als Maß eingeführt, welches die Konvergenz der KUT abschätzt.

In Kapitel 4 werden die Resultate der Berechnung mit den Flussgleichungen präsentiert und mit der Vorarbeit zu diesem Thema [1] verglichen.

In abschließenden Kapitel 5 werden die gewonnenen Erkenntnisse zur Anwendung einer KUT auf Modelle von Hardcore-Bosonen zusammengefasst und es wird ein Ausblick für zukünftige Arbeiten gegeben.

⁷Benannt nach A. Mielke, C. Knetter und G. S. Uhrig.

2. Theorie

In diesem Kapitel wird die Algebra der Hardcore-Bosonen inklusive ihrer Eigenschaften vorgestellt. Ferner wird sie in 2.1.2 in den Impulsraum transformiert und es werden in 2.1.3 einige physikalische Beispiele für dieses Konzept genannt.

Danach wird in 2.2 das IMTF (Ising-Modell im transversalen Feld) vorgestellt und in 2.2.2 die Äquivalenz zu einem Modell von Hardcore-Bosonen aufgezeigt. In einer Dimension im Grenzfall eines starken Magnetfeldes wird in 2.2.4 ein analytischer Lösungsweg aufgezeigt und die resultierende Dispersionsrelation samt quantenkritischem Punkt in 2.2.5 kurz diskutiert, sowie in 2.2.6 ein kurzer Vergleich mit einem normalen bosonischen Modell durchgeführt. Am Ende werden 2.2.7 die Grenzen dieses analytischen Ansatzes aufgezeigt, um die Verwendung einer KUT im folgenden Kapitel 3 zu motivieren.

2.1. Hardcore-Bosonen

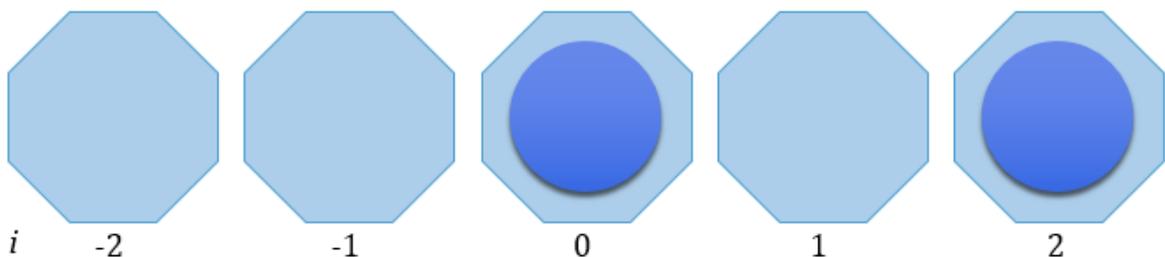


Abb. 2.1.: Schematische Darstellung von Hardcore-Bosonen in 1D: Obwohl es sich um Bosonen handelt, kann wie bei Fermionen jeder Gitterplatz mit Index i maximal einmal besetzt werden, was hier durch die achteckigen Plätze symbolisiert ist, die mit einem einzigen runden Teilchen bereits ausgefüllt sind.

Die elementaren Anregungen, die sich für kompliziertere physikalische Systeme ergeben, sind häufig nicht rein bosonischer oder fermionischer Natur, sondern besitzen eine kompliziertere Algebra. Im Fall der Hardcore-Bosonen ergibt sich eine Mischung aus bosonischen Kommutatoren und fermionischen Antikommutatoren. Effektiv entspricht dies einem System aus unter Vertauschung symmetrischen (also bosonischen) Teilchen, die jedoch dem Pauli-Verbot unterworfen sind, sodass keine zwei Teilchen in demselben Zustand - das heißt in der Regel auf demselben Gitterplatz - existieren können. Die entsprechende Algebra lässt sich elegant formulieren, sorgt jedoch für eine erheblich kompliziertere analytische Berechnung, da sie beim Kommutieren neue Erzeuger und Vernichter generiert.

2.1.1. Hardcore-Algebra im Ortsraum

Hardcore-Bosonen werden beschrieben durch die

Hardcore-Algebra (Ortsraum)

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{i,j} (1 - 2b_i^\dagger b_i) \quad (2.1.1a)$$

$$[b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0 \quad (2.1.1b)$$

$$\{b_i, b_i\} = \{b_i^\dagger, b_i^\dagger\} = 0. \quad (2.1.1c)$$

Wird der scheinbar komplizierte erste Kommutator 2.1.1a für die Fälle $i = j$ und $i \neq j$ ausgeschrieben und umgestellt, zeigt sich, dass tatsächlich für unterschiedliche Gitterplätze $i \neq j$ die Kommutator-Relationen und für gleiche Gitterplätze $i = j$ die Antikommutator-Relationen gelten:

$$\begin{aligned} [b_i, b_j^\dagger] &= \delta_{i,j} (1 - 2b_i^\dagger b_i) = \begin{cases} 1 - 2b_i^\dagger b_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \{b_i, b_i^\dagger\} = b_i b_i^\dagger + b_i^\dagger b_i = 1 & \text{für } i = j \\ [b_i, b_j^\dagger] = 0 = \delta_{i,j} & \text{für } i \neq j \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Aus dem Antikommutator folgt wiederum, wie von Fermionen bekannt, $b_i b_i = 0 = b_i^\dagger b_i^\dagger$ und damit, dass jeder Gitterplatz i maximal einmal besetzt werden kann. Dies wird schnell klar, wenn der Besetzungszahloperator in zweiter Quantisierung $n_i = b_i^\dagger b_i$ eingeführt wird, denn es gilt

$$n_i^2 = b_i^\dagger \cdot \underbrace{b_i \cdot b_i^\dagger \cdot b_i}_{\stackrel{(2.1.2)}{=} 1 - b_i^\dagger b_i} = b_i^\dagger b_i - \underbrace{(b_i^\dagger)^2}_{\stackrel{(2.1.1c)}{=} 0} \underbrace{b_i^2}_{\stackrel{(2.1.1c)}{=} 0} = n_i, \quad (2.1.3)$$

womit die möglichen Eigenwerte des Besetzungszahloperators die bei Fermionen auf 0 und 1 beschränkt werden. Die Vorstellung von Hardcore-Bosonen als Bosonen, die aufgrund einer unendlich großen („harten“) Abstoßung jeden Gitterplatz maximal einmal besetzen dürfen, ist also gerechtfertigt [21–23].

Trotz dieser Fallunterscheidung für verschiedene und gleiche Gitterplätze, ist zu beachten, dass für beliebige i und j der allgemeine Kommutator 2.1.1a gilt, welcher in der analytischen Berechnung Schwierigkeiten bereitet.

Möchte man beispielsweise in einem Summanden, der aus mehreren Operatoren besteht (beispielsweise $b_i^\dagger b_j b_k^\dagger b_l$), zwei der Operatoren (anti-)kommutieren, so entstehen zwei neue Summanden: Ein (anti-)kommutierter Term mit gleich vielen Operatoren wie der ursprüngliche Ausdruck, sowie ein zweiter aus dem skalaren (Anti-)Kommutator entstandener Term, in welchem zwei Operatoren weniger vorkommen.

Wird nun jedoch statt eines trivialen Kommutators der Hardcore-Kommutator 2.1.1a verwendet, entstehen aus dem Kommutator nicht einer, sondern zwei Terme: Einer, in dem zwei Operatoren weniger vorkommen, und einer, in dem gleich viele Operatoren vorkommen. Dies ist an einer Beispielrechnung veranschaulicht:

$$\begin{aligned}
 b_i^\dagger b_j b_k^\dagger b_l &= b_i^\dagger b_k^\dagger b_j b_l + b_i^\dagger [b_j, b_k^\dagger] b_l \\
 \text{Bosonen:} &= \begin{cases} b_i^\dagger b_k^\dagger b_j b_l + \delta_{j,k} b_i^\dagger b_l \\ \text{Hardcore-Bosonen:} & b_i^\dagger b_k^\dagger b_j b_l + \delta_{j,k} b_i^\dagger b_l - 2\delta_{j,k} b_i^\dagger b_j^\dagger b_j b_l \end{cases} . \quad (2.1.4)
 \end{aligned}$$

Der für Hardcore-Bosonen entstehende Extraterm verlängert deutlich alle Rechnungen, bei denen Operatoren mehrmals nacheinander kommutiert werden sollen, beispielsweise bei der Erzeugung von Normalordnung.

Insbesondere wird dies beim Aufstellen der Flussgleichungen für die KUT in 3.2 wichtig werden, wo die Anzahl der aus einem Kommutator entstehenden Operatoren angibt, welche physikalischen Beiträge während der kontinuierlichen unitären Transformation entstehen.

Es ist also festzuhalten, dass die Hardcore-Algebra im Wesentlichen einer bosonischen Algebra entspricht, jedoch mit der Zusatzbedingung, dass jeder Platz aufgrund der Hardcore-Abstoßung nur einmal besetzt werden kann. Es wurde jedoch auch klar, dass durch den komplizierteren Kommutator (2.1.1a) alle analytischen Berechnungen aufwendiger als für normale Bosonen und Fermionen sind. Diese Schwierigkeit wird in der Berechnung der Flussgleichungen für die KUT in 3.2 nochmal aufgegriffen werden.

2.1.2. Hardcore-Algebra im Impulsraum

Eine grundlegende Annahme der Festkörperphysik ist, dass von einem makroskopischen Körper ausgegangen werden kann. Ist die Kristallstruktur eines Festkörpers hinreichend gut geordnet, lässt er sich ferner als periodische Wiederholung einer Basiszelle auf einem Bravais-Gitter beschreiben. Für derartige periodische Strukturen ist eine Beschreibung im Impulsraum in der Regel einfacher, da hiermit die delokalisierten Eigenmoden beschrieben werden können, die näher an der physikalischen Realität liegen als lokalisierte Anregungen von einzelnen Gitterplätzen.

Insbesondere gilt dies bei Phasenübergängen, also an kritischen Punkten, an denen eine divergierende Korrelationslänge dazu beiträgt dass delokalisierte Beiträge im Ortsraum relevant werden, welche im Impulsraum wieder als stark lokalisierte Beiträge auftauchen. Da wir an der Beschreibung des QKP des IMTF interessiert sind, soll hier auch die Hardcore-Algebra in den Impulsraum fouriertransformiert werden, um diese später für eine KUT im k -Raum zu verwenden. In 3.2.1.1 wird näher darauf eingegangen, wieso die KUT sowohl im Orts- wie auch im Impulsraum durchgeführt werden soll.

Wir können die **Fourier-Transformation**

$$\boxed{\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ikx_j} b_j & b_k^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ikx_j} b_j^\dagger & (2.1.5a) \\ b_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k^{1.BZ} e^{-ikx_j} b_k & b_j^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k^{1.BZ} e^{ikx_j} b_k^\dagger & (2.1.5b) \end{aligned}}$$

durchführen, wobei N die Anzahl der Gitterplätze mit Abstand a zueinander, $x_j := aj$ die Position der Gitterplätze und k der Impuls ($\hbar = 1$) nach der Fourier-Transformation ist.

Damit ergeben sich für die Kommutatoren der Hardcore-Algebra (2.1.1a) und (2.1.1b) im Impulsraum die äquivalenten Kommutatoren

$$[b_k, b_{k'}] \stackrel{(2.1.5a)}{=} \frac{1}{N} \sum_{j,l=0}^{N-1} e^{i(kx_j + k'x_l)} \underbrace{[b_j, b_l]}_{(2.1.1b)_0} = 0 \quad (2.1.6a)$$

$$[b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger] = [b_{k'}, b_k]^\dagger \stackrel{(2.1.6a)}{=} 0 \quad (2.1.6b)$$

$$\begin{aligned} [b_k, b_{k'}^\dagger] &\stackrel{(2.1.5a)}{=} \frac{1}{N} \sum_{j,l=0}^{N-1} e^{i(kx_j - k'x_l)} \cdot \underbrace{[b_j, b_l^\dagger]}_{(2.1.1a)_{\delta_{j,l}(1-2b_j^\dagger b_j)}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(k-k')x_j}}_{\delta_{k,k'}} - \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(k-k')x_j} b_j^\dagger b_j \\ &\stackrel{(2.1.5b)}{=} \delta_{k,k'} - \frac{2}{N} \sum_{q,q'}^{1.BZ} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(k-k'+q-q')x_j} \underbrace{b_q^\dagger b_{q'}}_{\delta_{k-k'+q,q'}} \\ &= \delta_{k,k'} - \frac{2}{N} \sum_q^{1.BZ} b_q^\dagger b_{k-k'+q}, \end{aligned} \quad (2.1.6c)$$

also letztlich

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{Hardcore-Algebra (Impulsraum)} \\ &[b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'} - \frac{2}{N} \sum_q^{1.BZ} b_q^\dagger b_{k-k'+q} & (2.1.7a) \\ &[b_k, b_{k'}] = [b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger] = 0 & (2.1.7b) \\ &(\text{Antikommutatoren nichttrivial}). \end{aligned}}$$

Die Antikommutatoren wurden hier nicht fouriertransformiert. Es fällt auf, dass der wesentliche Hardcore-Kommutator (2.1.7a) etwas komplizierter als die Form (2.1.1a) im Ortsraum ist, da sich hier zusätzlich eine Summation über einen weiteren Impulsindex q ergibt. Wie schon der Hardcore-Kommutator selbst führt diese Summation nochmals zu einem höheren Rechenaufwand, da sich bei mehrmaligen Kommutieren von Termen viele Summationsindizes über die erste Brillouin-Zone ergeben, die explizit ausgerechnet werden müssen.

Ferner ist anzumerken, dass sich die Kommutatoren im Impulsraum nur deswegen so einfach berechnen lassen konnten, weil die Hardcore-Kommutatoren (2.1.1a) und (2.1.1b) im Ortsraum für beliebige Indizes bekannt sind und damit die freien Summationsindizes j und l aufgelöst werden können. Für die Antikommutatoren ist dies nicht möglich, da diese gemäß Gleichungen (2.1.1c) und (2.1.2) nur dann bekannt sind, wenn beide Operatoren auf demselben Gitterplatz wirken. Daher können im Impulsraum vorerst nur die Kommutatoren, nicht aber die Antikommutatoren, explizit berechnet werden. Es wird sich zeigen, dass die fehlenden Antikommutatoren für eine KUT im Impulsraum wichtig werden.

2.1.3. Physikalische Beispiele

Während Hardcore-Bosonen keine Elementarteilchen darstellen, lassen sich viele elementare Anregungen als solche beschreiben.

Beispielsweise lassen sich unter Verwendung der **MatsubaraMatsuda-Transformation** [24] Systeme von Spin-1/2-Teilchen auf Modelle von Hardcore-Bosonen abbilden und umgekehrt - die beiden Beschreibungen sind also äquivalent. Eine explizite Anwendung dieser Transformation wird in Abschnitt 2.2.4) für das IMTF durchgeführt.

Allein hierdurch besitzen Hardcore-Bosonen einen breiten Anwendungsbereich in Spin-1/2-Systemen.

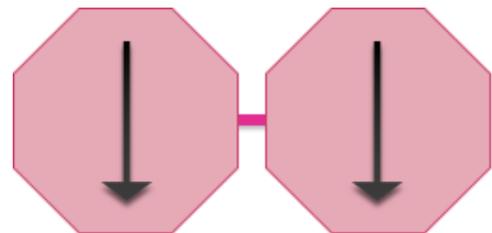


Abb. 2.2.: Schematische Darstellung eines Dimers: Die beiden Spins mit Wert 1/2 sind gekoppelt und bilden ein Spin-1-Teilchen.

Einige konkrete Beispiele sollen hier noch genannt werden: Eine Anwendung sind die fundamentalen Anregungen in stark dimerisierten Quanten-Antiferromagneten, welche **Triplonen** genannt werden und sich als Hardcore-Bosonen mit Spin 1 beschreiben lassen [7, 8]. So kann als einfachstes Beispiel ein **Dimer** aus zwei Spin-1/2-Teilchen ein Singlett mit Spin 0 und ein Triplett mit Spin 1 bilden. Wird dieses Dimer in Wechselwirkung mit der Umgebung gebracht, so wird die elementare Anregung (eine Anregung des Triplons sowie eine Polarisation der Umgebung) als Triplon bezeichnet.

Ferner lässt sich die **suprafluide Phase** von Helium-4 als eine Art von Bose-Einstein-Kondensation mit Hardcore-Bosonen beschreiben [25]. Unter einem Suprafluid versteht man hierbei eine Flüssigkeit, welche durch makroskopische quantenmechanische Effekte all ihre innere Reibung verloren hat (zuerst 1938 beschrieben [26, 27]).

Darüber hinaus wurden **Übergänge** zwischen einer **suprasoliden und suprafluiden Phase** für Hardcore-Bosonen auf einem Dreiecksgitter mit Nächster-Nachbar-Abstoßung untersucht [28]. Ein suprasolider Zustand ist eine weitere quantenmechanische Phase, welche Eigenschaften eines Festkörpers sowie einer suprafluiden Phase besitzt. Dieser Effekt wurde bereits 1969 theoretisch vorhergesagt [29, 30] und 2004 experimentell nachgewiesen [31, 32].

2.2. IMTF: Ising-Modell im transversalen Feld

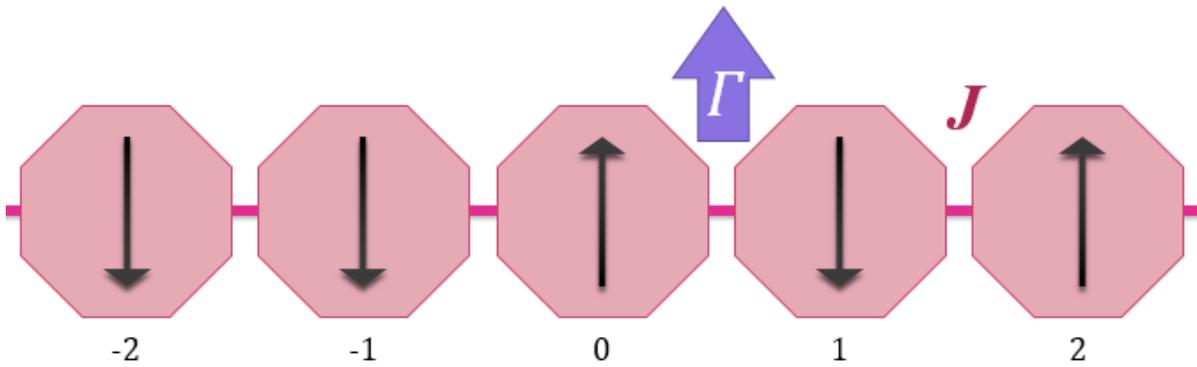


Abb. 2.3.: Schematische Darstellung von IMTF in 1D. Mehrere Spins mit Wert $1/2$ sind mit ihrer z -Komponente an das externe Magnetfeld Γ gekoppelt, während die x -Komponenten nächster Nachbarn über J gekoppelt sind.

In diesem Abschnitt wird das IMTF vorgestellt und im Grenzfall eines starken Magnetfeldes analytisch gelöst, wobei gezeigt wird, dass sich in diesem Fall ein Grundzustand mit Hardcore-Bosonen als elementaren Anregungen ergibt. Daher soll dieses Modell als Test für die Verwendung einer KUT auf Hardcore-Bosonen eingesetzt werden.

Im Rahmen der analytischen Lösung wird das System explizit diagonalisiert und es werden die Dispersionsrelation sowie die Energielücke bestimmt, mit welchem die Ergebnisse aus der KUT in Abschnitt 4 verglichen werden sollen.

2.2.1. Modellbeschreibung

Zur Beschreibung von Magnetismus wird oft das **verallgemeinerte Heisenberg-Modell**

$$H = \vec{\Gamma} \sum_{i=0}^{N-1} \vec{S}_i - \sum_{i,j=0}^{N-1} \sum_{\alpha,\beta \in \{x,y,z\}} 2J_{ij}^{\alpha\beta} S_i^\alpha S_j^\beta \quad (2.2.8)$$

herangezogen [33]. Hierbei liegen Spins \vec{S}_i auf den N Gitterplätzen mit den Indizes i und ihre Komponenten S_i^α mit den drei Raumrichtungen $\alpha \in \{x, y, z\}$ koppeln über

die Wechselwirkung $J_{ij}^{\alpha\beta}$ miteinander. Ferner ist ein externes ordnendes Magnetfeld $\vec{\Gamma}$ angeschlossen.

Der Faktor 2 vor $J_{ij}^{\alpha\beta}$ ist in Voraussicht auf die Abbildung auf ein Hardcore-Bosonen-System gewählt, kann jedoch einfach durch Reskalierung von $J_{ij}^{\alpha\beta}$ entfernt werden.

Dieses Modell ist nur in Grenzfällen exakt lösbar. Ein Lösungsansatz ist die Molekularfeldnäherung, bei welcher die Spinwechselwirkung durch eine Kopplung an ein mittleres Feld ersetzt wird [6]. Interessanter ist jedoch der Fall eines niederdimensionalen Gitters mit Spins der Länge $1/2$, da hierbei die quantenmechanischen Effekte dominanter sind und sich komplexe Korrelationen zwischen den einzelnen Spins ergeben können. Ein solcher Spezialfall, der noch exakt lösbar bleibt, ist das

1D IMTF

$$H = \Gamma \sum_{i=0}^{N-1} S_i^z - 2J \sum_{i=0}^{N-1} S_i^x S_{i+1}^x, \quad (2.2.9)$$

bei welchem nur die x -Komponenten der Spins S_i^x über die Wechselwirkung J an die nächsten Nachbarn S_{i+1}^x koppeln und die z -Komponenten der Spins S_i^z an das externe Magnetfeld Γ . Es werden periodische Randbedingungen $\vec{S}_N = \vec{S}_0$ gesetzt.

Dieses Modell ist in Abbildung 2.3 schematisch dargestellt.

Das IMTF wurde in der Vergangenheit bereits intensiv theoretisch untersucht [34–37] und seine Physik auch teilweise experimentell implementiert [38, 39].

Ferner wurde bereits ein Lösungsverfahren anhand einer KUT vorgeschlagen [40].

2.2.2. Äquivalenz zu Hardcore-Bosonen-Modellen

Die Spinoperatoren erfüllen die Drehimpulsalgebra

$$[S_j^\alpha, S_l^\beta] = i\delta_{j,l} \sum_{\gamma \in \{x,y,z\}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_j^\gamma \quad (2.2.10)$$

in natürlichen Einheiten mit $\hbar = 1$. Die dazugehörigen Leiteroperatoren

$$S_j^\pm = S_j^x \pm iS_j^y = (S_j^\mp)^\dagger \quad (2.2.11)$$

erfüllen die Relationen

$$S_j^x \stackrel{(2.2.11)}{=} \frac{1}{2}(S_j^+ + S_j^-) \quad (2.2.12)$$

$$S_j^\pm S_j^\mp = (S_j^x)^2 + (S_j^y)^2 \mp i \underbrace{[S_j^x, S_j^y]}_{\stackrel{(2.2.10)}{=} iS_j^z} = \underbrace{\vec{S}_j^2}_{\frac{3}{4}} - \underbrace{(S_j^z)^2}_{\frac{1}{4}} \pm S_j^z = \frac{1}{2} \pm S_j^z. \quad (2.2.13)$$

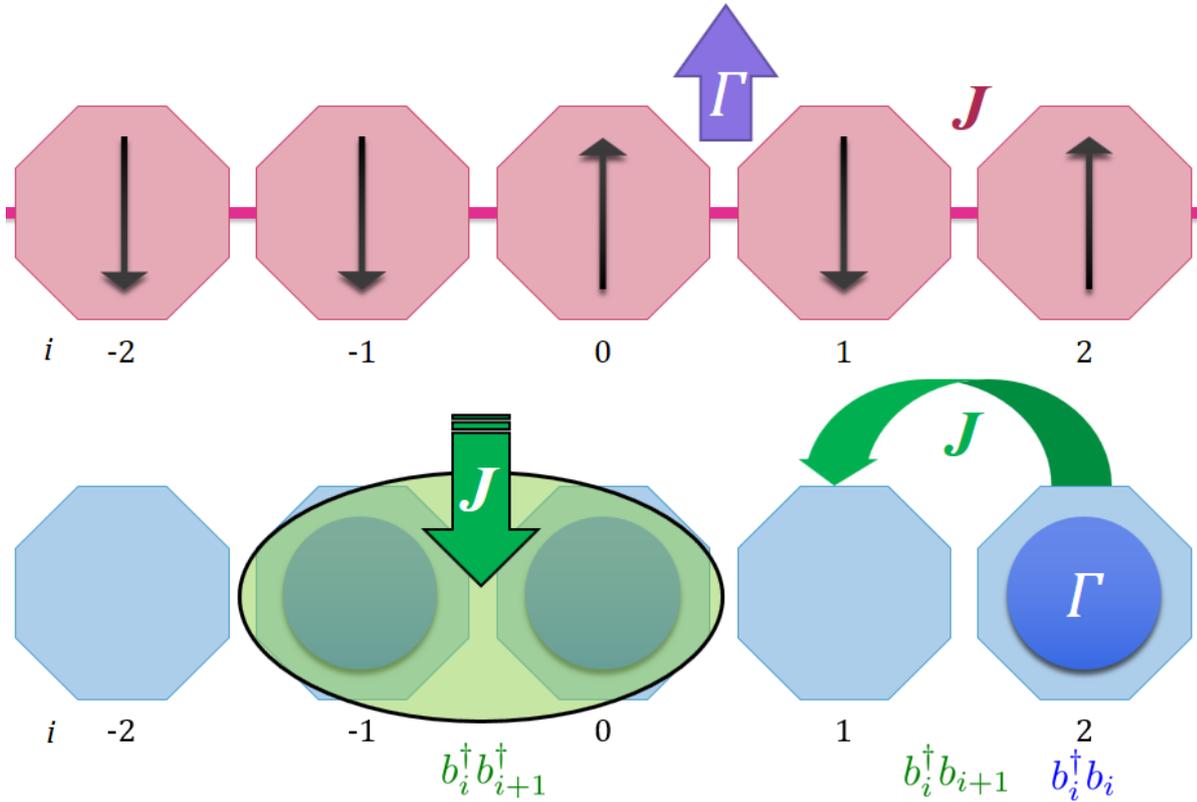


Abb. 2.4.: Schematische Darstellung der Analogie des IMTF und des Hardcore-Bosonen-Modells. Die beiden Spinrichtungen entsprechen Besetzung/Nicht-Besetzung und auch die Wechselwirkung J und das externe Feld Γ lassen sich zu bilinearen Termen für die Hardcore-Bosonen umschreiben. Die Terme beschreiben die Energie eines Hardcore-Bosons, Sprünge zu benachbarten Plätzen und Paarerzeugungen/-vernichtungen.

Die lässt sich zum Umschreiben des Hamiltonoperators (2.2.9) auf

$$H = \Gamma \sum_{i=0}^{N-1} \left(S_i^+ S_i^- - \frac{1}{2} \right) - \frac{J}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (S_i^+ S_{i+1}^- + S_i^+ S_{i+1}^+ + \text{h.c.}) \quad (2.2.14)$$

verwenden. Hierbei erfüllen die Leiteroperatoren die Kommutatorrelationen

$$[S_j^-, S_l^+] = i \underbrace{[S_j^x, S_l^y]}_{\stackrel{(2.2.10)}{=} i\delta_{j,k} S_j^z} - i \underbrace{[S_j^y, S_l^x]}_{\stackrel{(2.2.10)}{=} -i\delta_{j,k} S_j^z} = -2\delta_{j,k} S_j^z \stackrel{(2.2.13)}{=} \delta_{j,l} (1 - 2S_j^+ S_j^-) \quad (2.2.15a)$$

$$[S_j^\pm, S_l^\pm] = \pm i \underbrace{[S_j^x, S_l^y]}_{\stackrel{(2.2.10)}{=} i\delta_{j,k} S_j^z} \pm i \underbrace{[S_j^y, S_l^x]}_{\stackrel{(2.2.10)}{=} -i\delta_{j,k} S_j^z} = 0 \quad (2.2.15b)$$

$$\{S_j^\pm, S_j^\pm\} = \underbrace{\{S_j^x, S_j^x\}}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\{S_j^y, S_j^y\}}_{\frac{1}{2}} = 0. \quad (2.2.15c)$$

Ein kurzer Vergleich mit der vorher vorgestellten Hardcore-Algebra (2.1.1a) bis (2.1.1c) zeigt, dass es sich bei den Spinanregungen tatsächlich um Hardcore-Bosonen handelt.

Dies überrascht nur wenig, denn in der Tat können die einzelnen Teilchen mit Spin $1/2$ nur zwei mögliche Zustände annehmen und die Anregungen auf verschiedenen Gitterplätzen verhalten sich symmetrisch (also bosonisch) unter Teilchenvertauschung.

Hierbei zeigt sich der Vorteil der Darstellung durch die Leiteroperatoren: Durch Anwendung der **Matsubara-Matsuda-Transformation** [24]

$$S^+ = b^\dagger \tag{2.2.16a}$$

$$S^- = b \tag{2.2.16b}$$

$$S^z = b^\dagger b - \frac{1}{2} \tag{2.2.16c}$$

kann das System (2.2.14) problemlos in der Form

1D IMTF mit Hardcore-Bosonen

$$H = \Gamma \sum_{i=0}^{N-1} \left(b_i^\dagger b_i - \frac{1}{2} \right) - \frac{J}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(b_i^\dagger b_{i+1} + b_i^\dagger b_{i+1}^\dagger + \text{h.c.} \right) \tag{2.2.17}$$

geschrieben werden, wobei lediglich die Leiteroperatoren durch Erzeuger und Vernichter ersetzt werden mussten.

Für die KUT im k -Raum wird auch das per (2.1.5b) fouriertransformierte IMTF mit Hardcore-Bosonen im Impulsraum benötigt. Dieses lautet

1D IMTF mit Hardcore-Bosonen im Impulsraum

$$H = \sum_k^{1.BZ} \left[\left(\Gamma - J \cos(ka) \right) b_k^\dagger b_k \right] - \frac{J}{2} \sum_k^{1.BZ} \left[\cos(ka) \left(b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \text{h.c.} \right) \right]. \tag{2.2.18}$$

2.2.3. Grenzfall eines starken Magnetfeldes

Für ein starkes externes Magnetfeld $\Gamma \gg J$ ist der erste Term des Hamiltonoperators (2.2.17) dominant. Mit dem Besetzungszahloperator $n_i = b_i^\dagger b_i$ ist schnell zu erkennen, dass durch die Operatoren b_i^\dagger und b_i die elementaren Anregungen des Systems mit einem starken Magnetfeld erzeugt/vernichtet werden. Für die Leiteroperatoren sind dies Spin-flips und für die Hardcore-Operatoren entspricht dies der Erzeugung/Vernichtung von Hardcore-Bosonen.

Mit dem IMTF für $\Gamma \gg J$ haben wir also ein System vorliegen, das im Grundzustand keine Anregungen aufzeigt und in welches wir als elementare Anregungen Hardcore-Bosonen auf den einzelnen Gitterplätzen i erzeugen können. In nächster Näherung existieren im Hamiltonoperator (2.2.17) Sprungterme zwischen Gitterplätzen $b_i^\dagger b_{i+1}$ sowie Beiträge zur Paarerzeugung und -vernichtung $b_i^\dagger b_{i+1}^\dagger$.

2.2.4. Analytischer Lösungsweg

Zum besseren Verständnis der dahinter liegenden Physik muss der Hamiltonoperator noch diagonalisiert werden. Dazu wenden wir im folgenden Abschnitt nacheinander drei Transformationen an:

- Die **Jordan-Wigner-Transformation**, um die Hardcore-Bosonen in einfache spinlose Fermionen zu verwandeln und sich dadurch von der komplizierten Hardcore-Algebra zu lösen. Der Hamiltonoperator behält dabei seine wesentliche Form bei.
- Die **Fourier-Transformation** zum transformieren des Nächste-Nachbarn-Hüpfterms.
- Die **Bogoliubov-Transformation**, um die Term zur Paarerzeugung und -vernichtung zu behandeln.

2.2.4.1. Jordan-Wigner-Transformation

Eindimensionale Hardcore-Bosonen-Systeme lassen sich auf eindimensionale Systeme von spinlosen Fermionen abbilden, indem die **Jordan-Wigner-Transformation** [41]

$$\begin{aligned} f_0 &= b_0 & f_l &= \exp\left(i\pi \sum_{j=0}^{N-1} b_j^\dagger b_j\right) b_l \\ f_0^\dagger &= b_0^\dagger & f_l^\dagger &= b_l^\dagger \exp\left(-i\pi \sum_{j=0}^{N-1} b_j^\dagger b_j\right). \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

mit $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ angewendet wird. Hierbei wird im Wesentlichen ein Vorfaktor $e^{i\pi n} = \pm 1$ für jeden Operator eingeführt, dessen Vorzeichen davon abhängt, wie viele der vorherigen Gitterplätze besetzt sind. Dadurch wird die Symmetrie der Vertauschung von Teilchen an zwei verschiedenen Gitterplätzen zur Antisymmetrie umgewandelt. Es handelt sich also offenbar um eine nichtlokale Transformation.

Es lässt sich zeigen, dass die neuen Operatoren f_l und f_l^\dagger tatsächlich die fermionischen Antikommutator-Relationen erfüllen. Dies sowie einige Zwischenschritte der Transformation werden in Anhang A gezeigt.

Dies funktioniert in dieser Weise genau genommen nur für offene, nicht aber für periodische **Randbedingungen**. Im thermodynamischen Limes, das heißt für hinreichend große makroskopische Systeme, wird die Randbedingung jedoch irrelevant, weshalb hier ohne Weiteres mit dieser Form gearbeitet wird.

Der Besetzungszahloperator bleibt dabei unverändert:

$$f_i^\dagger f_i \stackrel{(2.2.19)}{=} b_i^\dagger b_i. \quad (2.2.20)$$

Damit nimmt die **Umkehrtransformation** die Form

$$\begin{aligned} b_l &= \exp\left(-i\pi \sum_{j=0}^{N-1} f_j^\dagger f_j\right) f_l \\ b_l^\dagger &= f_l^\dagger \exp\left(i\pi \sum_{j=0}^{N-1} f_j^\dagger f_j\right) \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

an. Die Jordan-Wigner-Transformation verändert den Hamiltonoperator kaum zu

$$H = \Gamma \sum_{i=0}^{N-1} \left(f_i^\dagger f_i - \frac{1}{2}\right) - \frac{J}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(f_i^\dagger f_{i+1} + f_i^\dagger f_{i+1}^\dagger + \text{h.c.}\right). \quad (2.2.22)$$

2.2.4.2. Fourier-Transformation

Da nun mit (2.2.22) ein Tight-Binding-Hamiltonian für spinlose Fermionen vorliegt, können wir den Nächste-Nachbarn-Hüpfterm mithilfe einer Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} \bar{f}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ikx_j} f_j & f_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k^{1.\text{BZ}} e^{-ikx_j} \bar{f}_k \\ \bar{f}_k^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ikx_j} f_j^\dagger & f_j^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k^{1.\text{BZ}} e^{ikx_j} \bar{f}_k^\dagger \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

behandeln. Dabei sind $x_j = ja$ die Gitterplätze mit der Gitterkonstanten a . Der Hamiltonoperator im Impulsraum lautet dann, wie in Anhang B ausführlich gezeigt,

$$H = \sum_k^{1.\text{BZ}} \left[\left(\Gamma - J \cos(ka) \right) \bar{f}_k^\dagger \bar{f}_k - \frac{\Gamma}{2} \right] + i \frac{J}{2} \sum_k^{1.\text{BZ}} \left[\sin(ka) \left(\bar{f}_k^\dagger \bar{f}_{-k}^\dagger - \text{h.c.} \right) \right]. \quad (2.2.24)$$

Man beachte, dass sich der Ausdruck von dem aus Gleichung (2.2.18) unterscheidet, obwohl in beiden Fällen eine Fouriertransformierte von (2.2.17) berechnet worden ist. Dies liegt daran, dass in (2.2.18) noch die Hardcore-Operatoren b_k stehen, während hier durch die vorherige Jordan-Wigner-Transformation spinlose Fermionen mit den Operatoren \bar{f}_k vorliegen.

2.2.4.3. Bogoliubov-Transformation

Um nun den noch verbliebenen nichtdiagonalen, Teilchenzahl verändernden Beitrag im fouriertransformierten Hamiltonoperator (2.2.24) zu eliminieren, kann die Bogoliubov-Transformation mit dem k -abhängigen Drehwinkel θ_k verwendet werden [42]

$$\begin{pmatrix} f_k^\dagger \\ f_{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & i \sin \theta_k \\ i \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{f}_k^\dagger \\ \bar{f}_{-k} \end{pmatrix}. \quad (2.2.25)$$

Die Umkehrtransformation lautet

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_k^\dagger \\ \bar{f}_{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -i \sin \theta_k \\ -i \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k^\dagger \\ f_{-k} \end{pmatrix} \quad (2.2.26)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \cos \theta_k &= \cos \theta_{-k} \\ \sin \theta_k &= -\sin \theta_{-k}. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Es handelt sich um eine unitäre Transformation, womit die neuen Operatoren weiterhin die Antikommutator-Relationen erfüllen:

$$\begin{aligned} \{f_k, f_{k'}\} &= i \cos \theta_k \sin \theta_{k'} \underbrace{\{\bar{f}_k, \bar{f}_{-k'}^\dagger\}}_{=\delta_{k,-k'}} + i \sin \theta_k \cos \theta_{k'} \underbrace{\{\bar{f}_{-k}^\dagger, \bar{f}_{k'}\}}_{\delta_{k,-k'}} \\ &= i \delta_{k,-k'} [\cos \theta_k \sin(-\theta_k) + \cos(-\theta_k) \sin \theta_k] = 0 \end{aligned} \quad (2.2.28a)$$

$$\{f_k^\dagger, f_{k'}^\dagger\} = \{f_{k'}, f_k\}^\dagger = 0 \quad (2.2.28b)$$

$$\begin{aligned} \{f_k, f_{k'}^\dagger\} &= \cos \theta_k \cos \theta_{k'} \underbrace{\{\bar{f}_k, \bar{f}_{k'}^\dagger\}}_{=\delta_{k,k'}} + \sin \theta_k \sin \theta_{k'} \underbrace{\{\bar{f}_{-k}^\dagger, \bar{f}_{-k'}\}}_{\delta_{k,-k'}} \\ &= \delta_{k,k'} (\cos^2 \theta_k + \sin^2 \theta_k) = \delta_{k,k'}. \end{aligned} \quad (2.2.28c)$$

Durch Anwendung der Transformation und der trigonometrischen Additionstheoreme nimmt der Hamiltonoperator die Form

$$\begin{aligned} H &= \sum_k^{1.BZ} \left\{ \left[\left(\Gamma - J \cos(ka) \right) \cos(2\theta_k) + J \sin(ka) \sin(2\theta_k) \right] f_k^\dagger f_k \right. \\ &\quad + \left[\left(\Gamma - J \cos(ka) \right) \sin^2(\theta_k) - \frac{J}{2} \sin(ka) \sin(2\theta_k) - \frac{\Gamma}{2} \right] \\ &\quad \left. + \left[-\frac{i}{2} \left(\Gamma - J \cos(ka) \right) \sin(2\theta_k) + i \frac{J}{2} \sin(ka) \cos(2\theta_k) \right] \left(f_k^\dagger f_{-k}^\dagger - \text{h.c.} \right) \right\} \quad (2.2.29) \end{aligned}$$

an. Der letzte, Teilchenzahl verändernde Beitrag kann dabei eliminiert werden durch Erfüllung der Bedingung

$$\tan(2\theta_k) = \frac{J \sin(ka)}{\Gamma - J \cos(ka)}. \quad (2.2.30)$$

Unter Anwendung der Relationen

$$\cos(2\theta_k) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(2\theta_k)}} = \frac{\Gamma - J \cos(ka)}{\sqrt{(\Gamma - J)^2 + \Gamma J(1 - \cos(ka))}} \quad (2.2.31a)$$

$$\sin(2\theta_k) = \frac{\tan(2\theta_k)}{\sqrt{1 + \tan^2(2\theta_k)}} = \frac{J \sin(ka)}{\sqrt{(\Gamma - J)^2 + \Gamma J(1 - \cos(ka))}} \quad (2.2.31b)$$

$$\sin^2(\theta_k) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos(2\theta_k) \right) \quad (2.2.31c)$$

$$\sum_k^{1.BZ} \cos(ka) = 0 \quad (2.2.31d)$$

ergeben sich der diagonale Hamiltonoperator und die Dispersionsrelation

$$H = \sum_k^{1.BZ} \epsilon(k) \left(f_k^\dagger f_k - \frac{1}{2} \right) \quad (2.2.32a)$$

$$\epsilon(k) = \sqrt{(\Gamma - J)^2 + 2\Gamma J(1 - \cos(ka))} \quad (2.2.32b)$$

mit der abgesenkten Grundzustandsenergie

$$\epsilon_0 = \langle 0|H|0 \rangle = -\frac{1}{2} \sum_k^{1.BZ} \sqrt{(\Gamma - J)^2 + 2\Gamma J(1 - \cos(ka))}. \quad (2.2.33)$$

2.2.5. Analytische Ergebnisse am quantenkritischen Punkt

Im Folgenden wird die in Abschnitt 2.2.4 erarbeitete Dispersionsrelation (2.2.32b) untersucht, die in Abbildung 2.5 geplottet ist und in Abbildung 2.6 in Querschnitten.

Die Hardcore-Bosonen sind im Fall eines starken Magnetfeldes, also $x := \frac{J}{\Gamma} \ll 1$, die elementaren Anregungen des Systems. Dieser **Störparameter** $x = \frac{J}{\Gamma}$ ist sinnvoll zur Untersuchung des IMTF, da die Dispersion in Energieeinheiten von Γ gemessen nur von x abhängig ist:

Dispersionsrelation

$$\frac{\epsilon(k)}{\Gamma} = \sqrt{(1 - x)^2 + 2x(1 - \cos(ka))}. \quad (2.2.34)$$

Von besonderem Interesse sind die Energielücke, also die Energielücke zwischen Grundzustand und dem niedrigsten angeregten Zustand, sowie der quantenkritische Punkt, an welchem diese Energielücke verschwindet.

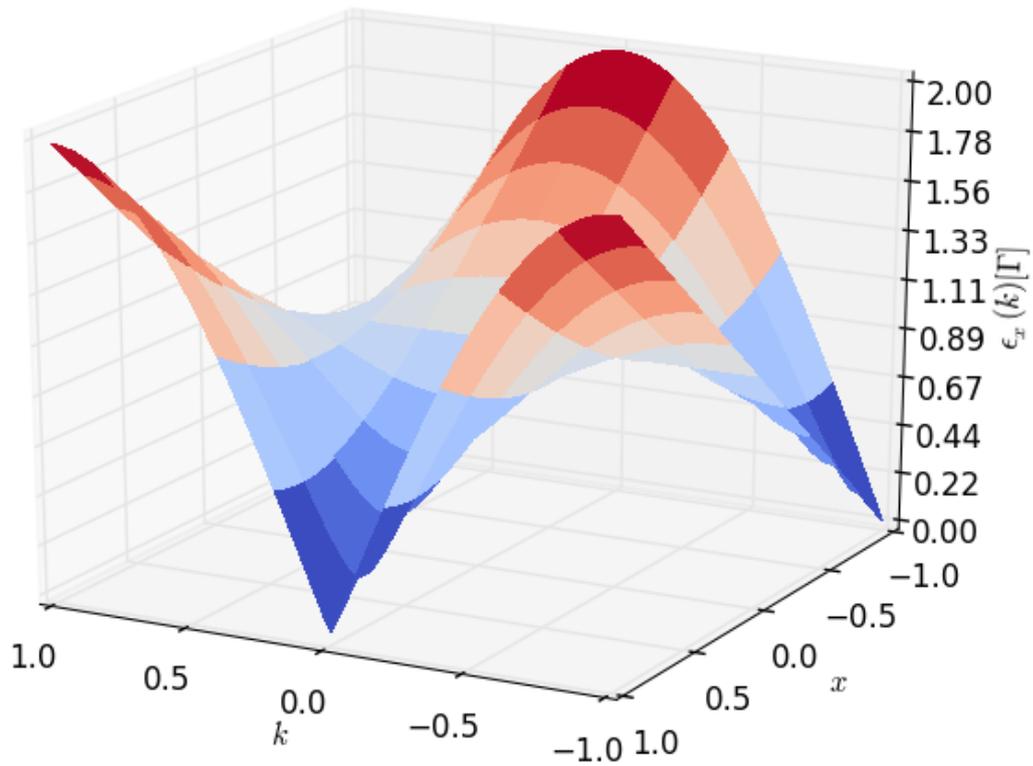


Abb. 2.5.: Plot der Dispersionsrelation $\epsilon_x(k)$ (2.2.32b) des IMTF in Einheiten von Γ . Sie ist abhängig vom Impuls k und dem Störparameter $x := J/\Gamma$ aufgetragen.

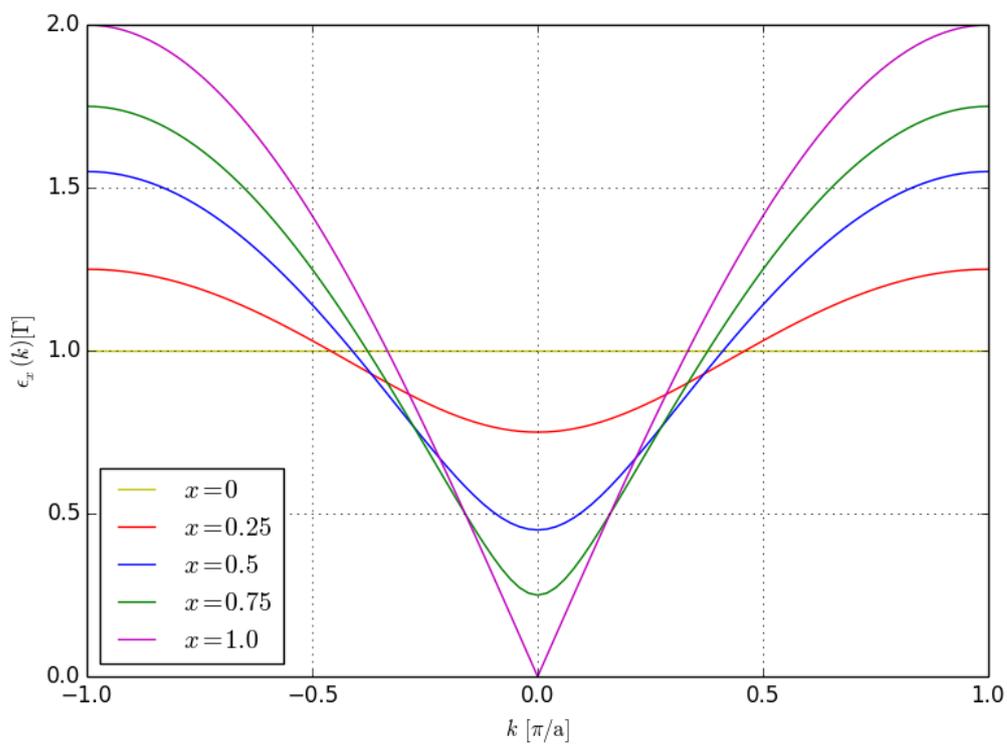


Abb. 2.6.: Plot der Dispersionsrelation $\epsilon_x(k)$ des IMTF abhängig vom Impuls k für verschiedene Störparameter x nach Gleichung (2.2.34). Am QKP $x = 1$ schließt die Energielücke $\Delta(x) = \epsilon_x(k = 0)$.

Bei welchem k_0 die minimale Anregungsenergie $\epsilon(k_0)$ liegt, ist abhängig vom Vorzeichen des Störparameters x und damit davon, ob die Kopplung J der Spins ferromagnetisch oder antiferromagnetisch¹ ist. Die beiden Fälle unterscheiden sich jedoch nur um eine Verschiebung des Impulses $k \rightarrow k + \frac{\pi}{a}$ voneinander, also um einen Flip jedes zweiten Spins. Dies lässt sich nach kurzer Umformung leicht anhand der Dispersionsrelation (2.2.34) zeigen, indem $\epsilon_{-x}(k + \frac{\pi}{a}) = \epsilon_x(k)$ geprüft wird:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_x(k)}{\Gamma} &= \sqrt{\left(1-x\right)^2 + 2x \left[2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)\right]} \\ &= \sqrt{1+x^2 + 2x \left[2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) - 1\right]} \\ &= \sqrt{1+x^2 + 2x \left[\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{ka}{2}\right)\right]} \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

$$\frac{\epsilon_{-x}\left(k + \frac{\pi}{a}\right)}{\Gamma} = \sqrt{1+x^2 - 2x \left[\cos^2\left(\frac{ka}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)\right]} = \frac{\epsilon_x(k)}{\Gamma}. \quad (2.2.36)$$

Daher wird im Folgenden nur der ferromagnetische Fall $x \geq 0$ untersucht.

Die Dispersion besitzt hier ihr Minimum beim in Abbildung 2.7 geplotteten

Energielücke

$$\frac{\Delta(x)}{\Gamma} = \frac{\epsilon_x(k=0)}{\Gamma} = |1-x|. \quad (2.2.37)$$

Diese Energielücke schließt linear in x bei $x = 1$, also $J = \Gamma$. Damit sind dort Anregungen mit beliebig kleiner Energie möglich. Ferner schließt die Lücke linear in k wegen

$$\frac{\epsilon_{x=1}(k)}{\Gamma} \stackrel{(2.2.34)}{=} \sqrt{2\left(1 - \cos(ka)\right)} = 2 \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| \stackrel{ka \ll 1}{\approx} |ka| \quad (2.2.38)$$

Es lässt sich zeigen, dass es sich hierbei um einen **quantenkritischen Punkt (QKP)** handelt, bei dem ein Übergang zwischen einer magnetisch geordneten Phase und einer ungeordneten Phase vorliegt [36].

Von einem quantenkritischen Punkt statt nur eines kritischen Punktes ist hier, wie in Abschnitt 1.1 erläutert, die Rede, weil dieser Übergang bei $T = 0$, also in Abwesenheit von thermischen Fluktuationen, stattfindet. Er wird einzig durch Quantenfluktuationen hervorgerufen und hier durch die Kopplungsstärke x gesteuert.

¹Für $J < 0$ ist das IMTF ferromagnetisch, was bedeutet dass der Hamiltonoperator (2.2.9) die J -Kopplung bei paralleler Ausrichtung der x -Komponenten der Spins minimiert. Für $J > 0$ ist das System antiferromagnetisch und der Grundzustand besteht dann aus einer antiparallelen Anordnung der Spins.

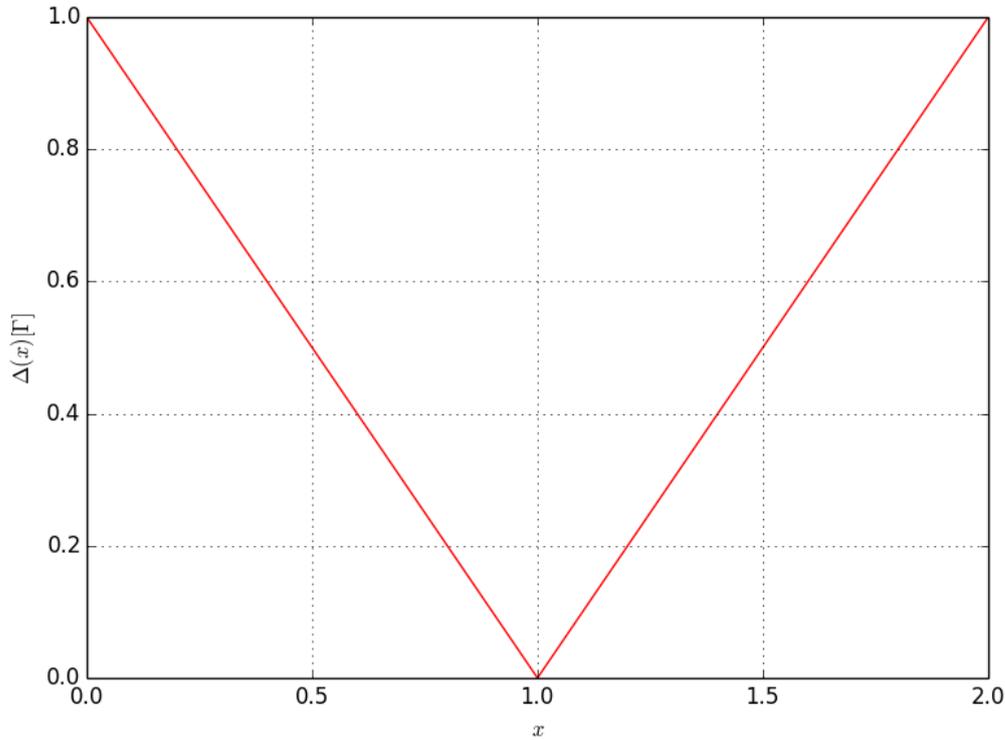


Abb. 2.7.: Plot der Energielücke $\Delta(x) = \epsilon_x(k=0)$ des IMTF abhängig vom Störparameter x nach Gleichung (2.2.37). Es zeigt sich ein lineares Schließen der Energielücke.

Dieser Übergang lässt sich hier auch durch einen Ordnungsparameter kennzeichnen, nämlich durch die in Abbildung 2.8 dargestellte **Magnetisierung** [36] in x -Richtung

$$M(x) = \left\langle 0 \left| \sum_{i=0}^{N-1} S_i^x \right| 0 \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{8}} & \text{für } x > 1 \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \end{cases}, \quad (2.2.39)$$

wobei der Buchstabe x in S_i^x nicht für den Störparameter, sondern für die x -Komponente steht. Der kritische Exponent beträgt hierbei $\beta = \frac{1}{8}$ und für beliebig große Störungen $x > 1$ rückt das dann ferromagnetische System immer näher an eine vollständige Magnetisierung.

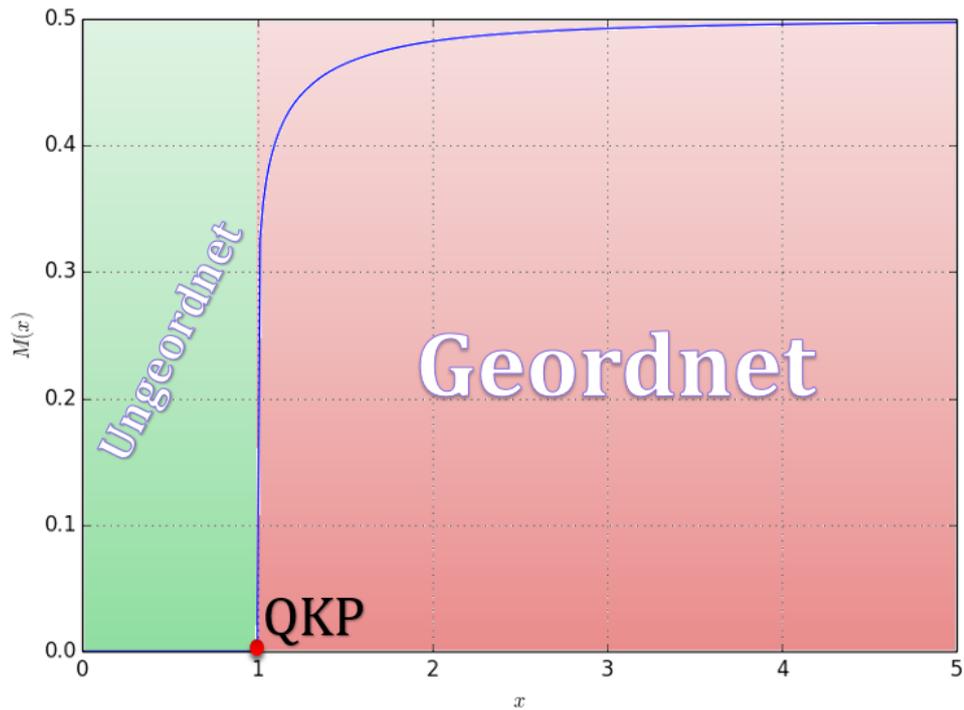


Abb. 2.8.: Blauer Plot der Magnetisierung M des IMTF abhängig vom Störparameter x nach Gleichung (2.2.39). Für $x < 1$ ist das System ungeordnet und $M = 0$, doch ab dem QKP bei $x = 1$ steigt die Magnetisierung an und das System ordnet sich in einer ferromagnetischen Phase. Die Farben markieren zusätzlich zum Wert von M die Werte von x , für welche die jeweilige Farbe vorliegt.

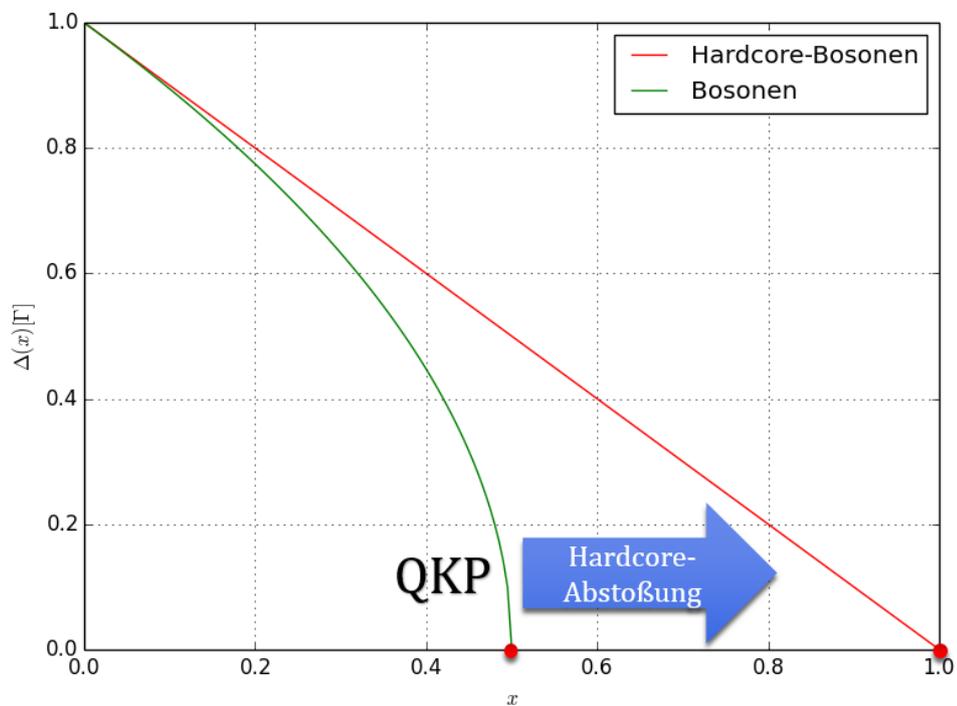


Abb. 2.9.: Vergleich der Energielücke $\Delta(x) = \epsilon_x(k = 0)$ des IMTF zwischen dem Fall von Hardcore-Bosonen (2.2.37) und Bosonen (2.2.43). Für Hardcore-Bosonen verschiebt sich der QKP von $x = 0.5$ nach $x = 1$ und die Energielücke schließt linear.

2.2.6. Vergleich zwischen Hardcore-Bosonen und Bosonen

Werden statt Hardcore-Bosonen schlichte Bosonen im Hamiltonoperator (2.2.17)

$$H = \Gamma \sum_{i=0}^{N-1} \left(b_i^\dagger b_i - \frac{1}{2} \right) - \frac{J}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(b_i^\dagger b_{i+1} + b_i^\dagger b_{i+1}^\dagger + \text{h.c.} \right) \quad (2.2.40)$$

angenommen, wobei konstante Terme vernachlässigt wurden, so ist aufgrund der einfachen Algebra die Jordan-Wigner-Transformation aus Abschnitt 2.2.4.1 nicht notwendig. Stattdessen kann direkt eine Fourier-Transformation zu

$$H = \sum_k^{1.\text{BZ}} \left[\left(\Gamma - J \cos(ka) \right) \bar{b}_k^\dagger \bar{b}_k \right] - \frac{J}{2} \sum_k^{1.\text{BZ}} \left[\cos(ka) \left(\bar{b}_k^\dagger \bar{b}_{-k}^\dagger + \text{h.c.} \right) \right] \quad (2.2.41)$$

angewendet und danach eine Bogoliubov-Transformation durchgeführt werden, womit sich die Dispersion

$$\frac{\epsilon(k)}{\Gamma} = \sqrt{1 - 2x \cos(ka)} \quad (2.2.42)$$

und die Energielücke

$$\frac{\Delta(J)}{\Gamma} = \sqrt{1 - 2x} \quad (2.2.43)$$

ergeben.

Wie in Abbildung 2.9 zu erkennen ist, sorgt die Hardcore-Eigenschaft einerseits für eine Verschiebung des QKP von $x_{\text{QKP, Boson}} = 0.5$ nach $x_{\text{QKP, Hardcore-Boson}} = 1$ und andererseits dafür, dass die Energielücke linear schließt.

2.2.7. Grenzen des analytischen Lösungsansatzes

Die analytische Lösung des IMTF funktioniert in einer Dimension sehr gut. Für das höherdimensionale IMTF ist die Jordan-Wigner-Transformation jedoch nicht mehr ohne Weiteres anzuwenden, obwohl auch hier Ansätze zur Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen d und Spingrößen S existieren [43].

Ferner ist die Bogoliubov-Transformation in dieser einfachen Form bei höherdimensionalen Problemen zur Entfernung der bilinearen Nichtdiagonalbeiträge nicht mehr anwendbar.

Darüber hinaus ist es im Allgemeinen nicht möglich, die Zustandssumme eines Hardcore-Bosonen-Systems exakt zu berechnen. Dies macht die analytische Berechnung von thermodynamischen Größen sehr anspruchsvoll [44].

Daher soll im Folgenden die numerische KUT-Methode an dem eindimensionalen IMTF getestet werden. Die Erweiterung auf höhere Dimensionen ist dabei, im Gegensatz zum analytischen Ansatz, vergleichsweise simpel.

3. Methodik

3.1. KUT - Kontinuierliche unitäre Transformation

In Abschnitt 2.2 wurde das IMTF als Modell von Hardcore-Bosonen vorgestellt, welches in einer Dimension für starke Magnetfelder exakt lösbar ist. Für höhere Dimensionen oder kompliziertere Probleme ist ein analytischer Ansatz jedoch nicht ohne Weiteres möglich, weshalb hier numerische Verfahren ein effektives Werkzeug darstellen.

Das Ziel in Abschnitt 2.2.4 war es, wie in vielen Problemen der Festkörperphysik, den gegebenen Hamiltonoperator H zu diagonalisieren. Dabei wird das Problem diagonalisiert oder zumindest in ein effektives Modell umgeschrieben. Bei effektiven Modellen können noch Nichtdiagonalterme wie Wechselwirkungen beigemischt sein. Das Ziel ist es jedoch immer, den Hamiltonoperator in eine nahezu diagonale Form zu überführen.

Eine numerisch umsetzbare Methode zur Diagonalisierung von stark korrelierten quantenmechanischen Systemen stellen kontinuierliche unitäre Transformationen (KUT) dar, die von Wegner [45] und davon unabhängig von Glazek und Wilson [46] entwickelt wurde. Eine ausführliche Einführung in die Methode wurde von Kehrein verfasst [47]. Die Methode wurde auf eine Vielzahl von physikalischen Systemen angewandt, beispielsweise dimerisierte und frustrierte Spin-1/2-Ketten [48], Spin-Leiter-Systeme [49], das Bienenwaben-Gitter-Modell nach Kitaev [50] oder das Toric-Code-Modell in einem parallelem magnetischem Feld [51].

In den folgenden Abschnitten werden die Grundidee einer KUT sowie der in dieser Arbeit verwendete Ansatz einer selbstähnlichen KUT vorgestellt. Ferner wird der sogenannte MKU-Generator¹ eingeführt, welcher in dieser Arbeit Verwendung findet und den Vorteil bietet, dass er auch entartete Unterräume entkoppelt und keine besonderen Forderungen an das Energiespektrum stellt.

Danach werden die Flussgleichungen für das IMTF in Hardcore-Bosonen-Schreibweise (siehe Abschnitt 2.2.2) angewendet. Dazu werden zuerst einige grundlegende Überlegungen zu diesem Modell angestellt, woraufhin die Flussgleichungen im Orts- und Impulsraum aufgestellt werden. Danach wird die numerische Integration dieser Flussgleichungen beschrieben.

Die Ergebnisse dieser Berechnungen werden im folgenden Kapitel 4 diskutiert.

¹Benannt nach A. Mielke, C. Knetter und G. S. Uhrig.

3.1.1. Grundidee

Damit eine zur Diagonalisierung verwendete Transformation einem Basiswechsel im Hilbertraum entspricht welcher Skalarprodukte und damit Erwartungswerte invariant lässt, müssen sie unitär sein. Eine **unitäre Transformation**

$$\bar{H} = UHU^\dagger \quad |\bar{\Psi}\rangle = U|\Psi\rangle \quad \text{mit } U^{-1} = U^\dagger \quad (3.1.1)$$

bildet mithilfe des unitären Operators U die Operatoren H und die Zustände $|\Psi\rangle$ auf neue Operatoren \bar{H} und Zustände $|\bar{\Psi}\rangle$ ab. Damit sind observable Größen invariant unter unitären Transformationen [52].

Die Schwierigkeit einer solchen Transformation besteht darin, eine passende unitäre Transformation zur Diagonalisierung des Hamiltonoperators zu finden. Die Grundidee der KUT ist es, dieses Problem zu umgehen, indem die unitäre Transformation kontinuierlich, das heißt gesteuert durch einen kontinuierlichen **Flussparameter** $l \in [0, \infty[$, durchgeführt wird. Dadurch wird der ursprüngliche Hamiltonoperator $H(l=0)$ abhängig vom Flussparameter zu

$$H(l) = U(l)H(0)U^\dagger(l). \quad (3.1.2)$$

Die unitäre Transformation verändert sich mit steigendem l von der Identität $U(0) = 1$ zu $U(l)|_{l=\infty}$, wobei

$$H_{\text{eff}} = H(l)|_{l=\infty} = U(\infty)H(0)U^\dagger(\infty) \quad (3.1.3)$$

der gesuchte effektive Hamiltonoperator ist, der möglichst diagonal sein soll. Im Folgenden werden $H(l)$ und $U(l)$ durch H und U abgekürzt.

Aus dem Ansatz (3.1.2) lässt sich noch keine einfache Vorschrift zum Aufstellen der Transformation $U(l)$ erkennen. Bevor wir durch Differentiation nach l die Flussgleichung herleiten, müssen wir zuerst den antihermiteschen **Generator** der KUT

$$\eta(l) := (\partial_l U) U^\dagger \quad (3.1.4)$$

definieren. Auch hierfür wird in Folge die Abkürzung $\eta := \eta(l)$ verwendet. Die Antihermitizität lässt sich leicht durch

$$0 = \partial_l 1 = \partial_l (UU^\dagger) = (\partial_l U) U^\dagger + U (\partial_l U^\dagger) \stackrel{(3.1.4)}{=} \eta + \eta^\dagger \quad (3.1.5)$$

zeigen. Ferner ist gut zu erkennen, weshalb η der Generator der KUT genannt wird, wenn Gleichung (3.1.4) umgestellt wird zur Differentialgleichung

$$\partial_l U = \eta U. \quad (3.1.6)$$

Diese Differentialgleichung wird gelöst durch

$$U(l) = L \exp \left[\int_0^l \eta(l') dl' \right] \tag{3.1.7}$$

mit dem l -Ordnungsoperator L . Hier ist eindeutig zu erkennen, dass der Generator η die unitäre Transformation U definiert.

Zur Bestimmung der unitären Transformation ist es sinnvoll, die Suche nach U auf die Suche nach η zu reduzieren. Gleichung (3.1.7) gibt jedoch keine leicht zu verwendende Vorschrift, um ausgehend vom Generator die Transformation von $H(0)$ zu $H_{\text{eff}} = H(l)|_{l=\infty}$ durchzuführen.

Um eine solche Vorschrift zu erhalten, wird durch Differentiation von (3.1.2) die Differentialgleichung

$$\partial_l H = (\partial_l U) U^\dagger H + H U (\partial_l U^\dagger) \stackrel{(3.1.4)}{=} [\eta, H] \tag{3.1.8}$$

aufgestellt. Die nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung, die

Flussgleichung

$$\partial_l H = [\eta, H], \tag{3.1.9}$$

ist die zentrale Gleichung der KUT. Sie beschreibt den Fluss des Hamiltonoperators und liefert eine einfache Gleichung, um diesen numerisch aus Vorgabe von $H(0)$ und der Vorschrift des Generators η zu bestimmen.

Die Flussgleichung (3.1.9) gilt nicht nur für Hamiltonoperatoren, sondern für alle Observablen.

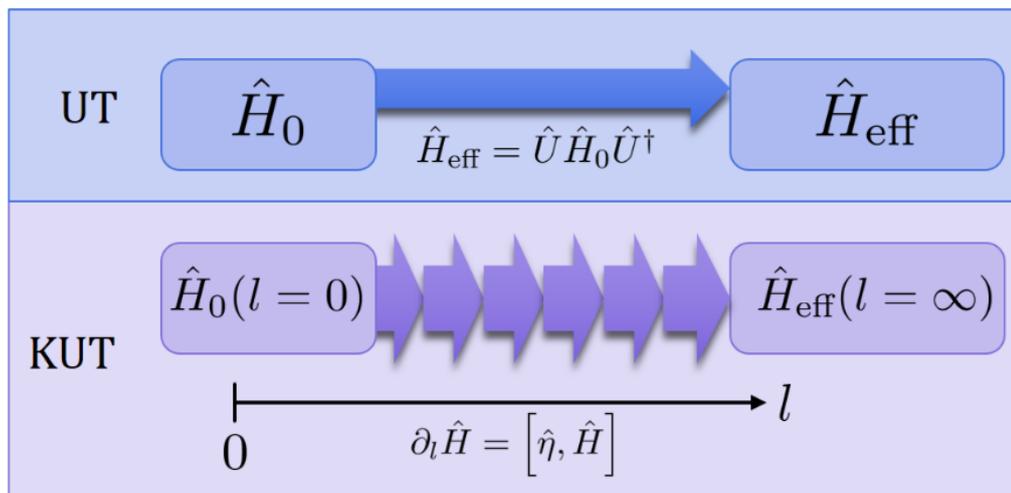


Abb. 3.1.: Schematische Gegenüberstellung einer KUT im Vergleich zu einer einfachen unitären Transformation (UT). Bei der KUT wird durch Lösen der Flussgleichung mit numerischem Vorgehen schrittweise der Hamiltonoperator transformiert, anstatt wie bei einer einfachen UT direkt die finale Transformation anzuwenden.

3.1.2. Selbstähnliche KUT

Es existieren verschiedene Möglichkeiten, die KUT explizit durchzuführen. In dieser Arbeit wurde eine **sKUT** (selbstähnliche KUT) verwendet, die im Folgenden vorgestellt werden soll [53].

Die sKUT bietet einige Vorteile gegenüber der **perturbativen KUT (pKUT)**, bei welcher der Hamiltonoperator nach einem Störparameter entwickelt wird [54].

So gibt die sKUT keine Einschränkungen an den verwendeten Generator oder das Energiespektrum, während bei der pKUT ein nach unten beschränktes, äquidistantes Energiespektrum und der MKU-Generator vorausgesetzt werden. Beide Verfahren werden in [55, 56] vorgestellt, wobei auch auf die **verbesserte perturbative KUT (vpKUT)** (die kein äquidistantes Spektrum benötigt) und die **direkt ausgewertete perturbative KUT (dapKUT)** eingegangen wird. Darüber hinaus existieren Ansätze mit Verknüpfungen zu diagrammatischen Methoden [57].

Der Hamiltonoperator in zweiter Quantisierung kann in die Form

$$H(l) = \sum_i h_i(l) H_i \quad (3.1.10)$$

gebracht werden, wobei die Operatoren H_i l -unabhängig sind. Ferner sind die H_i normalgeordnet, es stehen also alle Erzeuger vor allen Vernichtern.

Die Idee ist nun, eine Operatorbasis zu wählen, welche alle physikalisch relevanten² Beiträge enthält. Alle anderen Terme, die im vernachlässigbaren Maß zur interessanten Physik beitragen, werden **trunkiert**, also abgeschnitten und in der weiteren Rechnung vernachlässigt. Die Bezeichnung „selbstähnlich“ in der sKUT rührt daher, dass in dem Generator und der Flussgleichung nur Terme beachtet werden, die in der Basis $\{H_i\}_i$ des Hamiltonoperators vorkommen.

Auf ähnliche Weise kann der Generator

$$\eta(l) = \sum_i h_i(l) \eta[H_i] \quad (3.1.11)$$

geschrieben werden. Hierbei werden dieselben Koeffizienten $h_i(l)$ verwendet und die η_i gemäß eines bestimmten Schemas ausgewählt, wie beispielsweise nach dem Schema des MKU-Generators in Abschnitt 3.1.3.

Ferner lassen sich alle aus dem Kommutator entstehenden darsellen Terme als

$$[\eta[H_j], H_k] = \sum_{i,j,k} M_{i,j,k}(l) H_i. \quad (3.1.12)$$

Hierbei sind die $M_{i,j,k}$ neue Koeffizienten.

²Was relevant ist, muss im Einzelfall entschieden werden. Für Untersuchungen des Niederenergiebereichs sind hierbei Skalierungsargumente hilfreich.

Die l -Abhängigkeit der Koeffizienten wird im weiteren Verlauf ähnlich wie jene der Operatoren in Abschnitt 3.1.1 nicht mehr explizit ausgeschrieben.

Mit diesen drei Darstellungen kann die Flussgleichung (3.1.9) in die Form

$$\sum_i H_i \partial_l h_i = \sum_{j,k} h_j h_k [\eta[H_j], H_k] = \sum_{i,j,k} H_i h_j h_k M_{i,j,k} \quad (3.1.13)$$

überführt werden. Ein kurzer Koeffizientenvergleich ergibt

$$\partial_l h_i = \sum_{j,k} h_j h_k M_{i,j,k}, \quad (3.1.14)$$

wobei alle auftretenden Größen vom Flussparameter l abhängen. Hierbei handelt es sich um ein gekoppeltes DGL-System erster Ordnung zur Bestimmung der Koeffizienten $h_i(l)$.

Nach einer expliziten Berechnung der Koeffizienten $M_{i,j,k}$ mithilfe des Kommutators (3.1.12) und entsprechender Trunkierung ist es numerisch möglich, durch Lösen der Flussgleichung in der Form (3.1.14) die Koeffizienten $h_i(l)$ und damit den Fluss des Hamiltonoperators $H(l)$ zu bestimmen.

Wollen wir die sKUT anwenden, sind folgende Arbeitsschritte notwendig

1. Flussgleichung aufstellen

- a) **Wahl des Trunkierungsschemas.** Hierbei wird die Operatorbasis $\{H_i\}_i$ ausgewählt und umgekehrt auch, welche Terme in η und dem Kommutator $[\eta, H]$ trunziert werden sollen.
- b) **Bestimmen des Generators η .** Die Vorschrift für den MKU-Generator, der in dieser Arbeit verwendet wurde, wird in Abschnitt 3.1.3 vorgestellt.^a
- c) **Berechnen des Kommutators $[\eta, H]$** aus der Flussgleichung (3.1.9), wobei die Algebra der zugrunde liegenden Teilchen relevant wird.

2. Flussgleichung lösen

- a) **Numerische Integration** der Flussgleichung nach (3.1.9) unter Beachtung der zugrunde liegenden Algebra.

^aDort wird auch erklärt, wieso der MKU-Generator hier verwendet wird.

Diese Arbeitsschritte werden für das IMTF in Abschnitt 3.2 und 3.3 durchgeführt.

3.1.3. MKU-Generator

Der MKU-Generator wurde von Knetter und Uhrig [54] für Vielteilchensysteme und unabhängig davon von Mielke [58] für Bandmatrizen entwickelt und auch nach ihnen benannt. Dabei wird der Hamiltonioperator in die Form

$$H = H^0 + H^+ + H^- \quad (3.1.15)$$

zerlegt. Hierbei bezeichnet H^0 den Teilchenzahl-erhaltenden Term, während H^+ und H^- die Anzahl der Teilchen erhöht oder verringert. Mit dieser Aufteilung lässt sich der

MKU-Generator

$$\eta_{\text{MKU}} = H^+ - H^- \quad (3.1.16)$$

definieren. Es lässt sich beweisen, dass die KUT mit dem MKU-Generator sicher konvergiert, wenn ein Zustand minimaler Energie existiert [54, 58].

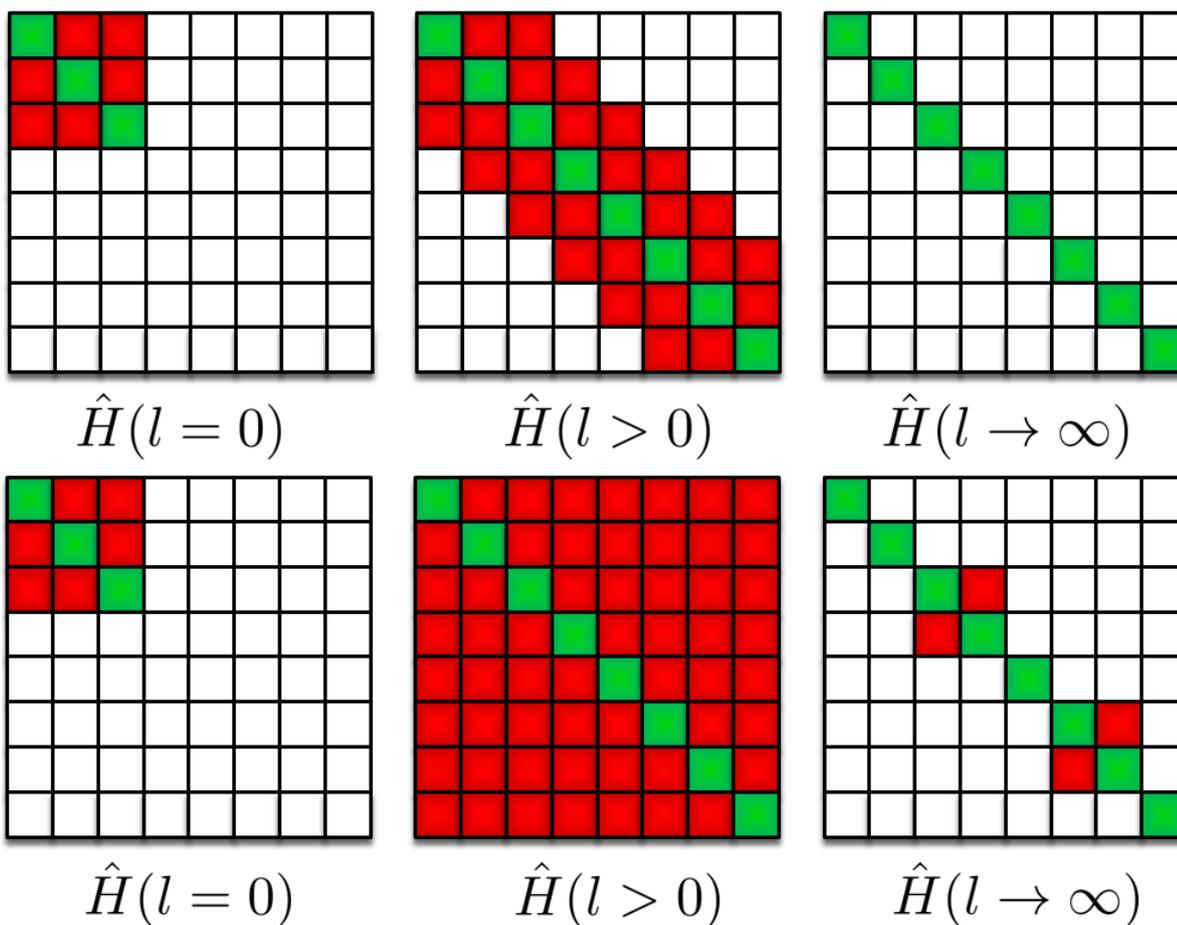


Abb. 3.2.: Schematische Darstellung des Flusses von $H(l)$ mit dem MKU-Generator oben und für den Generator von Wegner unten, wobei vorhandene Diagonalelemente grün, vorhandene Nichtdiagonalelemente rot und leere Beiträge weiß gekennzeichnet sind. Nur für den MKU-Generator bleibt bei $l > 0$ die Banddiagonalität erhalten und im Grenzfall $l \rightarrow \infty$ werden auch die entarteten Unterräume diagonalisiert.

Der MKU-Generator besitzt einige Vorteile gegenüber dem **Wegner Generator**

$$\eta_{\text{Wegner}} = [H_{\text{d}}, H_{\text{nd}}], \quad (3.1.17)$$

wobei der Operator $H_{\text{d/nd}}$ die diagonalen/nicht-diagonalen Operatorterme des Hamiltonoperators enthält. Ein Vorteil des MKU-Generators liegt darin, dass er die Banddiagonalität des Hamiltonoperators $H(l)$ erhält, was dessen Komplexität deutlich einschränkt. Ferner lassen sich mit ihm entartete Unterräume entkoppeln und damit diagonalisiert werden. In Abbildungen 3.2 ist dieser Sachverhalt schematisch dargestellt. Aufgrund dieser Vorteile wird in dieser Arbeit der MKU-Generator verwendet.

3.2. Aufstellen der Flussgleichungen für das IMTF

Im Folgenden sollen die Flussgleichungen für die sKUT aufgestellt werden.

Zuerst werden einige grundlegende Sachverhalte diskutiert: Es wird aufgeführt, wieso in dieser Arbeit sowohl im Orts- als auch im Impulsraum gerechnet wird. Daraufhin wird die in Abschnitt 3.1.2 aufgeführte Reihenfolge der Arbeitsschritte durchgeführt:

a) Wahl des Trunkierungsschema

Hierzu wird ein Skalierungsargument verwendet, um zu begründen dass nur Terme bis zur quartischen Ordnung³ beachtet werden sollen. Daraufhin wird bestimmt, welche Operatorterme tatsächlich im Hamiltonoperator auftauchen werden⁴. Der Hamiltonoperator wird dabei unter Ausnutzung der Hermitizität in $H = \bar{H} + \bar{H}^\dagger$ umgeschrieben, um durch Verwendung von \bar{H} Schreibarbeit zu sparen.

b) Bestimmen des Generators $\eta = \bar{\eta} - \bar{\eta}^\dagger$

Hierfür wird lediglich das MKU-Schema nach Abschnitt 3.1.3 genutzt und damit werden die passenden Terme aus \bar{H} mit entsprechendem Vorzeichen verwendet. Auch dieser Operator η wird in zwei hermitesche Operatoren aufgeteilt um seine Antihermitizität auszunutzen.

c) Berechnen des Kommutator $[\bar{\eta}, \bar{H}]$

Hierzu wird dieser, und damit die Flussgleichung, in verschiedene Unterterme aufgeteilt, in denen Kommutatoren von unterschiedlichen Beiträgen von \bar{H} auftauchen. Diese einzelnen Kommutatoren werden daraufhin unter Zuhilfenahme eines hierfür geschriebenen Programms exakt umgeformt und in Normalordnung gebracht.

³Also mit maximal 4 Operatoren

⁴Manche Terme werden zwar nicht trunkiert, entstehen aber nicht in der KUT und können daher vernachlässigt werden.

Diese Schritte müssen jedoch zweimal durchlaufen werden: Beim ersten Mal wird von den Termen des ursprünglichen $H(l=0)$ ausgegangen. Die damit in der Flussgleichung auftauchenden Terme werden dann mit in den Hamiltonoperator definiert, um im zweiten Schritt auch behandelt zu werden.

3.2.1. Grundlegendes zur Bearbeitung der Flussgleichungen

3.2.1.1. Berechnung im Orts- und Impulsraum

In den folgenden Abschnitten wird die KUT sowohl im Orts-, als auch im Impulsraum durchgeführt. Die Gründe hierfür sollen in diesem Abschnitt erörtert werden.

Möchte man ein System im Ortsraum behandeln, so bietet es sich oft an Terme zu trunkieren, welche auf weit entfernten Gitterplätzen wirken oder an denen viele Anregungen beteiligt sind, da diese kleine Beiträge liefern. Sollte jedoch die Teilchendichte im System hoch sein oder sollten stark delokalisierte Beiträge relevant werden, kann diese Näherung nicht mehr ohne Weiteres verwendet werden. In diesem Fall bietet sich eine Transformation in den Impulsraum an, da delokalisierte Anregungen im Ortsraum nach der Fourier-Transformation als lokalisierte Anregungen behandelt werden können. Damit kann im Impulsraum durch Verwendung relativ weniger Terme eine hohe numerische Genauigkeit der KUT erreicht werden. Darüber hinaus äußert sich die Translationssymmetrie nach der Fouriertransformation in einer Impulserhaltung, welche die auftretenden Terme vereinfacht.

Um die relevante Längenskala von Anregungen des Systems abzuschätzen, bietet sich die **Korrelationslänge** ξ an. Diese gibt an, auf welcher Längenskala physikalische Observablen miteinander korreliert sind. Bei einer endlichen Energielücke bleibt ξ endlich, jedoch nimmt sie zu wenn die Energielücke abnimmt. Am QKP, wo die Energielücke vollkommen verschwindet, divergiert die Korrelationslänge oder wird für endliche Systeme zumindest makroskopisch, da die niederenergetischen Quantenfluktuationen nahe des QKP ausreichen, sodass weit voneinander entfernte Teile des Systems miteinander wechselwirken.

Wie in Kapitel 1 erklärt wurde, ist es das Ziel dieser Arbeit, die KUT für Hardcore-Bosonen am IMTF zu testen. Dazu soll die Energielücke am QKP, die in Abschnitt 2.2.4 und 2.2.5 bereits analytisch behandelt wurde, numerisch untersucht werden. Ferner besitzt das IMTF am QKP tatsächlich eine verschwindende Energielücke, wie in Abschnitt 2.2.5 festgestellt wurde. Um die damit verbundenen delokalisierten Anregungen zu behandeln, scheint es sinnvoll, die KUT im Impulsraum durchzuführen. Dies wurde auch in der vergangenen Arbeit so gehandhabt [1].

Es ist jedoch ferner wichtig, bei der Lösung der Flussgleichungen, die in 3.3 näher erläutert werden wird, die Algebra der zugrunde liegenden Teilchen zu beachten. Wird dies nicht explizit getan, können bei der KUT mit den trunkierten Operatoren Beiträge in H entstehen, die unphysikalisch sind, da sie aufgrund der Algebra 0 liefern (siehe Abschnitt 3.2.5.4). Diese Terme können im Laufe des Flusses falsche Beiträge zu den relevanten, physikalischen Termen liefern. Insbesondere können diese unphysikalischen Beiträge divergieren und damit die numerische Berechnung verfälschen. Daher ist es wichtig, sie bereits während der Integration der Bewegungsgleichungen zu vernachlässigen.

Für die Hardcore-Bosonen im Ortsraum ergibt sich aus den Antikommutatoren der Algebra (2.1.1c) das Verbot, mehr als eine Anregung pro Platz zu vernichten oder zu erzeugen. Damit lassen sich trivialerweise alle Terme der Form $b_i b_i$ oder $b_i^\dagger b_i^\dagger$ als unphysikalisch einstufen. Diese Antikommutatoren lassen sich jedoch nicht ohne Weiteres Fourier-transformieren, weshalb eine solche Auswahlregel in der Algebra für Hardcore-Bosonen im Impulsraum (2.1.7a) nicht so einfach zu finden ist und in dieser Arbeit nicht alle unphysikalischen Terme gefunden werden konnten. Da hierdurch die Ergebnisse der KUT im Impulsraum verfälscht werden, bietet es sich an auch eine numerische Berechnung im Ortsraum durchzuführen.

In den folgenden Abschnitten wird erst die Berechnung im Impulsraum aufgezeigt, bevor die analog erhaltenen Ergebnisse im Ortsraum präsentiert werden.

3.2.2. Wahl des Trunkierungsschema

3.2.2.1. Skalierungsargument

In dieser Arbeit werden in H nur Operatorterme bis zur quartischen Ordnung berücksichtigt. Das beinhaltet nur Terme mit bis zu vier Operatoren (Erzeuger und/oder Vernichter). Dieses Trunkierungsschema wird in diesem Abschnitt durch ein Skalierungsargument untermauert.

Hierzu wird der thermodynamische Limes verwendet, bei welchem die Anzahl der Gitterplätze N mit Abstand a und damit die Länge L des Systems bei konstant gehaltener Dichte $\frac{N}{L} = \frac{1}{a}$ gegen unendlich ausgedehnt werden. Dadurch gehen die diskreten Impulse im k -Raum in eine kontinuierliche Menge über.

Die entsprechenden Ersetzungen lauten

$$\sum_k^{\text{1. BZ}} \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk, \quad \delta_{k,k'} \rightarrow \frac{2\pi}{L} \delta(k - k'), \quad b_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{L}} b(k). \quad (3.2.18)$$

Mit den Transformationen (3.2.18) nehmen die Kommutatoren der Hardcore-Algebra (2.1.7a) und (2.1.7b) im Impulsraum die Form

$$[b_k, b_{k'}^\dagger] = 2\pi\delta(k - k') - \frac{a}{\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dq b^\dagger(q) b(k - k' + q) \quad (3.2.19a)$$

$$[b_k, b_{k'}] = [b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger] = 0 \quad (3.2.19b)$$

an.

Uns interessiert die Physik in der Nähe des QKP bei den niederenergetischen Anregungen mit geringem Impuls $k \approx 0$. Nun lässt sich die Relevanz bestimmter physikalischer Terme in diesem Niederenergiebereich dadurch abschätzen, indem eine Reskalierung in Richtung kleiner k durchgeführt und die resultierende Algebra untersucht wird. Je stärker ein Beitrag dabei verringert wird, desto irrelevanter ist er.

Daher wird zuerst die Reskalierung des Impulses k mittels

$$k \rightarrow \lambda k, \quad \lambda \in \mathbb{R}_{]0,1[} \quad (3.2.20)$$

durchgeführt. Damit wird die Algebra (3.2.19a) zu

$$\begin{aligned} [b(\lambda k), b^\dagger(\lambda k')] &= 2\pi\delta(\lambda k - \lambda k') - \frac{a}{\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dq b^\dagger(q) b(\lambda k - \lambda k' + q) \\ &\stackrel{q' := q/\lambda}{=} \frac{2\pi}{\lambda} \delta(k - k') - \lambda \frac{a}{\pi} \int_{-\pi/(\lambda a)}^{\pi/(\lambda a)} dq' b^\dagger(\lambda q') b(\lambda k - \lambda k' + \lambda q'). \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Da die Reskalierung des Impulses keine Auswirkungen auf die bosonische Eigenschaft der Algebra haben sollte, muss der Vorfaktor $\frac{1}{\lambda}$ vor der Deltafunktion verschwinden, sodass Gleichung (3.2.19a) invariant unter der Reskalierung ist. Hierzu müssen lediglich die Operatoren mittels

$$b(\lambda k) \rightarrow \frac{\bar{b}(k)}{\sqrt{\lambda}} \quad (3.2.22)$$

reskaliert werden. So ergibt sich der Kommutator

$$[\bar{b}(\lambda k), \bar{b}^\dagger(\lambda k')] = 2\pi\delta(k - k') - \underbrace{\lambda \frac{a}{\pi} \int_{-\pi/(\lambda a)}^{\pi/(\lambda a)} dq' \bar{b}^\dagger(q') \bar{b}(k - k' + q')}_{O(\lambda^1)}. \quad (3.2.23)$$

Der zweite Beitrag, der erst durch die Hardcore-Abstoßung entstanden ist, skaliert irrelevant⁵ mit einem Vorfaktor $\lambda^1 < 1$, wobei zu beachten ist dass sich die Effekte der um λ^{-1} gestreckten Integrationsgrenzen und der reskalierten Operatoren gerade kompensieren.

Insgesamt werden für eine steigende Anzahl an Operatoren die Terme immer irrelevanter. Die **Skalierungsdimension** beträgt jeweils:

Bilineare Terme:	$b^{(\dagger)}b^{(\dagger)} \rightarrow O(\lambda^0)$	(3.2.24)
Quartische Terme:	$b^{(\dagger)}b^{(\dagger)}b^{(\dagger)}b \rightarrow O(\lambda^1)$	
Hexatische Terme:	$b^{(\dagger)}b^{(\dagger)}b^{(\dagger)}b^{(\dagger)}bb \rightarrow O(\lambda^2)$	

Damit die linear schließende Energielücke am QKP rekonstruiert werden kann, ist mindestens eine Berechnung der ersten Skalierungsdimension notwendig, da sich sonst nur die bosonische Algebra ergibt. Deswegen werden Terme bis zur quartischen Ordnung behandelt: **Alle hexatischen und höheren Terme werden trunziert.**

Zentral ist hierbei, dass der Vorfaktor λ erst nach einer vollen Reskalierung eine Aussage über die Skalierungsdimension trifft. So besitzt beispielsweise der Vorfaktor λ vor dem Integral im noch nicht vollständig reskalierten Ausdruck (3.2.21) erst einmal keine Aussagekraft darüber, ob der entsprechende Term irrelevant ist.

Diese Erkenntnis ist sehr zentral, da beim Hardcore-Kommutator im diskreten Impulsraum (2.1.7b) ebenso ein scheinbarer Skalierungsfaktor auftaucht: Der Faktor $\frac{1}{N}$ suggeriert hier einen im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$ irrelevanten Term. Da damit jedoch auch die Anzahl der Summanden in der Summe $\sum_q^{1. \text{ BZ}}$ steigt, ist dieser marginal, wie auch einfach in der Formel (3.2.21) für den Kontinuumsliches zu erkennen ist.

In der vorangegangenen Arbeit zur KUT im IMTF [1] wurde einerseits dasselbe Trunkierungsschema wie hier angewandt: Es wurden nur Terme bis zur quartischen Ordnung beachtet. Ferner wurden jedoch auch nur Terme bis zur Ordnung $O(N^{-1})$ behalten – alle Summanden der Form $N^{-2} \sum_{q,q'}, N^{-3} \sum_{q,q',q_1}, \dots$ wurden trunziert, obwohl die Summationen dafür sorgen dass die Vorfaktoren die Skalierungsdimension unverändert lassen. Solche Terme werden in dieser Arbeit weiter berücksichtigt, was für einen größeren Rechenaufwand sorgt, jedoch notwendig ist um mithilfe der KUT genauere Ergebnisse zu erhalten. Zur weiteren Laufzeitoptimierung ließen sich die Terme trunzieren, in welchen zu wenige Summationen vorhanden sind um den Faktor N^{-n} vollständig aufzuheben.

⁵„Irrelevant“ bedeutet in diesem Kontext, dass der Term mit der Skalierung abnimmt.

3.2.3. Bestimmung von H und η

In dem letzten Abschnitt wurde als Trunkierungsschema beschrieben, dass nur Terme bis zur quartischen Ordnung berücksichtigt werden. Nun muss noch bestimmt werden, welche bilinearen und quartischen Terme tatsächlich im Fluss der KUT im Hamiltonoperator entstehen. Hierzu wird der in Abbildung 3.3 schematisch dargestellte Kreislauf durchgegangen:

Zu Beginn der ersten Iteration wird $\bar{H}^{(0)}$ mit den bekannten Termen aus Gleichung (2.2.18), sowie nach der MKU-Vorschrift (3.1.16) $\bar{\eta}^{(0)}$, aufgestellt. Dessen Kommutator $[\bar{\eta}^{(0)}, \bar{H}^{(0)}]$ wird nun in Normalordnung berechnet: Der Index (0) gibt hierbei an, dass es sich um die Terme nach 0 Iterationen handelt. Da der Kommutator in die Flussgleichung eingeht, entstehen hierbei alle Terme, die auch im Laufe der KUT im Hamiltonoperator auftauchen – sofern sie nicht trunkiert werden. Daher werde alle diese Terme in den neuen Hamiltonoperator $\bar{H}^{(1)}$ geschrieben, womit die erste Iteration durchlaufen ist. Damit lässt sich wiederum $\bar{\eta}^{(1)}$ berechnen und die nächste Iteration durchführen. Dies lässt sich theoretisch beliebig weit fortführen, für die quartische Ordnung reicht jedoch bereits die erste Iteration aus.

Diese erste Iteration wird in diesem Abschnitt durchgeführt, um den verwendeten Hamiltonoperator $\bar{H} = \bar{H}^{(1)}$ und Generator $\bar{\eta} = \bar{\eta}^{(1)}$ zu bestimmen. Im darauf folgenden Abschnitt 3.2.6 wird der Kommutator und damit die Flussgleichung aufgestellt.

Die Herleitung wird im Impulsraum durchgeführt. Im Ortsraum ergibt sich analog eine ähnliche Form, die in Abschnitt 3.2.3.4 kurz präsentiert wird.

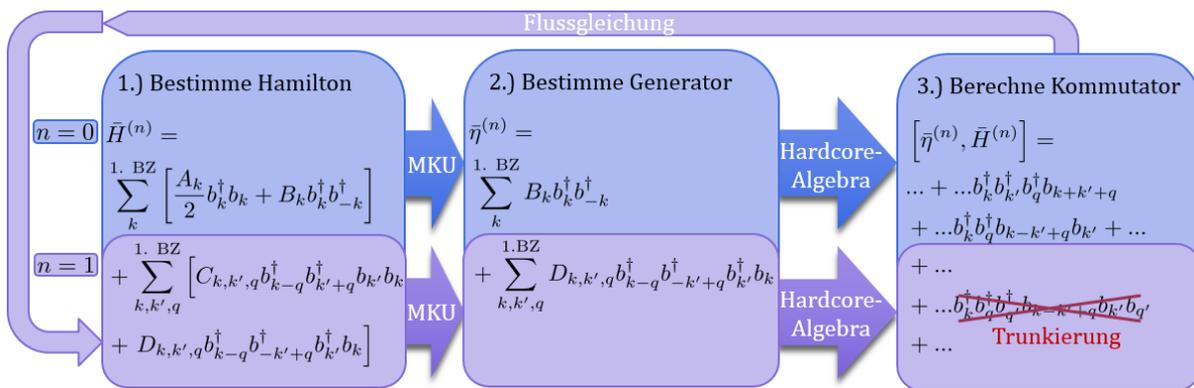


Abb. 3.3.: Diagramm zum Finden der relevanten Terme in H und η . Für weitere Terme könnte mit $n \geq 2$ weiter iteriert werden, doch hier wird sich auf die quartische Ordnung beschränkt.

3.2.3.1. Vorbereitung: $H^{(0)}$ und $\eta^{(0)}$

Es wird damit begonnen, den Hamiltonoperator mit allen normal geordneten Termen aufzustellen, die zum Start der KUT bei $l = 0$ vorliegen. Dies ist der Operator (2.2.18),

in welchem alle bilinearen Terme vorkommen. Daher beginnen wir mit

$$H^{(0)}(l) = \sum_k^{1. \text{ BZ}} \left[A_k(l) b_k^\dagger b_k + B_k(l) \left(b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + b_k b_{-k} \right) \right]. \quad (3.2.25)$$

Hierbei wurde die l -Abhängigkeit der Terme auf die Koeffizienten übertragen (siehe Abschnitt 3.1.2). Die Anfangsbedingungen ergeben sich aus einem Koeffizientenvergleich mit dem Hamiltonoperator (2.2.18) zu Beginn und lauten

$$\begin{aligned} A_k(0) &= \Gamma - J \cos(ka) \\ B_k(0) &= -\frac{J}{2} \cos(ka) \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Davon ausgehend liefert die MKU-Vorschrift (3.1.16) den Generator

$$\eta^{(0)}(l) = \sum_k^{1. \text{ BZ}} B_k(l) \left(b_k^\dagger b_{-k}^\dagger - b_k b_{-k} \right). \quad (3.2.27)$$

Hierbei sind die Teilchenzahl erhöhenden und verringernden Terme redundant: Durch Ausnutzung der Hermitezität bzw. Antihermitezität

$$\begin{aligned} H^{(n)} &= \bar{H}^{(n)} + \bar{H}^{(n)\dagger} \\ \eta^{(n)} &= \bar{\eta}^{(n)} - \bar{\eta}^{(n)\dagger} \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

können die Terme, welche die Teilchenzahl verringern, in der weiteren vernachlässigt werden. Die entsprechenden einfacheren Darstellungen lauten

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{H}^{(0)} &= \sum_k^{1. \text{ BZ}} \left[\frac{A_k}{2} b_k^\dagger b_k + B_k b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \right] \\ \bar{\eta}^{(0)} &= \sum_k^{1. \text{ BZ}} B_k b_k^\dagger b_{-k}^\dagger. \end{aligned}} \quad (3.2.29)$$

3.2.3.2. Vorbereitung: Flussgleichung generiert von $[\bar{\eta}^{(0)}, \bar{H}^{(0)}]$

Als nächstes wird die Flussgleichung mit den Operatoren in (3.2.29) aufgestellt, um herauszufinden welche neuen Terme in $\bar{H}^{(0)}$ entstehen. Hierzu muss die Flussgleichung (3.1.9) jedoch erst abhängig von den reduzierten Operatoren (3.2.28) aufgestellt werden.

Es zeigt sich schnell:

$$\begin{aligned}
\partial_l \bar{H}^{(n)} + \text{h.c.} &\stackrel{(3.2.28)}{=} \partial_l H^{(n)} \stackrel{(3.1.9)}{=} [\eta^{(n)}, H^{(n)}] \\
&\stackrel{(3.2.28)}{=} [\bar{\eta}^{(n)}, \bar{H}^{(n)}] - [\bar{\eta}^{(n)\dagger}, \bar{H}^{(n)}] \\
&\quad + [\bar{\eta}^{(n)}, \bar{H}^{(n)\dagger}] - [\bar{\eta}^{(n)\dagger}, \bar{H}^{(n)\dagger}] \\
&= [\bar{\eta}^{(n)}, \bar{H}^{(n)}] + [\bar{\eta}^{(n)}, \bar{H}^{(n)\dagger}] + \text{h.c.} \tag{3.2.30}
\end{aligned}$$

und durch Vernachlässigung der redundanten hermitesch konjugierten Operatorterme ergibt sich die

Reduzierte Flussgleichung

$$\partial_l \bar{H}^{(n)} = [\bar{\eta}^{(n)}, \bar{H}^{(n)}] + [\bar{\eta}^{(n)}, \bar{H}^{(n)\dagger}]. \tag{3.2.31}$$

Werden die Operatoren (3.2.29) für die erste Iteration in (3.2.31) eingesetzt, ergibt sich die Flussgleichung

$$\partial_l \bar{H}^{(0)} = \sum_{k,k'}^{1.BZ} \left(B_k A_{k'} \underbrace{[b_k^\dagger b_{-k}^\dagger, b_{k'}^\dagger b_{k'}]}_{\textcircled{1}} + B_k B_{k'} \underbrace{[b_k^\dagger b_{-k}^\dagger, b_{-k'} b_{k'}]}_{\textcircled{2}} \right), \tag{3.2.32}$$

in welcher noch die Kommutatoren zu lösen und in Normalordnung zu bringen sind.

Hierzu wird die Produktregel $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ für Kommutatoren sowie die Hardcore-Algebra (2.1.7a) verwendet.

Damit ergeben sich die beiden Kommutatoren indexKommutatorberechnung

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} &= [b_k^\dagger b_{-k}^\dagger, b_{k'}^\dagger b_{k'}] \\
&= b_k^\dagger b_{k'}^\dagger [b_{-k}^\dagger, b_{k'}] + b_{k'}^\dagger [b_k^\dagger, b_{k'}] b_{-k}^\dagger \\
&\stackrel{(2.1.7a)}{=} -\delta_{-k,k'} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \frac{2}{N} \sum_q^{1.BZ} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_q^\dagger b_{k+k'+q} \\
&\quad - \delta_{k,k'} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \frac{2}{N} \sum_q^{1.BZ} b_{k'}^\dagger b_q^\dagger \cdot \underbrace{b_{-k+k'+q} b_{-k}^\dagger}_{=b_{-k}^\dagger b_{-k+k'+q} + [b_{-k+k'+q}, b_{-k}^\dagger]} \\
&\stackrel{(2.1.7a)}{=} -\delta_{-k,k'} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \frac{2}{N} \sum_q b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_q^\dagger b_{k+k'+q} \\
&\quad - \delta_{k,k'} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \frac{2}{N} \sum_q b_{k'}^\dagger b_q^\dagger b_{-k}^\dagger b_{q+k'-k} \\
&\quad + \frac{2}{N} b_{k'}^\dagger b_{-k'}^\dagger - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q,q'} b_{k'}^\dagger b_q^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+q+k'}. \tag{3.2.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{2} \\
& = [b_k^\dagger b_{-k}^\dagger, b_{-k'} b_{k'}] \\
& = -\delta_{k',-k} b_k^\dagger b_k \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} b_k^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{-k'} b_{k'_1+k'+k} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) b_k^\dagger b_k \\
& \quad - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_k^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k_1-k'-k'_1} b_{k'_1+k'+k} \\
& \quad - \delta_{k',k} b_k^\dagger b_k \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} b_k^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1-k'+k} b_{k'} \\
& \quad - \delta_{k',k} b_{-k}^\dagger b_{-k} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} \delta_{k',k} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} b_{k'_1}^\dagger b_{-k}^\dagger b_{-k'} b_{k'_1+k'-k} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} \delta_{k',k} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1} \\
& \quad - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k_1-k'+k} b_{k'_1+k'-k} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) b_{-k'}^\dagger b_{-k'} \\
& \quad - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{-k'} b_{k_1+k'_1+k'} \\
& \quad - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{k'_1, k_1, k_2} b_{k'_1}^\dagger b_{k_2}^\dagger b_{k_2-k'-k_1} b_{k_1+k'_1+k'} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) b_{-k}^\dagger b_{-k} \\
& \quad - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k_1} b_{k_1}^\dagger b_{k_1} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{k'_1, k_1, k_2} b_{k'_1}^\dagger b_{k_2}^\dagger b_{k_1-k'-k'_1} b_{k_2+k'_1+k'} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{k'_1, k_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k_1} \\
& \quad - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{k'_1, k_1, k_2, k_3} b_{k'_1}^\dagger b_{k_3}^\dagger b_{k_3+k_1-k'} b_{k_2+k'_1+k'} \\
& \quad - \delta_{k',-k} b_{-k}^\dagger b_{-k} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} \delta_{k',-k} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} b_{k'_1}^\dagger b_{-k}^\dagger b_{k'_1-k'-k} b_{k'} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) b_{k'}^\dagger b_{k'} \\
& \quad - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k_1+k'_1-k'} b_{k'} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} \delta_{k',-k} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1} \\
& \quad - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k'_1-k'-k} b_{k_1+k'+k} \\
& \quad - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{k'_1, k_1, k_2} b_{k'_1}^\dagger b_{k_2}^\dagger b_{k_2+k'_1-k'} b_{k_1+k'+k} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right) b_{-k}^\dagger b_{-k} \\
& \quad - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k_1} b_{k_1}^\dagger b_{k_1} \\
& \quad + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{k'_1, k_1, k_2} b_{k'_1}^\dagger b_{k_2}^\dagger b_{k_2+k'_1-k'} b_{k_1+k'+k}
\end{aligned}$$

Hierbei werden der Term mit dem Vorfaktor $(2/N)^2$ oder $(2/N)^3$ anders als in [1] nicht trunziert, sondern mitgenommen. Dies liegt, wie zuvor erklärt, daran, dass immer je ein Faktor $1/N$ durch eine der Impulssummationen aufgehoben wird. Der fünfte Term im Kommutator (3.2.33) besitzt einen Vorfaktor $2/N$ welcher nicht durch eine Summation aufgehoben wird und im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$ mit Skalierungsdimension 1 verschwindet. Wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, werden solche Terme in dieser Arbeit weiter berücksichtigt, obwohl ein strikteres Trunkierungsschema die Laufzeit für große N etwas verringern könnte ohne die Genauigkeit allzu stark zu beeinträchtigen.

3.2.3.3. Ergebnis: $H^{(1)}$ und $\eta^{(1)}$

Aus der Flussgleichung (3.2.32) und den darin vorkommenden, aufgelösten Kommutatoren zeigt sich dass die quartischen Terme der Form $b^\dagger b^\dagger b b$ und $b^\dagger b^\dagger b^\dagger b$ entstehen, aber keine Terme der Form $b^\dagger b^\dagger b^\dagger b^\dagger$. Es existieren also weiterhin nur Terme, welche die Teilchenzahl konstant lassen oder um eins verändern – der Beitrag, welcher die Teilchenzahl um eins verringert, entsteht im hermitesch konjugierten Teil von Gleichung (3.2.28).

Damit erhalten der reduzierte Hamiltonoperator und MKU-Generator gesuchte Form

sKUT-Hamiltonian und MKU-Generator im k -Raum

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(1)} &= \sum_k^{1. \text{ BZ}} \left[\frac{A_k}{2} b_k^\dagger b_k + B_k b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \right] \\ &+ \sum_{k,k',q}^{1. \text{ BZ}} \left[C_{k,k',q} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k'} b_k + D_{k,k',q} b_{k-q}^\dagger b_{-k'+q}^\dagger b_{k'}^\dagger b_k \right] \\ \bar{\eta}^{(1)} &= \sum_k^{1. \text{ BZ}} B_k b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \sum_{k,k',q}^{1. \text{ BZ}} D_{k,k',q} b_{k-q}^\dagger b_{-k'+q}^\dagger b_{k'}^\dagger b_k, \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

wobei weiter die Aufteilung

$$\begin{aligned} H^{(n)} &= \bar{H}^{(n)} + \bar{H}^{(n)\dagger} \\ \eta^{(n)} &= \bar{\eta}^{(n)} - \bar{\eta}^{(n)\dagger} \end{aligned}$$

nach Gleichung (3.2.28) gilt. Die Startbedingungen bei $l = 0$ für die Integration lauten

$$\begin{aligned} A_k(0)[\Gamma] &= 1 - x \cos(ka) \\ B_k(0)[\Gamma] &= -\frac{x}{2} \cos(ka) \\ C_{k,k',q}(0) &= D_{k,k',q}(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

mit $x := J/\Gamma$.

Mit dieser Operatorbasis $\{H_i\}_i = \{b^\dagger b, b^\dagger b^\dagger, b^\dagger b^\dagger b b, b^\dagger b^\dagger b^\dagger b + \text{h.c.}\}$ und diesen Startbedingungen soll nun weiter gearbeitet werden.

Es sei nebenbei angemerkt, dass für normale Bosonen nur die δ -Terme in den Kommutatoren auftauchen würden, da die Summen-Terme aus der Algebra (2.1.7a) nicht existieren. In diesem Fall ergibt sich auch ohne Anwendung einer KUT eine analytische Lösung, welche im Anhang C kurz aufgezeigt wird.

3.2.3.4. Analoge Rechnung im Ortsraum

Auf analoge Art und Weise kann der Hamiltonoperator im Ortsraum aufgestellt werden. Für diesen ergibt sich

sKUT-Hamiltonian und MKU-Generator im r -Raum

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(1)} &= \sum_{i,j=0}^{N-1} \left[\frac{A_{i,j}}{2} b_i^\dagger b_j + B_{i,j} b_i^\dagger b_j^\dagger \right] \\ &+ \sum_{i,j,m,n=0}^{N-1} \left[C_{i,j,m,n} b_i^\dagger b_j^\dagger b_m b_n + D_{i,j,m,n} b_i^\dagger b_j^\dagger b_m^\dagger b_n \right] \\ \bar{\eta}^{(1)} &= \sum_{i,j=0}^{N-1} B_{i,j} b_i^\dagger b_j^\dagger + \sum_{i,j,m,n=0}^{N-1} D_{i,j,m,n} b_i^\dagger b_j^\dagger b_m^\dagger b_n, \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

mit den Startbedingungen

$$\begin{aligned} A_{i,j}(0)[\Gamma] &= \delta_{i,j} - \frac{x}{2} \delta_{j,i+1} \\ B_{i,j}(0)[\Gamma] &= -\frac{x}{2} \delta_{j,i+1} \\ C_{i,j,m,n}(0) &= D_{i,j,m,n}(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Durch Ausnutzen der Translationssymmetrie kann die Anzahl der Indizes ähnlich wie für die Impulserhaltung im k -Raum um eins verringert werden. Hierzu werden lediglich Differenzen von Indizes betrachtet, da beispielsweise $A_{0,2} = A_{5,7}$ gelten sollte. Dies lässt sich zur Laufzeitoptimierung für die Integration der Bewegungsgleichungen implementieren, auf analytischer Ebene wird hier jedoch die Form (3.2.36) verwendet.

3.2.4. Physikalische Bedeutung der Terme von $\bar{H}^{(1)}$

Es ist sinnvoll sich klar zu machen, welche physikalische Bedeutung die im Hamiltonoperator auftauchenden Terme besitzen. Die Terme (3.2.36) im Ortsraum erzeugen und vernichten Anregungen auf bestimmten Plätzen. Für die Terme (3.2.34) im Impulsraum ist die grundlegende Physik anhand von Feynman-Diagrammen in Abbildung 3.4

dargestellt.

Interessant ist hierbei, dass die Wechselwirkungen $C_{k,k',q}$ und die stimulierten Paarerzeugungen und -vernichtungen $D_{k,k',q}$ im rein bosonischen System nicht existieren, also erst durch die Hardcore-Eigenschaft entstehen (vergleiche Anhang C. Da es sich bei $C_{k,k',q}$ um eine Abstoßung handelt, ist zu erwarten, dass die entstehenden Wechselwirkungen abstoßend sind, also $C_{k,k',q} > 0$ gilt.

A_k	Diagonalterm, zählt Anregungen
B_k	Paarerzeugung (/vernichtung)
$C_{k,k',q}$	Wechselwirkung, Impulsübertrag
$D_{k,k',q}$	Stimulierte Paarerzeugung (/vernichtung)

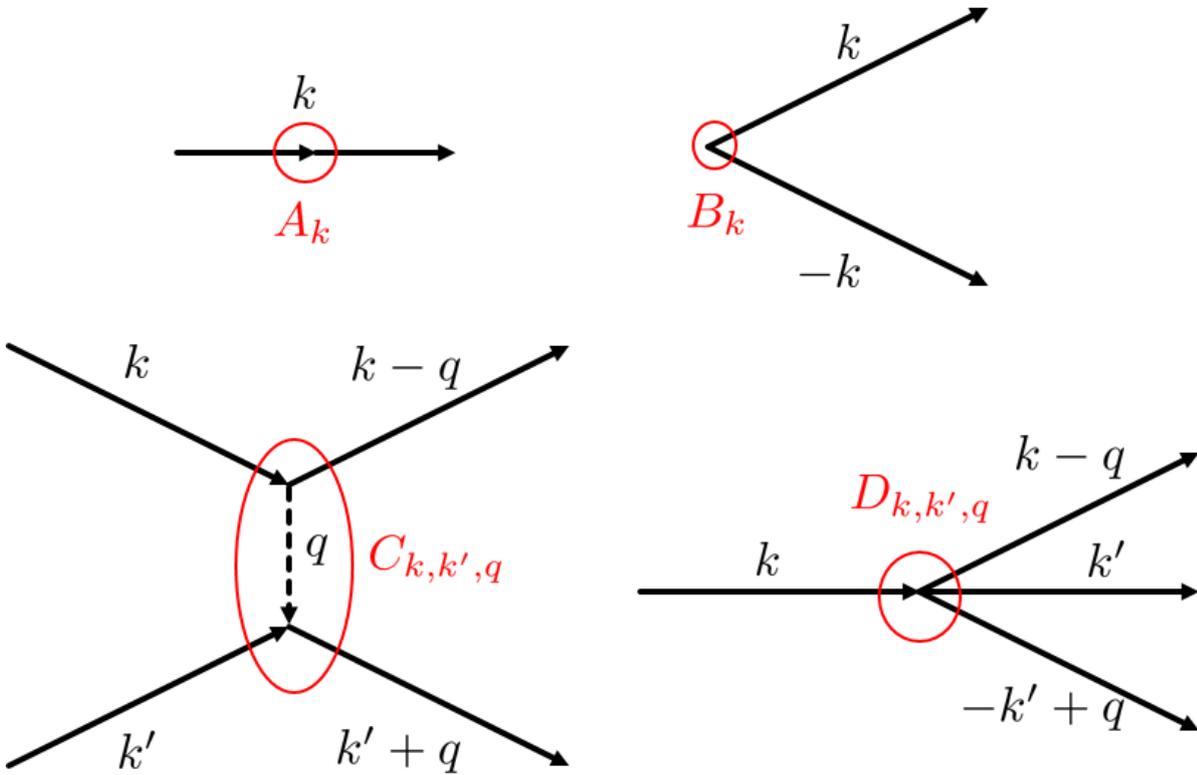


Abb. 3.4.: Feynman-Diagramme zur physikalischen Bedeutung der Terme im Hamiltonoperator (3.2.34). Von links einlaufende Pfeile entsprechen Vernichtern und nach rechts auslaufende Pfeile Erzeugern. B_k und D_k beschreiben Paarerzeugungen oder komplex konjugiert Vernichtungen, während A_k ein diagonalen Term ist und C_k eine Wechselwirkung.

3.2.5. Reduktion der Terme von $\bar{H}^{(1)}$

3.2.5.1. Notationssymmetrie

Die verschiedenen Koeffizienten A_k , B_k , $C_{k,k',q}$, $D_{k,k',q}$ im Impulsraum beziehungsweise $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j,m,n}$, $D_{i,j,m,n}$ im Ortsraum sind für verschiedene Indizes nicht unabhängig voneinander, sondern sind über Symmetrie-Transformationen miteinander verknüpft.

Grundlegend hierfür ist die Tatsache, dass nach der Hardcore-Algebra im Ortsraum (2.1.1b) wie im Impulsraum (2.1.7b) Erzeuger mit Erzeugern und Vernichter mit Vernichtern kommutieren. Dadurch lässt sich ein Term, vor dem ein entsprechender Koeffizient steht, umsortieren, womit eine Neudefinierung der Indizes möglich ist. Für B_k ergibt sich beispielsweise die einfache Kommutation und Ersetzung

$$B_k b_k^\dagger b_{-k}^\dagger = B_k b_{-k}^\dagger b_k^\dagger \leftrightarrow B_{-k} b_{-k}^\dagger b_k^\dagger = B_{\tilde{k}} b_{\tilde{k}}^\dagger b_{-\tilde{k}}^\dagger \quad (3.2.38)$$

mit der Ersetzung

$$B_k \leftrightarrow B_{-k} = B_{\tilde{k}}, \quad \tilde{k} := k. \quad (3.2.39)$$

Da durch diese Notationssymmetrie die Zuordnung von Termen zum Koeffizienten B_k oder B_{-k} willkürlich ist, ergibt es nur Sinn dass es sich hierbei um denselben Koeffizienten handelt. Es gilt also

$$B_k = B_{-k}. \quad (3.2.40)$$

Analog kann für die anderen Kopplungen vorgegangen werden. Im Ortsraum ergibt sich beispielsweise analog

$$B_{i,j} = B_{j,i}. \quad (3.2.41)$$

Je nachdem, ob die Indizes nach und vor der Symmetrie-Transformation identisch sind, gibt es eine Äquivalenzgruppe aus 1 oder 2 Koeffizienten B .

Auch für die quartischen Terme stellt dies kein Problem dar. So ergibt sich für $C_{k,k',q}$ durch Vertauschung der Erzeuger beispielsweise

$$C_{k,k',q} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k'} b_k = C_{k,k',q} b_{k'+q}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'} b_k \quad (3.2.42)$$

$$\leftrightarrow C_{k,k',k-k'-q} b_{k'+q}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'} b_k = C_{k,k',\tilde{q}} b_{k-\tilde{q}}^\dagger b_{k'+\tilde{q}}^\dagger b_{k'} b_k \quad (3.2.43)$$

mit der Transformation

$$C_{k,k',q} \leftrightarrow C_{k,k',k-k'-q} = C_{k,k',\tilde{q}}, \quad \tilde{q} := k - k' - q. \quad (3.2.44)$$

Auf dieselbe Weise lassen sich eine weitere Trafo für C und zwei weitere für D finden. Für C kann die Gruppe dabei 1, 2 oder $2^2 = 4$ Elemente besitzen: Je ein Faktor 2 kommt aus der Vertauschung nicht gleicher Indizes der Erzeuger bzw. der Vernichter. Für D ergeben sich Äquivalenzklassen der Größe 1, 3 oder $3 \cdot 2 = 6$, entsprechend für die Vertauschungen der 3 Indizes der Erzeuger.

Damit ergeben sich insgesamt die Notationssymmetrien im Orts- sowie Impulsraum

Hierbei sind die Transformationen im Ortsraum deutlich einfacher, da dort ein Index im Koeffizienten direkt einem Index eines Operators entspricht, während im Impulsraum die Operator-Indizes teilweise aus Summen und Differenzen von Koeffizienten-Indizes bestehen.

Koeffizient	Äquivalent	Indextrafo	Mögliche Größe der Äquivalenzklasse
B_k	$= B_{-k}$	$k \rightarrow -k$	1, 2
$C_{k,k',q}$	$= C_{k,k',k-k'-q}$ $= C_{k',k,-q}$	$q \rightarrow k - k' - q$ $k \leftrightarrow k'$ $q \rightarrow -q$	1, 2, 4
$D_{k,k',q}$	$= D_{k,k',k+k'-q}$ $= D_{k,q-k',q}$	$q \rightarrow k + k' - q$ $k \rightarrow q - k'$	1, 3, 6
$B_{i,j}$	$= B_{j,i}$	$i \leftrightarrow j$	1, 2
$C_{i,j,m,n}$	$= C_{j,i,m,n}$ $= C_{i,j,n,m}$	$i \leftrightarrow j$ $m \leftrightarrow n$	1, 2, 4
$D_{i,j,m,n}$	$= D_{j,i,m,n}$ $= D_{i,m,j,n}$	$i \leftrightarrow j$ $j \leftrightarrow m$	1, 3, 6

3.2.5.2. Translationsinvarianz/Impulserhaltung

Das betrachtete IMTF-Modell (2.2.9) besitzt periodische Randbedingungen und ist damit invariant unter Translation der Gitterplätze. Im Ortsraum äußert sich dies derart, dass eine Verschiebung aller Indizes in einem Koeffizienten, beispielsweise $B_{i,j} = B_{i+n,j+n}$, diesen nicht verändert. Da alle N Koeffizienten mit einer Verschiebung $n \in 0, 1, \dots, N-1$ äquivalent sind, lässt sich für all diese ein Repräsentant $B_{0,j-i}$ bestimmen. Da hiermit einer der Indizes immer auf 0 gesetzt werden kann, sinkt die Anzahl der Koeffizienten von 2 auf 1 für die bilinearen und von 4 auf 3 für die quartischen Terme.

Im Impulsraum wird die Translationsinvarianz durch die Impulserhaltung explizit in den Operatortermen erfüllt. Hier ist die Anzahl der notwendigen Indizes in den Kopplungen bereits um eins reduziert, wie in (3.2.34) gut zu erkennen ist.

3.2.5.3. Isotropie

Die Startwerte der Koeffizienten im Ortsraum (3.2.37) sowie im Impulsraum (3.2.35) sind unabhängig vom Vorzeichen der Indizes. Diese Isotropie bleibt während der KUT erhalten, weshalb eine weitere Reduzierung auf die Hälfte der Koeffizienten möglich ist, indem die Symmetrietrafo

$$(k, k', q) \leftrightarrow (-k, -k', -q) \quad (3.2.45)$$

ausgenutzt wird.

3.2.5.4. Unphysikalische Terme

Es existieren aufgrund der Antikommutator-Relationen (2.1.1c) im Ortsraum unphysikalische Terme: Nämlich solche, welche mehrere Erzeuger oder mehrere Vernichter an demselben Gitterplatz besitzen. Diese Terme können im Ortsraum einfach vernachlässigt werden. Im Impulsraum existiert jedoch kein triviales Analogon, da für in der entsprechenden Fourier-Transformation Antikommutator-Terme zwischen verschiedenen Gitterplätzen auftreten, die fermionischen Antikommutator-Relationen für Hardcore-Bosonen jedoch nur auf gleichen Gitterplätze gelten.

Daher sind im Impulsraum unphysikalische Terme zu erwarten, die ohne Weiteres nicht gefiltert werden können.

Ein leicht zu erkennendes Beispiel ist der Mittelwert von $\langle B_k \rangle_k$, denn dieser entspricht nach der Fourier-Transformation $B_{i,i}$ aus dem Ortsraum: Einer unphysikalischen Anregung, die zwei Hardcore-Bosonen an demselben Gitterplatz erzeugt.

Da im Hamiltonoperator von (2.2.17) nach (2.2.18) die Operatoren, und nicht direkt die Koeffizienten, fouriertransformiert werden, ist diese Äquivalenz nicht zwangsläufig offensichtlich. Sie lässt sich jedoch schnell zeigen:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{N-1} B_{j,j} b_j^\dagger b_j^\dagger &= B_{0,0} \sum_{j=0}^{N-1} b_j^\dagger b_j^\dagger \\
 &\stackrel{(2.1.5b)}{=} B_{0,0} \sum_{k,k'}^{1.BZ} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ix_j(k+k')} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger}_{\delta_{k,-k'}} \\
 &= B_{0,0} \sum_k^{1.BZ} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \\
 &= \sum_k^{1.BZ} B_k b_k^\dagger b_{-k}^\dagger. \tag{3.2.46}
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde

$$\delta_{k,k'} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \exp [i(k - k')x_j] \tag{3.2.47}$$

ausgenutzt. Der Beweis hierzu ist in [59] zu finden.

3.2.6. Berechnung des Kommutators $[\bar{\eta}^{(1)}, \bar{H}^{(1)}]$

3.2.6.1. Aufteilung der Flussgleichung

Wird die reduzierte Flussgleichung (3.2.31) für die Operatoren (3.2.34) nach der ersten Iteration ausgeschrieben, ergibt sich die

Flussgleichung im Impulsraum

$$\begin{aligned}
\partial_t \bar{H}^{(1)} = & \sum_{k,k'}^{1.BZ} \left(B_k A_{k'} \underbrace{\left[b_k^\dagger b_{-k}^\dagger, b_{k'}^\dagger b_{k'} \right]}_{\textcircled{1}} + B_k B_{k'} \underbrace{\left[b_k^\dagger b_{-k}^\dagger, b_{-k'} b_{k'} \right]}_{\textcircled{2}} \right) \\
& + \sum_{k,k',q,k_1}^{1.BZ} \left(B_{k_1} C_{k,k',q} \underbrace{\left[b_{k_1}^\dagger b_{-k_1}^\dagger, b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k'} b_k \right]}_{\textcircled{3}} \right) \\
& + B_{k_1} C_{k,k',q} \underbrace{\left[b_{k_1}^\dagger b_{-k_1}^\dagger, b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q} b_{k-q} \right]}_{\textcircled{4}} \\
& + 2B_{k_1} D_{k,k',q} \underbrace{\left[b_{k_1}^\dagger b_{-k_1}^\dagger, b_k^\dagger b_{k'} b_{-k'+q} b_{k-q} \right]}_{\textcircled{5}} \\
& - A_{k_1} D_{k,k',q} \underbrace{\left[b_{k_1}^\dagger b_{k_1}, b_{k-q}^\dagger b_{-k'+q}^\dagger b_{k'}^\dagger b_k \right]}_{\textcircled{6}} \Big) \\
& + \sum_{\substack{k,k',q \\ k_1,k'_1,q_1}}^{1.BZ} \left(D_{k_1,k'_1,q_1} C_{k,k',q} \underbrace{\left[b_{k_1-q_1}^\dagger b_{-k'_1+q_1}^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}, b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k'} b_k \right]}_{\textcircled{7}} \right) \\
& + D_{k_1,k'_1,q_1} C_{k,k',q} \underbrace{\left[b_{k_1-q_1}^\dagger b_{-k'_1+q_1}^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}, b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q} b_{k-q} \right]}_{\textcircled{8}} \\
& + D_{k_1,k'_1,q_1} D_{k,k',q} \underbrace{\left[b_{k_1-q_1}^\dagger b_{-k'_1+q_1}^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}, b_{k-q}^\dagger b_{-k'+q}^\dagger b_{k'}^\dagger b_k \right]}_{\textcircled{9}} \\
& + D_{k_1,k'_1,q_1} D_{k,k',q} \underbrace{\left[b_{k_1-q_1}^\dagger b_{-k'_1+q_1}^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}, b_k^\dagger b_{k'} b_{-k'+q} b_{k-q} \right]}_{\textcircled{10}} \Big).
\end{aligned} \tag{3.2.48}$$

Im Ortsraum ergibt sich die sehr ähnliche Differentialgleichung

Flussgleichung im Ortsraum

$$\begin{aligned}
\partial_l \bar{H}^{(1)} = & \sum_{\substack{i,j \\ a,b}}^{1.BZ} \left(B_{i,j} A_{a,b} \underbrace{\left[b_i^\dagger b_j^\dagger, b_a^\dagger b_b \right]}_{\textcircled{1}} + B_{i,j} B_{a,b} \underbrace{\left[b_i^\dagger b_j^\dagger, b_b b_a \right]}_{\textcircled{2}} \right) \\
& + \sum_{\substack{i,j \\ a,b,c,d}}^{1.BZ} \left(B_{i,j} C_{a,b,c,d} \underbrace{\left[b_i^\dagger b_j^\dagger, b_a^\dagger b_b^\dagger b_c b_d \right]}_{\textcircled{3}} \right) \\
& + B_{i,j} C_{a,b,c,d} \underbrace{\left[b_i^\dagger b_j^\dagger, b_a^\dagger b_c^\dagger b_b b_a \right]}_{\textcircled{4}} \\
& + 2B_{i,j} D_{a,b,c,d} \underbrace{\left[b_i^\dagger b_j^\dagger, b_a^\dagger b_c b_b b_a \right]}_{\textcircled{5}} \\
& - A_{i,j} D_{a,b,c,d} \underbrace{\left[b_i^\dagger b_j, b_a^\dagger b_b^\dagger b_c^\dagger b_d \right]}_{\textcircled{6}} \Big) \\
& + \sum_{\substack{i,j,m,n \\ a,b,c,d}}^{1.BZ} \left(D_{i,j,m,n} C_{a,b,c,d} \underbrace{\left[b_i^\dagger b_j^\dagger b_m^\dagger b_n, b_a^\dagger b_b^\dagger b_c b_d \right]}_{\textcircled{7}} \right) \\
& + D_{i,j,m,n} C_{a,b,c,d} \underbrace{\left[b_i^\dagger b_j^\dagger b_m^\dagger b_n, b_a^\dagger b_c^\dagger b_b b_a \right]}_{\textcircled{8}} \\
& + D_{i,j,m,n} D_{a,b,c,d} \underbrace{\left[b_i^\dagger b_j^\dagger b_m^\dagger b_n, b_a^\dagger b_b^\dagger b_c^\dagger b_d \right]}_{\textcircled{9}} \\
& + D_{i,j,m,n} D_{a,b,c,d} \underbrace{\left[b_i^\dagger b_j^\dagger b_m^\dagger b_n, b_a^\dagger b_c b_b b_a \right]}_{\textcircled{10}} \Big).
\end{aligned} \tag{3.2.49}$$

3.2.6.2. Berechnung der Teil-Kommutatoren

Um die in den Flussgleichungen (3.2.48) und (3.2.49) auftauchenden Kommutatoren zu lösen, wurde ein Algorithmus geschrieben, dessen Ablauf in Abbildung 3.5 skizziert ist. Er soll im Folgenden ausführlich erklärt werden:

Schritt 1: Verwende die **Produktregel**, um die komplizierten Kommutatoren auf bilineare Kommutatoren zu reduzieren.

Schritt 2: Die bilineare **Hardcore-Algebra** ist bekannt und kann zum Auflösen aller übrigen Kommutatoren verwendet werden. Es soll ferner **Normalordnung** hergestellt werden, wobei neue bilineare Kommutatoren entstehen. Diese beiden Teilschritte müssen in Schritt 2 mehrmals nacheinander ausgeführt werden, bis nur noch normalgeordnete Terme ohne Kommutatoren übrig bleiben.

Schritt 3: Zum Abschluss können die Terme hexatischer und höherer Ordnung **trunkiert**⁶ werden. Für die Berechnung im Ortsraum können außerdem unphysikalische Terme gemäß Abschnitt 3.2.5.4 entfernt werden. Ferner können **Kronecker-Deltas** angewendet werden, um die Summationen aufzulösen, die aus der Hardcore-Algebra resultierten. Die hier vorgestellten Ergebnisse beziehen sich jedoch auf die reinen Kommutatoren, die noch nicht mit den Summenzeichen der Flussgleichung verarbeitet worden sind.

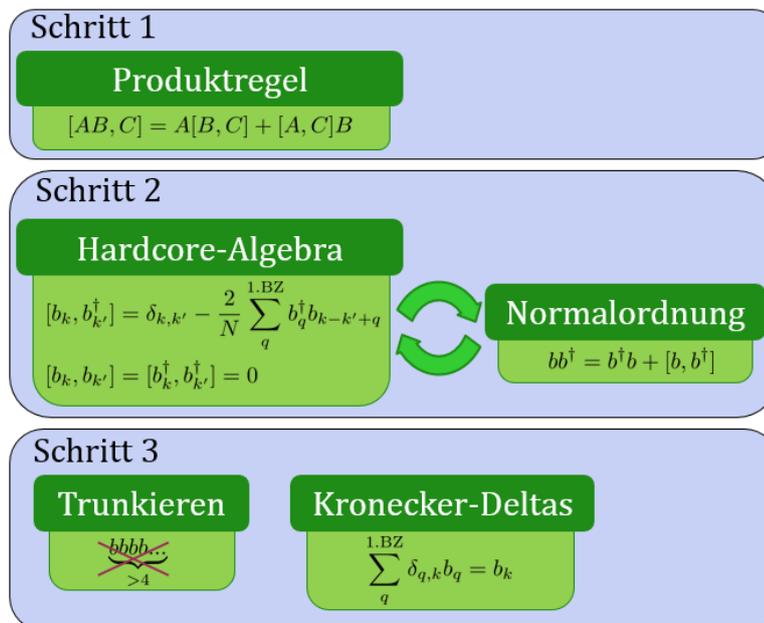


Abb. 3.5.: Übersicht der Teilschritte des Algorithmus zum Auflösen von komplizierten Hardcore-Kommutatoren. Es ist die Hardcore-Algebra im Impulsraum notiert, doch derselbe Algorithmus kann auch im Ortsraum verwendet werden.

⁶Dies war noch nicht vor Schritt 2 möglich, da bei Anwendung der Hardcore-Algebra Terme niedrigerer Ordnung entstehen können.

Während dieser Schritte werden gleiche Indizes mit unterschiedlichen Vorzeichen gekürzt und gleichartige Terme zusammengefasst.

Die mit diesem Algorithmus gelösten Kommutatoren sind in Anhang D zu finden. Die große, vierstellige Zahl an auftauchenden Summanden zeigt bereits, dass hier ein automatisierter Algorithmus sinnvoll ist. In Abbildung 3.6 ist dargestellt, welche Terme behandelt werden und wohin sie Beitrag im Fluss liefern.

In Abschnitt 3.2.2 wurde erläutert, dass im Gegenteil zur Vorarbeit [1] keine Terme aufgrund ihres Vorfaktors N^{-n} trunziert werden. Es zeigt sich im Anhang D, dass dadurch viele Terme mit $l = 2, 3$ oder 4 Summationsindizes entstehen. Zur Integration der Flussgleichung müssen die entsprechenden N^l möglichen Indexkombinationen in jedem Schritt explizit ausgewertet werden, was für eine hohe Diskretisierung N laufzeittechnisch sehr aufwendig wird. Dazu kommen die weiteren Summationsindizes aus den Flussgleichungen (3.2.48) und (3.2.49).

Dieses Problem lässt sich auch nicht dadurch lösen, Terme zu trunzieren, bei welchem der Exponent des Vorfaktors groß genug ist (z.B. bei $n > l + 2$). Durch dieses Trunkierungsschema werden lediglich solche Terme eliminiert, die ohnehin eine relativ geringe Anzahl an Summationsindizes aufweisen.

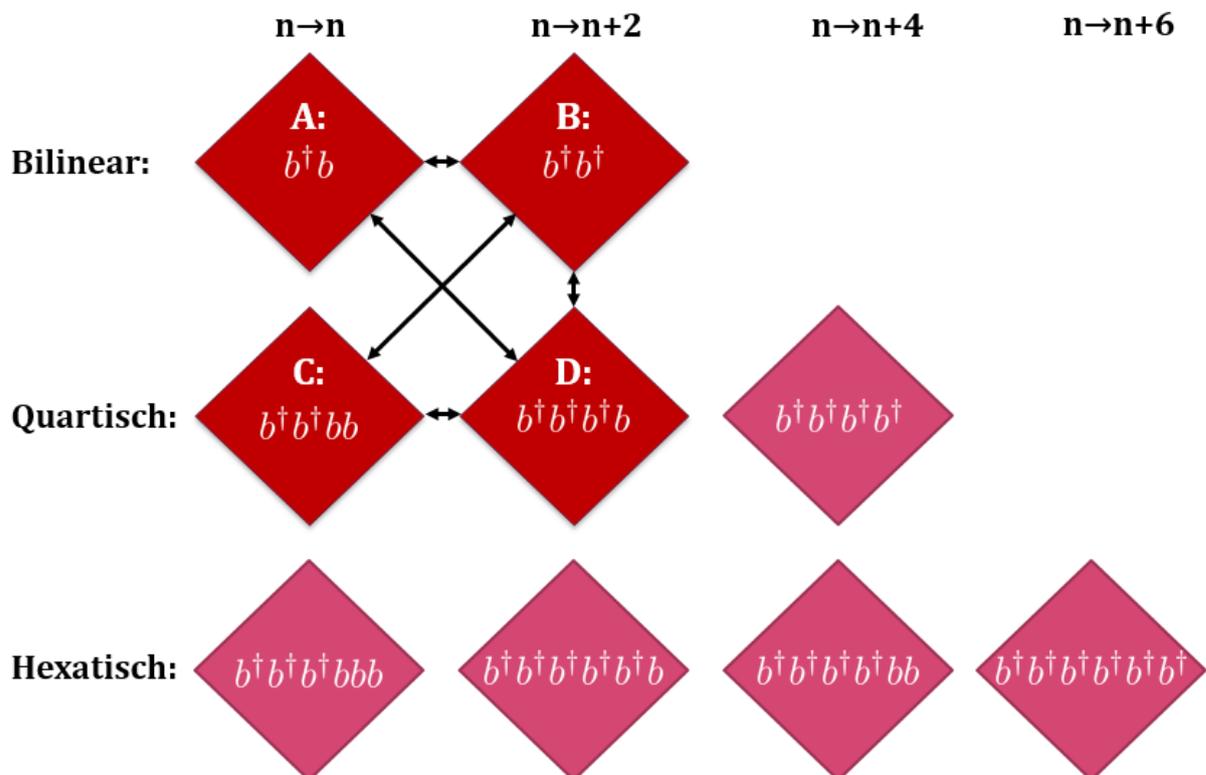


Abb. 3.6.: Diagramm zur Übersicht, welche Terme bei der KUT für das IMTF in erster Ordnung in welche anderen Terme hinein fließen. Die Zeile gibt an, wieviele Operatoren in dem Term vorkommen und die Spalte, wie sich die Teilchenzahl n durch Anwendung dieses Operatorterms ändert. Die hexatische Ordnung wird trunziert und Terme, welche mehr als zwei Teilchen erzeugen/vernichten, werden in der quartischen Ordnung nicht erzeugt - daher sind diese Terme mit einem schwächeren Farbton dargestellt.

Es ist auffällig, dass es Diskrepanzen zu den Termen aus der Vorarbeit [1] gibt. Manche Terme konnten auch nach dem damals verwendeten Trunkierungsschema überhaupt nicht reproduziert werden oder weisen andere Vorzeichen auf.

3.2.7. Irrelevante Terme

Nach Anhang E ergibt sich für die Kopplung B_k im Impulsraum die Flussgleichung

$$\begin{aligned}
\partial_l B_k &= -2B_k A_k \\
&\quad - 2 \sum_{k'} B_{k'} (C_{k,-k,k'+k} + C_{k',-k',k'-k}) \\
&\quad + \frac{2}{N} \sum_{k'} B_{k'} A_k \\
&\quad + \frac{2}{N} \sum_{k',q} B_{k'} (C_{k,-k,q} + C_{k+q,-k-q,q}). \tag{3.2.50}
\end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass $\langle B_k \rangle_k$ nicht nur wie in Abschnitt 3.2.5.4 gezeigt ein unphysikalischer Beitrag ist, sondern dass dieser Mittelwert sogar keinen Einfluss auf den Fluss besitzt. Dies soll hier an jenem Teil der Flussgleichung, der B_k verändert, gezeigt werden. Hierzu können die Koeffizienten aufgeteilt werden zu

$$B_k = \Delta B_k + \langle B_k \rangle_k. \tag{3.2.51}$$

Aus dieser Aufteilung folgt

$$\begin{aligned}
\partial_l B_k &= (\Delta B_k - \text{Terme}) \\
&\quad + 2A_k \underbrace{\left[\frac{1}{N} \sum_{k'} \underbrace{\langle B_{k'} \rangle_{k'}}_{\langle B_k \rangle_k} - \langle B_k \rangle_k \right]}_{=0} \\
&\quad + 2 \underbrace{\langle B_{k'} \rangle_{k'} \left[\frac{1}{N} \sum_{k'} \sum_q (C_{k,-k,q} + C_{k+q,-k-q,q}) - \sum_{k'} (C_{k,-k,k'+k} + C_{k',-k',k'-k}) \right]}_{=0} \tag{3.2.52}
\end{aligned}$$

Die Terme, welche von $\langle B_k \rangle_k$ abhängen, verschwinden also und die Flussgleichung hängt nur noch von ΔB_k ab.

Es wäre naiv anzunehmen, dass sich $\langle B_k \rangle_k$ auch nicht im Laufe des Flusses ändern würde. Da nach der Startbedingung (3.2.35) $\langle B_k \rangle_k(l=0) = 0$ gilt, würde dieser unphysikalische

Beitrag nie entstehen. Dem ist jedoch nicht so, wie sich bereits an der Untersuchung der beiden A_k -abhängigen Terme in Gleichung (3.2.50) zeigt:

$$[N\partial_l \langle B_k \rangle_k]_{A_k} = \left[\sum_k \partial_l B_k \right]_{A_k} = -2 \sum_k \left[A_k \left(B_k - \frac{1}{N} \sum_{k'} B_{k'} \right) \right]. \quad (3.2.53)$$

Dieser Beitrag verschwindet im Allgemeinen nicht, solange A_k nicht unabhängig von k ist. Daher ist schnell zu erkennen, dass sich der Wert von $\langle B_k \rangle_k$ ändern kann und dieser unphysikalische Beitrag somit nicht konstant 0 bleibt.

3.3. Lösen der Flussgleichungen für das IMTF

Die Flussgleichungen (3.2.48) und (3.2.49) mit den eingesetzten Kommutatoren aus Anhang D wurden mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung [60] gelöst. Hierzu wurde die entsprechende Routine aus der Odeint-Bibliothek [61] verwendet.

Die Startwerte werden gemäß (3.2.35) und (3.2.37) gewählt. Die Schrittweite wurde anfangs auf $\Delta l = 0.01$ gesetzt, jedoch im Laufe der Integration durch dynamische Schrittweiten-Anpassung optimiert.

Die Integration kann nicht bis zum diagonalen Hamiltonoperator $H(l = \infty)$ durchgeführt werden, sondern muss bei einem festen l abgebrochen werden wobei bestimmte nicht-diagonale Beiträge übrig bleiben. Ähnlich wie in der Vorarbeit [1] wurde eine obere Schranke von $l_{\max} = 5$ verwendet, da die KUT in diesem Bereich bereits gut konvergiert - oder überhaupt nicht. Dies wird in Abschnitt 4 noch genauer gezeigt. In Abschnitt 3.3.1 wird die **Residual Off Diagonality (ROD)** eingeführt, welche hierzu als Maßstab verwendet werden kann - aber nur solange keine unphysikalischen Beiträge diese verfälschen.

Die Diskretisierung N des Gitters wird abhängig von der gewünschten Genauigkeit und der notwendigen Rechenzeit eingestellt. Hier wurde N immer ungerade gewählt, da sich damit aus der KUT auch das Minimum $\epsilon(k = 0)$ der Dispersion ergibt. Dieses ist der interessanteste Punkt der gesamten Dispersion, da sich gemäß der analytischen Berechnung in Abschnitt 2.2.5 diese Energielücke am QKP bei dem Störparameter $x = 1$ linear schließt.

Die Notationssymmetrie gemäß Abschnitt 3.2.5.1 wurde in der Integration beachtet, indem ein Repräsentant für alle äquivalenten Koeffizienten ausgewählt wurde. Die numerischen Werte aller Elemente einer Äquivalenzklasse werden gleichmäßig aufeinander verteilt.

Wird ein Term auf einen Koeffizienten addiert, so wird dieser Wert einfach auf den Wert r seines Repräsentanten addiert. Soll der Wert eines Koeffizienten jedoch ausgelesen werden, so wird r/K mit der Anzahl K an Koeffizienten in seiner Äquivalenzklasse zurückgegeben.

Ferner wurde für die Berechnung im Ortsraum die Hardcore-Eigenschaft beachtet, indem die gemäß Abschnitt 3.2.5.4 unphysikalischen Terme konstant explizit ignoriert werden. Teilweise kann dies bereits durch entsprechendes Entfernen entsprechender Terme in den Flussgleichungen am Ende des Kommutator-Algorithmus aus Abschnitt 3.2.6.2 geschehen. Doch einige solcher Terme entstehen erst bei der expliziten Behandlung der Summationen, weshalb sie hier zusätzlich ignoriert werden müssen.

3.3.1. Residual Off Diagonality (ROD)

Um abzuschätzen, ob die KUT konvergiert, hat sich als Kenngröße die ROD [62]

$$\begin{aligned} ROD(l) &= \sqrt{\sum_i |h_{i,\text{Nichtdiagonal}}(l)|^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_k^{1.\text{BZ}} B_k^2(l) + \frac{1}{N^3} \sum_{k,k',q}^{1.\text{BZ}} D_{k,k',q}^2(l)} \end{aligned} \quad (3.3.54)$$

etabliert. Hierbei wird die quadratische Norm der nichtdiagonalen Beiträge $h_{i,\text{Nichtdiagonal}}$ gebildet, also aller Terme, welche im Generator vorkommen. Diese Wahl ist sinnvoll, da gemäß der Flussgleichung (3.1.9) der Fluss verschwindet, sobald $\eta = 0$ gilt. Für ein konvergierendes System ist also zu erwarten, dass auch die ROD gegen Null konvergiert, da mit dieser auch der Fluss selbst kleiner wird und schließlich verschwindet. Dies gilt allerdings nur, solange die anderen Koeffizienten A_k und $C_{k,k',q}$ in H nicht divergieren, da $[\eta, H]$ sonst nicht mit η gegen Null läuft.

Die ROD stellt damit in der Regel ein gutes Maß dar, um abzuschätzen wie gut der Fluss eines System bereits konvergiert ist.

4. Ergebnisse

4.1. Konvergenz im Impulsraum

In Abbildung 4.1 ist ein typischer Fluss bei $x = 0.9$ und $N = 5$ für die Kopplungen mit Indizes 0 sowie die ROD nach Abschnitt 3.3.1 aufgetragen. A scheint wie gewünscht zu konvergieren, doch es fällt auf, dass B und D als nicht diagonale Term endlich bleiben, was dem Sinn der KUT widerspricht nicht zu erwarten ist. Die ROD fällt erst ab, divergiert dann jedoch, was mit einem Wachstum der nicht diagonalen Terme zu tun haben muss.

In Abbildung 4.2 sind andere Kopplungen C und D für den Plot gewählt worden und es fällt auf, dass diese auch divergieren. Der lineare Verlauf im logarithmischen Plot zeigt, dass es sich sogar um eine exponentielle Divergenz handelt. Für größere Störparameter x wächst diese sogar noch schneller an.

Der endliche Wert, gegen den B_k strebt, ist für alle k gleich. Hierbei handelt es sich um den unphysikalischen Beitrag gemäß Abschnitt 3.2.5.4, der nicht explizit in der Lösung der Flussgleichung ignoriert wurde. Dass er unphysikalisch ist folgt aus der Antikommutator-Relation im Ortsraum, die im Impulsraum nicht in dieser einfachen Form bekannt ist. Erst durch eine Fourier-Transformation der unphysikalischen $B_{j,j}$ -Terme im Ortsraum folgt dass der Mittelwert $\langle B_k \rangle_k$ auch unphysikalisch ist.

Es zeigt sich, dass beim Anpassen von $\langle B_k \rangle_k$ nach jedem Integrationsschritt

$$B_k \rightarrow B_k - \langle B_k \rangle_k \forall k \quad (4.1.1)$$

weiterhin der richtige Fluss ergibt, jedoch die ROD besser absinkt, da die B_k ordnungsgemäß konvergieren.

Bemerkenswert ist dabei, dass der diagonale Anteil A_k trotzdem stabil konvergiert, da sich der Einfluss der divergierenden Terme auf ihn aufzuheben scheint. Dies ist ein deutliches Indiz dafür, dass es sich hierbei lediglich um unphysikalische Beiträge handelt, die ähnlich wie $\langle B_k \rangle_k$ nach jedem Integrationsschritt auf 0 zurückgesetzt werden können. Eine hierzu notwendige Bestimmung der unphysikalischen Terme von $C_{k,k',q}$ oder $D_{k,k',q}$ ähnlich wie für B_k in Abschnitt 3.2.5.4 wurde noch nicht durchgeführt, weshalb diese Divergenz noch nicht aufgehoben wurde.

Dies führt nicht nur dazu, dass die ROD nach Abschnitt 3.3.1 kein geeignetes Maß mehr für die Konvergenz der KUT darstellt. Es ergibt sich zusätzlich das Problem, dass die numerische Integration für größere l immer langsamer ausgeführt wird, da sich die Schrittweite Δl an den exponentiellen Anstieg der $D_{k,k',q}$ anpassen muss.

Es sei anzumerken, dass solche Divergenz-Probleme in der Vorarbeit [1] nicht vorgekommen sind. Daher wurden die Flussgleichungen der damaligen und dieser Arbeit in niedrigster Ordnung in x verglichen. Das heißt nur unter Beachtung von Termen der Form AB , AC und AD mit $A \in O(x^0)$ und $B, C, D \in O(x^1)$.

Hierbei hat sich gezeigt, dass damals die Terme für $\partial_l D_{k,k',q}$ in dieser Ordnung dafür sorgen, dass $D_{k,k',q}$ tatsächlich verschwindet. Ursächlich hierfür sind unterschiedliche Vorzeichen im Vergleich zu dieser Arbeit.

Nach mehrmaligen Berechnungen, sowohl durch Verwendung des Kommutator-Lösers nach Abschnitt 3.2.6.2, als auch durch Auflösen der Terme per Hand, wurde verifiziert dass die hier verwendeten Vorzeichen korrekt sind. Ferner wurde bei expliziter Verwendung der Terme aus der Vorarbeit festgestellt, dass $D_{k,k',q}$ mit diesen tatsächlich konvergiert.

Da dessen Vorzeichen jedoch aus einem Übertragungsfehler entstanden zu sein schienen und anders nicht nachvollzogen werden konnten, wurde weiter mit der hier bestimmten Flussgleichung gearbeitet.

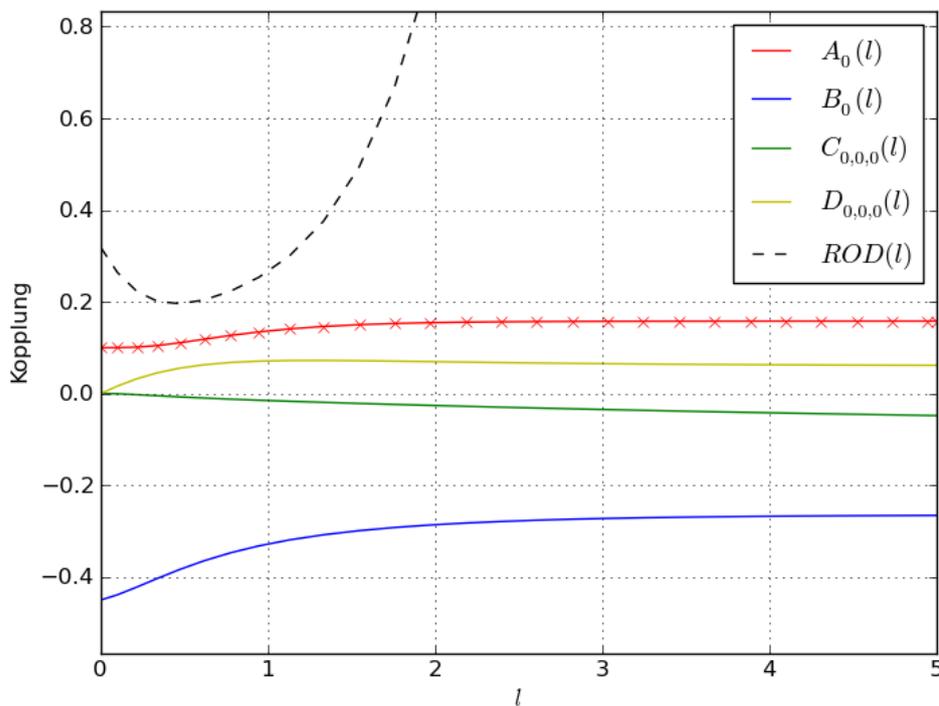


Abb. 4.1.: Fluss der KUT im Impulsraum für $x = 0.9$ und $N = 5$ für die Kopplungen mit Indizes 0 und der ROD. Bei der Kopplung A sind die Stellen l eingetragen, an welchen die Integration ausgewertet wurde.

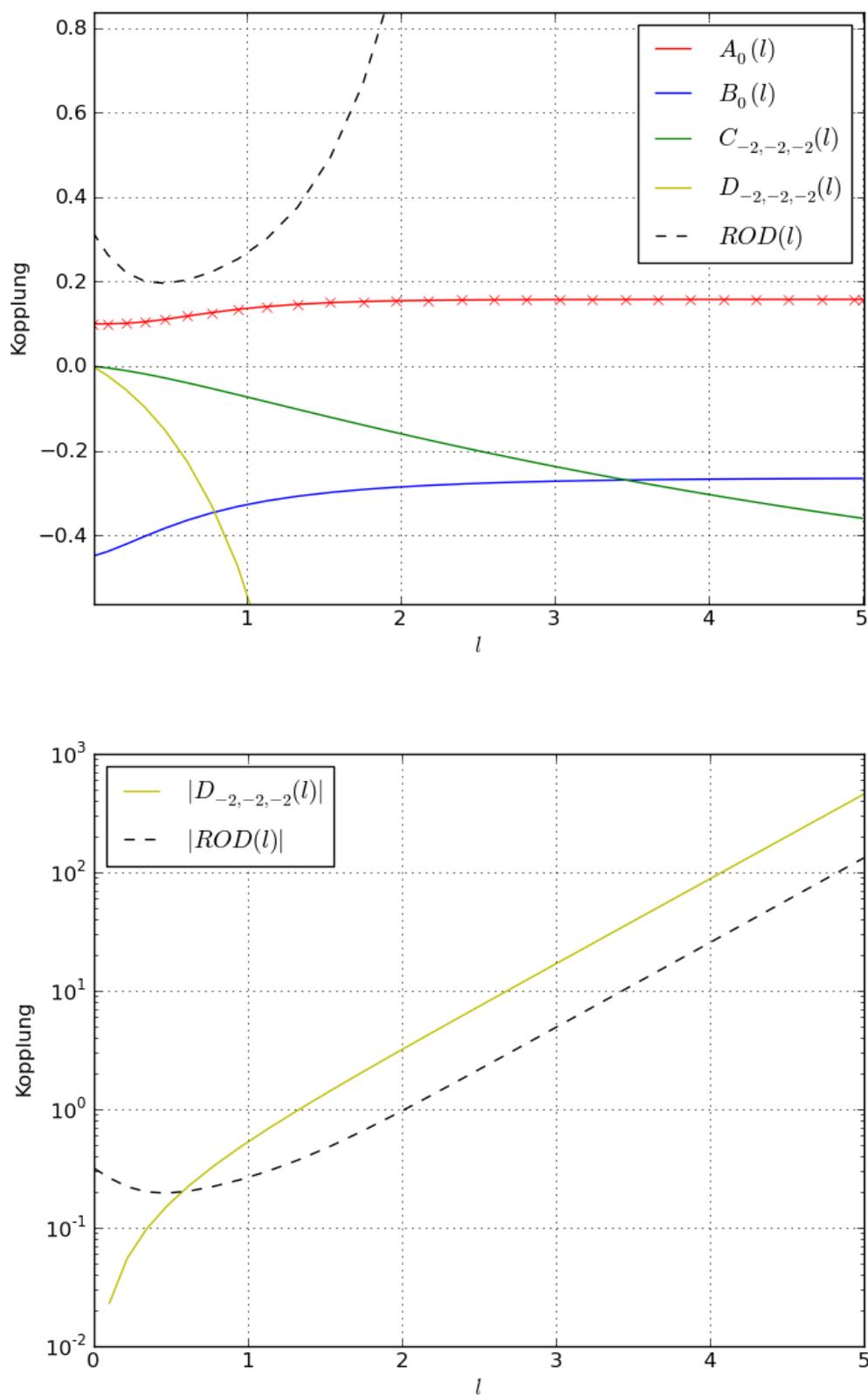


Abb. 4.2.: Fluss der KUT im Impulsraum für $x = 0.9$ und $N = 5$ wie in Abbildung 4.1, jedoch für Kopplungen C und D , welche divergieren. Unten sind D und die ROD logarithmisch aufgetragen.

4.2. Konvergenz im Ortsraum

Im Impulsraum sind normalerweise für delokalisierte Anregungen und Phasenübergänger bessere Ergebnisse als im Ortsraum zu erwarten, doch die unphysikalischen Terme, die aus der Hardcore-Algebra und dem Pauli-Prinzip folgen, stellen hierbei ein Problem dar. Daher wurde zusätzlich die Integration im Ortsraum durchgeführt.

Doch auch hierbei haben sich Probleme in der Integration gezeigt: Für zu große N und x scheint die KUT in dieser Trunkierungs-Ordnung instabil zu werden. Die in den k -Raum fouriertransformierte Dispersion $\epsilon(k) = A_k$ nach der KUT verliert ihre Monotonie für steigende $|k|$: die Enden am Rand der 1.BZ scheinen nach unten „abzuknicken“.

In Abbildung 4.3 wurde das maximale x aufgetragen, mit dem die KUT für ein bestimmtes N noch konvergiert. Interessant ist dabei, dass dieses $x_{\text{Max}, N}$ gegen einen kritischen Wert $x_{\text{Max}, \infty} \approx 0.6$ zu laufen scheint: Bis dahin scheint die KUT im Ortsraum also immer stabil zu sein.

Ferner wurde getestet, wie sich die Ergebnisse verändern, wenn unphysikalische Terme im Fluss nicht auf 0 gesetzt werden. Es hat sich gezeigt, dass die Ergebnisse sich dadurch nur im Rahmen des numerischen Rauschens unterscheiden, die Integration jedoch deutlich verlangsamt wird.

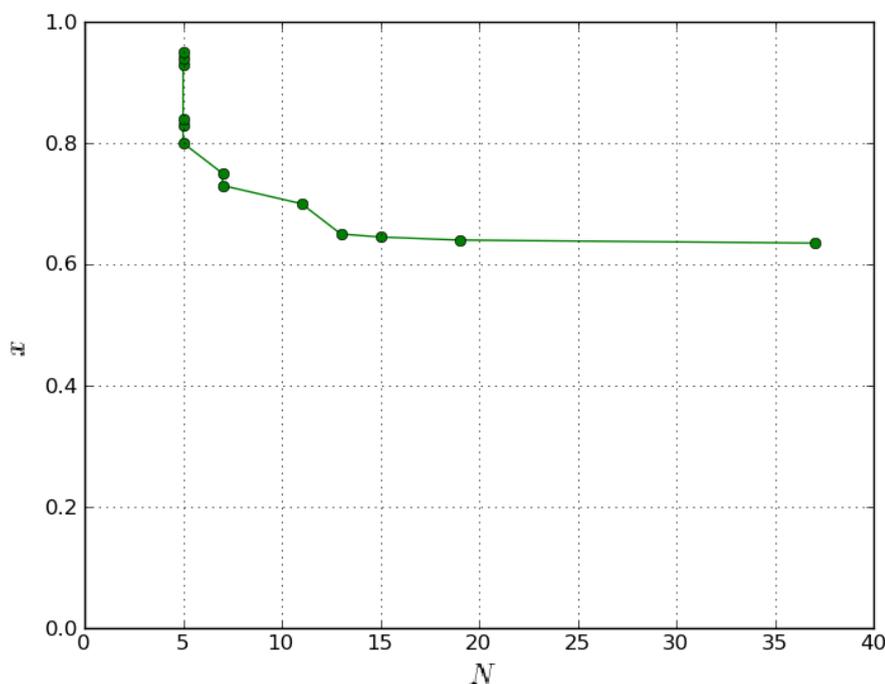


Abb. 4.3.: Maximaler Störparameter x , bei welchem die KUT im Ortsraum bei der Diskretisierung N noch konvergiert. Die Punkte wurden dabei so aufgenommen, dass je für ein feste x die Systemgröße N so lange erhöht wurde, bis das System nicht mehr konvergiert. Daher liegen bei $N = 5$ mehrere Punkte übereinander: Für diese Werte von x war die Integration bei $N = 7$ bereits instabil.

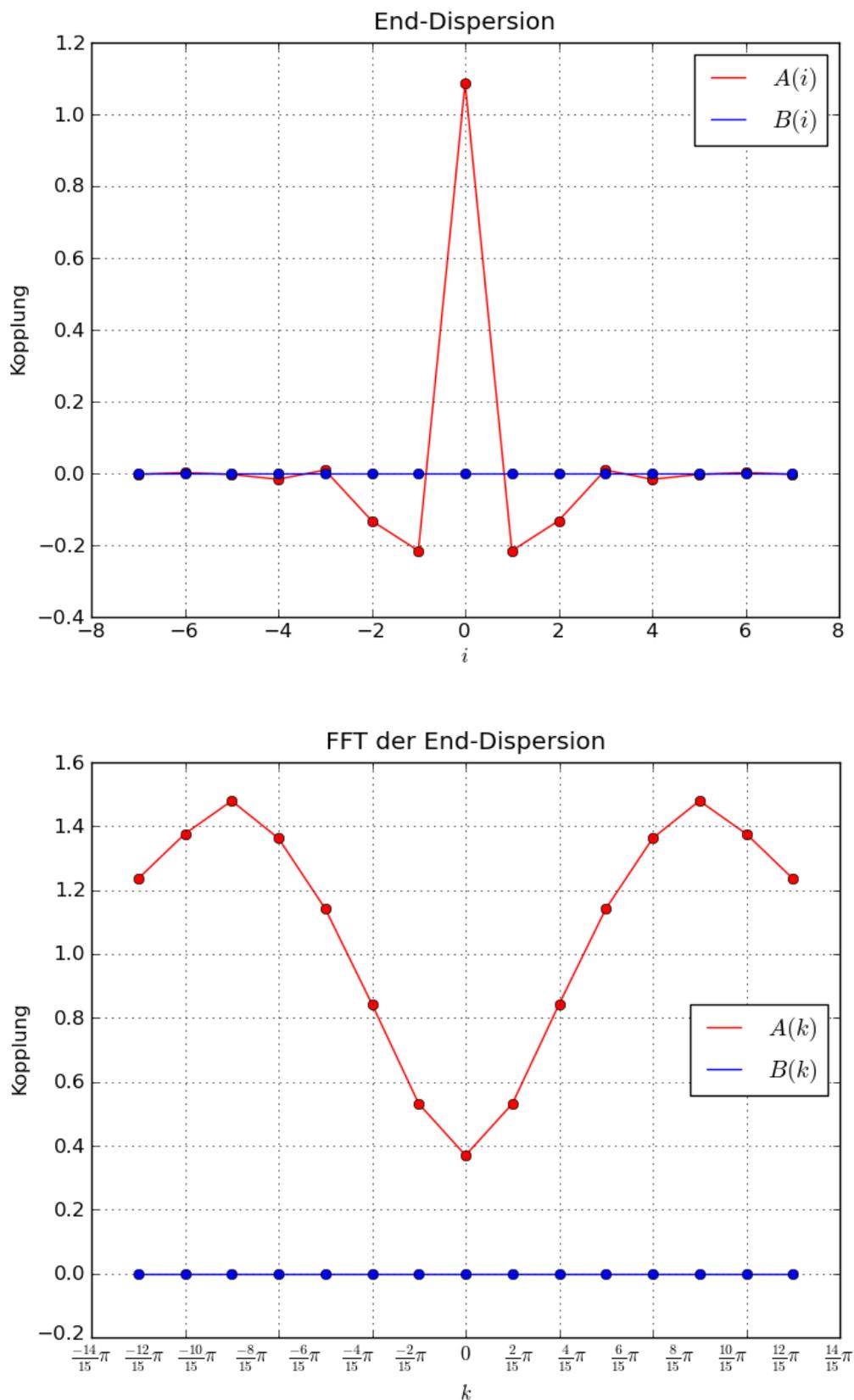


Abb. 4.4.: Dispersion bei $l = 2.5$ für die Ortsraum-KUT mit Diskretisierung $N = 15$ für den Störparameter $x = 0.65$. Oben ist A_i im Ortsraum aufgetragen, unten die tatsächliche Dispersion $\epsilon(k) = A_k$ im Impulsraum.

4.3. Energielücke

In Abbildung 4.5 ist die Energielücke $\Delta = \epsilon(0) = A_0$ für verschiedene x im Vergleich zur Theorie nach Abbildung 2.9 eingetragen. In Abbildung 4.6 ist ferner die Abweichung von der Theorie linear und logarithmisch skaliert aufgetragen.

Bis zu einem Wert von $x \approx 0.6$ stimmen die Ergebnisse der KUT und der Theorie relativ gut miteinander überein. Ab da unterscheiden sich diese Ergebnisse jedoch und auch für Orts- und Impulsraum ergeben sich unterschiedliche Verläufe, wobei nach Abbildung 4.6 der Fehler anscheinend nach einem Potenzgesetz steigt.

Die Ortsraum-Rechnung zeigt etwa bei $x = 1.1$ ein Abknicken der Kurve und einen QKP bei $x_{\text{QKP, Ort}} \approx 1.106$, wohingegen die Impulsraumrechnung eine durchgehend näherungsweise lineare Energielücke besitzt, der linear in $x_{\text{QKP, Impuls}} \approx 1.167$ schließt. Die Impulsraum-Rechnung liefert qualitativ ein Ergebnis das näher an der erwarteten Theorie liegt und auch besser dem linearen Verlauf folgt als das Ergebnis der Vorarbeit [1], bei welcher der QKP jedoch bei $x \approx 0.73$ lag.

Dass die Ortsraum-Rechnung einen derart starken Knick aufweist, mag an der geringen Diskretisierung $N = 5$ liegen, welche die KUT sehr ungenau macht. Für größere N wird die KUT wie zu erwarten genauer, was auch in Abbildung 4.7 zu sehen ist.

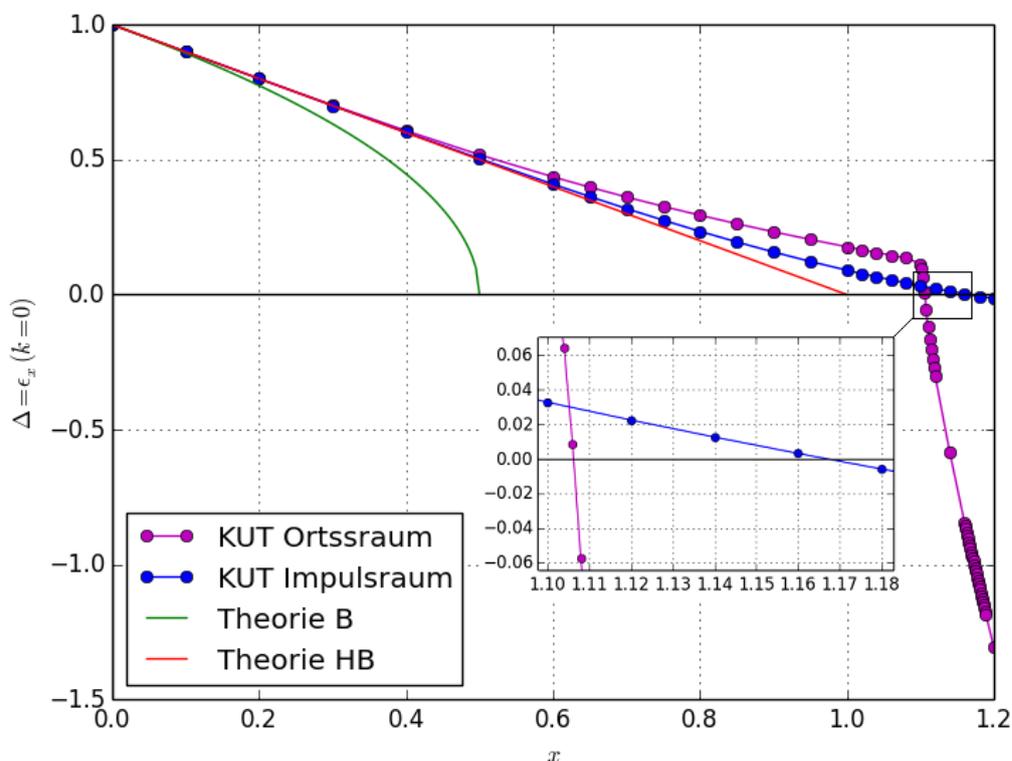


Abb. 4.5.: Vergleich der Energielücke nach der Theorie von Bosonen und Hardcore-Bosonen für das IMTF sowie der Ergebnisse der KUT im Orts- und Impulsraum. Die Vergleichswerte wurden für $N = 5$

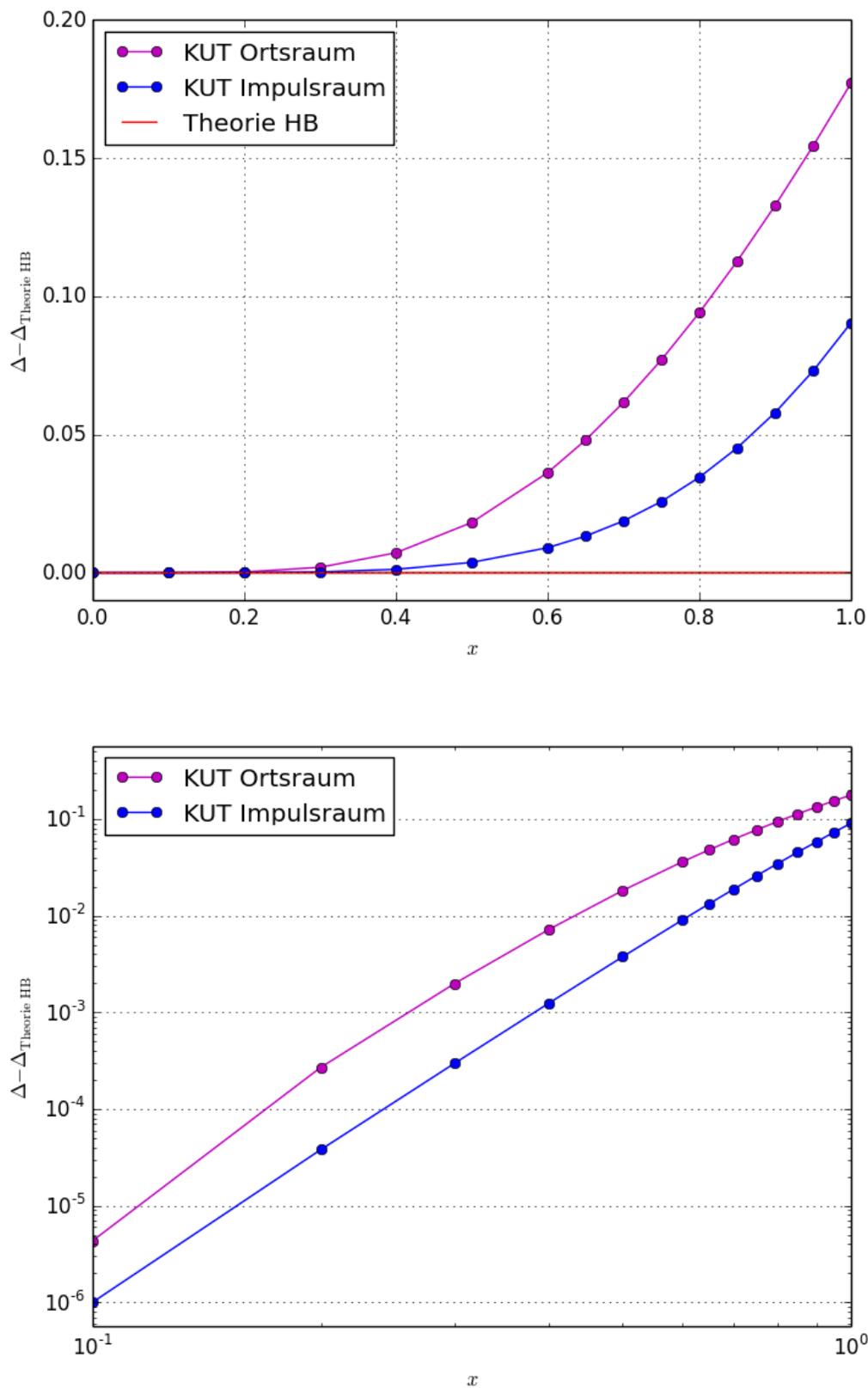


Abb. 4.6.: Abweichungen der über die KUT berechneten Energielücke für $N = 5$ von der Theoriekurve nach (2.2.37). Oben sind die Achsen linear skaliert, unten logarithmisch.

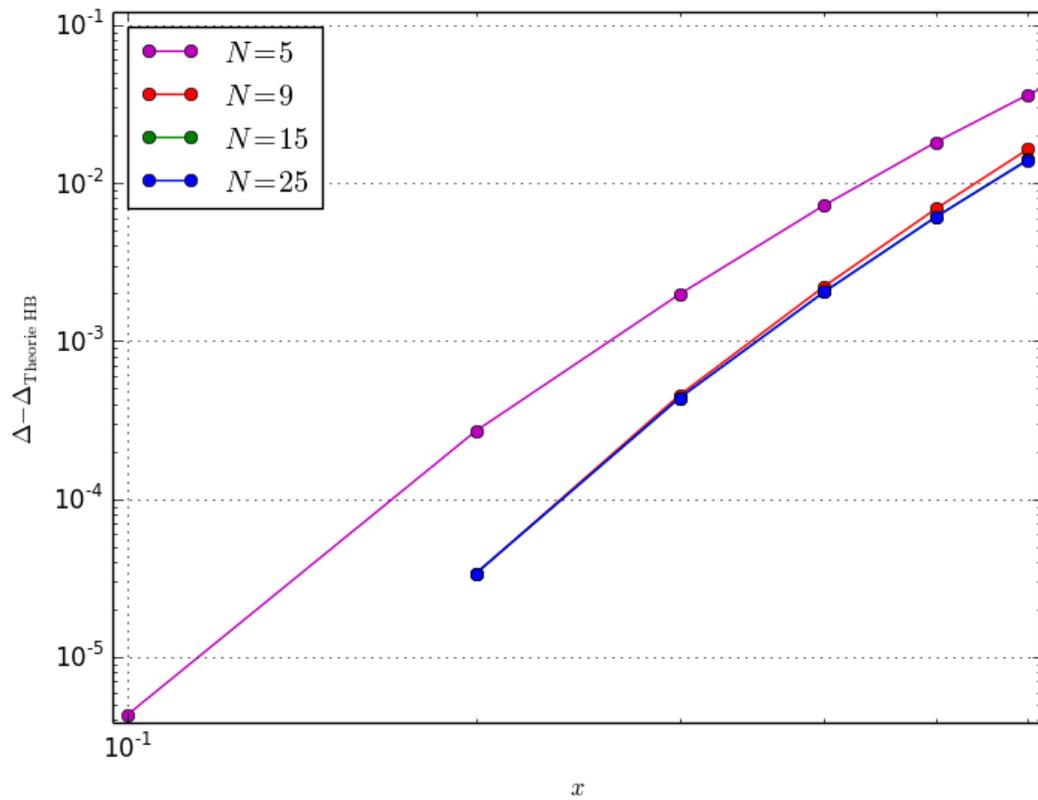
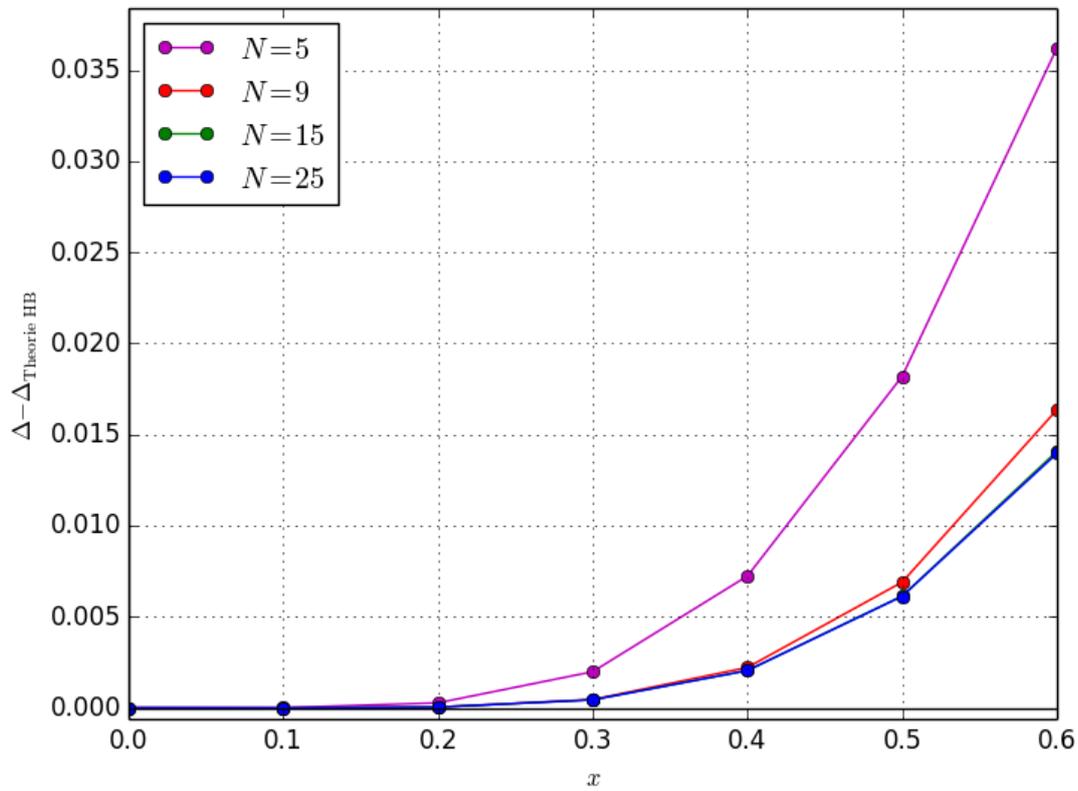


Abb. 4.7.: Abweichungen der über die Ortsraum-KUT berechneten Energielücke von der Theoriekurve nach (2.2.37) für verschiedene N . Oben sind die Achsen linear skaliert, unten logarithmisch.

4.4. Wechselwirkung $C_{k,k',q}$

Da die Daten nur in kleinen Systemen aufgenommen worden sind, ist eine Darstellung über einen Plot wenig sinnvoll. Im Folgenden sind als Beispiel die Werte von $C_{k,k',q}$ für $N = 5$ und $x = 0.8$ aufgelistet. Der Mittelwert lautet $\langle C_{k,k',q} \rangle_{k,k',q} \approx -0.73$.

		k	$-4/5\pi$	$-2/5\pi$	0	$2/5\pi$	$4/5\pi$
		k'					
$q = -4/5\pi$	$-4/5\pi$		-0.223	0.006	-0.020	0.006	-0.223
	$-2/5\pi$		-4.271	-0.003	-0.003	-4.271	0.051
	0		-4.282	0.002	-4.282	0.012	0.012
	$2/5\pi$		-0.204	-0.204	-0.028	-0.026	-0.028
	$4/5\pi$		-0.125	0.010	-0.018	-0.018	0.010
$q = -2/5\pi$	$-4/5\pi$		0.051	-4.271	-0.003	-0.003	-4.271
	$-2/5\pi$		0.032	-4.274	-0.039	-4.274	0.032
	0		-0.034	-0.227	-0.227	-0.034	-0.044
	$2/5\pi$		-0.021	-0.065	-0.021	-0.047	-0.047
	$4/5\pi$		-0.204	-0.204	-0.028	-0.026	-0.028
$q = 0$	$-4/5\pi$		0.012	0.012	-4.282	0.002	-4.282
	$-2/5\pi$		-0.044	-0.034	-0.227	-0.227	-0.034
	0		-0.077	-0.045	-0.044	-0.045	-0.077
	$2/5\pi$		-0.034	-0.227	-0.227	-0.034	-0.044
	$4/5\pi$		-4.282	0.002	-4.282	0.012	0.012
$q = 2/5\pi$	$-4/5\pi$		-0.028	-0.026	-0.028	-0.204	-0.204
	$-2/5\pi$		-0.047	-0.047	-0.021	-0.065	-0.021
	0		-0.044	-0.034	-0.227	-0.227	-0.034
	$2/5\pi$		0.032	-4.274	-0.039	-4.274	0.032
	$4/5\pi$		-4.271	-0.003	-0.003	-4.271	0.051
$q = 4/5\pi$	$-4/5\pi$		0.010	-0.018	-0.018	0.010	-0.125
	$-2/5\pi$		-0.028	-0.026	-0.028	-0.204	-0.204
	0		0.012	0.012	-4.282	0.002	-4.282
	$2/5\pi$		0.051	-4.271	-0.003	-0.003	-4.271
	$4/5\pi$		-0.223	0.006	-0.020	0.006	-0.223

Es zeigt sich hier, wie in allen aufgenommenen Datensätzen für $C_{k,k',q}$, dass die Wechselwirkung wie in der Vorarbeit [1] negativ ist. Dies ist äußerst überraschend, da sich wie in Anhang C gezeigt für gewöhnliche Bosonen keine Wechselwirkungsterme ergeben und zu erwarten wäre, dass sich durch die Hardcore-Abstoßung auch abstoßende, positive Wechselwirkungen ergeben.

Womöglich sind hierfür unphysikalische Terme gemäß Abschnitt 3.2.5.4 verantwortlich.

5. Fazit

Es zeigt sich, dass sich die KUT sowohl im Orts- als auch im Impulsraum für kleine Störparameter $x = \Gamma/J$ in quartischer Trunkierungs-Ordnung gut verhält und für größere Störungen ungenauer wird. So schließt die **Energielücke** erst hinter dem quantenkritischen Punkt, wobei sich durch das neue Trunkierungsschema bessere Ergebnisse als in der Vorarbeit [1] ergeben. Hierbei gleichen sich die berechnete Energielücke im Orts- und Impulsraum für kleine Störungen, doch in der Nähe des QKP Punktes zeigt sich ein besseres lineares Verhalten im die Impulsraum. Dies war zu erwarten, da in diesem Raum delokalisierte Anregungen besser behandelt werden können.

Die KUT im **Ortsraum** konvergiert für große N und x nicht mehr. Hierbei wurde noch nicht näher untersucht, ob hierfür ein handwerkliches Problem in dem verwendeten Algorithmus verantwortlich ist oder tatsächlich eine numerische Beschränkung.

Es konnte jedoch zuverlässig festgestellt werden, dass sich bei der **Impulsraum-KUT unphysikalische Terme** wie $\langle B_k \rangle_k \neq 0$ ergeben und sogar Beiträge der quartischen Terme $C_{k,k',q}$ und $D_{k,k',q}$ exponentiell divergieren. Ferner entstehen, für Hardcore-Bosonen überraschend, **anziehende Wechselwirkungen** $C_{k,k',q} < 0$. Dies kann dadurch erklärt werden, dass im Fluss der KUT unphysikalische Terme entstehen, welche ohne eine Fouriertransformation der Antikommutatoren in der Hardcore-Algebra nicht gefiltert werden können.

Anhand von $\langle B_k \rangle_k$ wurde gezeigt, dass diese unphysikalischen Terme zwar keinen Einfluss auf den restlichen Fluss haben müssen, aber sehr wohl aus diesem entstehen können. Dies verlangsamt die numerische Integration, da die Schrittweite an die divergierenden Terme angepasst werden muss. Ferner haben sich bei der Ortsraum-Rechnung bei Vernachlässigung der unphysikalischen Terme kleine Abweichungen beim restlichen Fluss gezeigt: Höchstwahrscheinlich numerische Fehler, welche durch die divergierenden Terme wachsen.

Für zukünftige Arbeiten ist es von Interesse, die unphysikalischen Terme im Ortsraum in den Impulsraum zu transformieren, um die Hardcore-Eigenschaft dort korrekt zu handhaben und die KUT für größere Systeme zu beschleunigen und zu überprüfen, ob die Wechselwirkung damit abstoßend wird. Ferner lässt sich das Trunkierungsschema verfeinern, um weitere unwichtige Terme des Flussgleichung zu vernachlässigen.

Ferner kann die KUT auf andere Modelle mit Hardcore-Bosonen übertragen werden.

A. Jordan-Wigner-Transformation des IMTF

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Jordan-Wigner-Transformation die fermionische Antikommutator-Relationen generiert. Ferner wird die Transformation auf den Hamiltonoperator (2.2.14) angewendet. In der Regel wird mit der Notation für Hardcore-Bosonen (2.2.17) gearbeitet, doch für die folgende Herleitung erweist sich der Operator S_j^z als sehr praktisch, weshalb die Notation für Spins einfacher ist.

Die Transformations-Vorschriften (2.2.19) nehmen damit die Form

$$\begin{aligned} f_0 &= S_0^- & f_l &= \exp\left(i\pi \sum_{j=0}^{N-1} S_j^+ S_j^-\right) S_l^- \\ f_0^\dagger &= S_0^+ & f_l^\dagger &= S_l^+ \exp\left(-i\pi \sum_{j=0}^{N-1} S_j^+ S_j^-\right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

an und die Rücktransformationen (2.2.21) entsprechend

$$\begin{aligned} S_l^- &= \exp\left(-i\pi \sum_{j=0}^{N-1} f_j^\dagger f_j\right) f_l \\ S_l^+ &= f_l^\dagger \exp\left(i\pi \sum_{j=0}^{N-1} f_j^\dagger f_j\right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Zum Beweisen der Antikommutator-Relationen sollen erst zwei Vereinfachungen gezeigt werden.

Einerseits lässt sich Exponentialfunktion in (A.1) einfacher darstellen. Hierzu kann die Relation

$$(S_j^z)^n = \frac{1}{4^m} \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2m \\ S_j^z & \text{für } n = 2m + 1 \end{cases}, m \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.3})$$

verwendet werden, um zu zeigen dass

$$\begin{aligned}
\exp(\pm i\pi S_j^+ S_j^-) &\stackrel{(2.2.13)}{=} \pm i \exp(\pm i\pi S_j^z) = \pm i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm i\pi S_j^z)^n}{n!} \\
&\stackrel{(A.3)}{=} \pm i \left(\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{\pi}{2})^{2m}}{(2m)!}}_{=\cos(\frac{\pi}{2})=0} \pm 2i \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{\pi}{2})^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{=\sin(\frac{\pi}{2})=1} S_j^z \right) \\
&= -2S_j^z \tag{A.4}
\end{aligned}$$

gilt und mit $[S_i^+ S_i^-, S_j^+ S_j^-] = 0$ auch

$$\exp\left(\pm i\pi \sum_{j=0}^{n-1} S_j^+ S_j^-\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \exp(\pm i\pi S_j^+ S_j^-) \stackrel{(A.4)}{=} \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) \tag{A.5}$$

Neben dieser einfachen Schreibweise der Exponentialfunktion ist die Gleichung

$$S_j^\pm S_j^z = \{S_j^\pm, S_j^z\} - S_j^z S_j^\pm = \underbrace{\{S_j^x, S_j^z\}}_{=0} \pm i \underbrace{\{S_j^y, S_j^z\}}_{=0} - S_j^z S_j^\pm = -S_j^z S_j^\pm \tag{A.6}$$

hilfreich.

Die Antikommutator-Relationen werden nacheinander hergeleitet.

Zuerst lässt sich für f_0 und f_0^\dagger sehr einfach

$$\{f_0, f_0^\dagger\} = \underbrace{\{S_0^x, S_0^x\}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\{S_0^y, S_0^y\}}_{=\frac{1}{2}} + i \underbrace{\{S_0^x, S_0^y\}}_{=0} - i \underbrace{\{S_0^y, S_0^x\}}_{=0} = 1 \tag{A.7a}$$

$$\{f_0, f_0\} = \underbrace{\{S_0^x, S_0^x\}}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\{S_0^y, S_0^y\}}_{=\frac{1}{2}} - i \underbrace{\{S_0^x, S_0^y\}}_{=0} - i \underbrace{\{S_0^y, S_0^x\}}_{=0} = 1 \tag{A.7b}$$

$$\{f_0^\dagger, f_0^\dagger\} = \underbrace{\{S_0^x, S_0^x\}}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\{S_0^y, S_0^y\}}_{=\frac{1}{2}} + i \underbrace{\{S_0^x, S_0^y\}}_{=0} + i \underbrace{\{S_0^y, S_0^x\}}_{=0} = 1 \tag{A.7c}$$

zeigen.

Für f_0 und f_n^\dagger mit $n \neq 0$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \{f_0, f_n^\dagger\} &\stackrel{(A.5)}{=} S_0^- S_n^+ \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) + S_n^+ \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) S_0^- \\ &\stackrel{(A.6)}{=} S_n^+ S_0^- \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) - S_n^+ S_0^- \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) = 0 \end{aligned} \quad (A.8a)$$

$$\begin{aligned} \{f_0, f_n\} &\stackrel{(A.5)}{=} S_0^- \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) S_n^- + \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) S_n^- S_0^- \\ &\stackrel{(A.6)}{=} S_n^- S_0^- \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) - S_n^- S_0^- \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) = 0 \end{aligned} \quad (A.8b)$$

$$\{f_0^\dagger, f_n^\dagger\} = \{f_n, f_0\}^\dagger = 0. \quad (A.8c)$$

Abschließen ergibt sich für f_n und f_m^\dagger mit $n, m \neq 0$, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n < m$ angenommen wird,

$$\begin{aligned} \{f_n, f_n^\dagger\} &\stackrel{(A.5)}{=} \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) \underbrace{S_n^- S_n^+}_{=1/2-S_n^z} \prod_{l=0}^{n-1} (-2S_l^z) + S_n^+ \underbrace{\prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) \prod_{l=0}^{n-1} (-2S_l^z)}_{\stackrel{(A.3)}{=} 1} S_n^- \\ &\stackrel{(A.6)}{=} 1 \end{aligned} \quad (A.9a)$$

$$\begin{aligned} \{f_n, f_m^\dagger\} &\stackrel{(A.5)}{=} \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) S_n^- S_m^+ \prod_{l=0}^{m-1} (-2S_l^z) + S_m^+ \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) \prod_{l=0}^{m-1} (-2S_l^z) S_n^- \\ &= S_n^- \prod_{j=n}^{m-1} (-2S_j^z) S_m^+ + \prod_{j=n}^{m-1} (-2S_j^z) S_m^+ S_n^- \\ &\stackrel{(A.6)}{=} 0 \end{aligned} \quad (A.9b)$$

$$\begin{aligned} \{f_n, f_n\} &\stackrel{(A.5)}{=} 2 \prod_{j=0}^{n-1} (-2S_j^z) S_n^- \prod_{l=0}^{n-1} (-2S_l^z) S_n^- = 2(S_n^-)^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (A.9c)$$

$$\begin{aligned} \{f_n, f_m\} &\stackrel{(A.5)}{=} S_n^- \prod_{j=n}^{m-1} (-2S_j^z) S_m^- + \prod_{j=n}^{m-1} (-2S_j^z) S_m^- S_n^- \\ &\stackrel{(A.6)}{=} 0 \end{aligned} \quad (A.9d)$$

$$\{f_n^\dagger, f_n^\dagger\} = \{f_n, f_n\}^\dagger = 0 \quad (A.9e)$$

$$\{f_n^\dagger, f_m^\dagger\} = \{f_m, f_n\}^\dagger = 0. \quad (A.9f)$$

Damit ist gezeigt, dass diese Transformation die fermionische Algebra erzeugt.

Um noch den Hamiltonoperator (2.2.14) zu transformieren, müssen die bilinearen Terme aus Spinoperatoren in bilineare Terme aus fermionischen Operatoren umgeschrieben werden. Dies geschieht durch

$$f_j^\dagger f_{j+1} = S_j^+ (-2S_j^z) S_{j+1}^- \stackrel{(2.2.13)}{=} +S_j^+ S_{j+1}^- \quad (\text{A.10a})$$

$$f_j f_{j+1}^\dagger = S_j^- (-2S_j^z) S_{j+1}^+ \stackrel{(2.2.13)}{=} -S_j^- S_{j+1}^+ \quad (\text{A.10b})$$

$$f_j^\dagger f_{j+1}^\dagger = S_j^+ (-2S_j^z) S_{j+1}^+ \stackrel{(2.2.13)}{=} +S_j^+ S_{j+1}^+ \quad (\text{A.10c})$$

$$f_j f_{j+1} = S_j^- (-2S_j^z) S_{j+1}^- \stackrel{(2.2.13)}{=} -S_j^- S_{j+1}^- \quad (\text{A.10d})$$

und

$$f_{N-1}^\dagger f_0 = -e^{-i\pi N_f} S_{N-1}^+ S_0^- \quad (\text{A.11a})$$

$$f_{N-1} f_0^\dagger = +e^{+i\pi N_f} S_{N-1}^- S_0^+ \quad (\text{A.11b})$$

$$f_{N-1}^\dagger f_0^\dagger = -e^{-i\pi N_f} S_{N-1}^+ S_0^+ \quad (\text{A.11c})$$

$$f_{N-1} f_0 = +e^{+i\pi N_f} S_{N-1}^- S_0^- \quad (\text{A.11d})$$

mit dem Zähleroperator der Fermionenzahl

$$N_j := \sum_{j=0}^{N-1} f_j^\dagger f_j. \quad (\text{A.12})$$

Die Größe $\exp(i\pi N_f) = \exp(-i\pi N_f) = \pm 1$ ist erhalten, da die bilinearen Terme stets nur eine gerade Anzahl $\Delta N_f \in \{-2, 0, 2\}$ an Teilchen erzeugen oder vernichten können. Ihr Wert hängt nur davon ab, ob die Anzahl an Fermionen gerade oder ungerade ist. Werden die bilinearen Terme in den Hamiltonoperator (2.2.14) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} H &= \Gamma \sum_{i=0}^{N-1} \left(f_i^\dagger f_i - \frac{1}{2} \right) - \frac{J}{2} \sum_{i=0}^{N-2} \left(f_i^\dagger f_{i+1} + f_i^\dagger f_{i+1}^\dagger + \text{h.c.} \right) \\ &= +\frac{J}{2} \left(f_{N-1}^\dagger f_0 + f_{N-1}^\dagger f_0^\dagger + \text{h.c.} \right) e^{i\pi N_f}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Indem man nun die Randbedingung je nachdem, ob die Anzahl der Fermionen gerade oder ungerade ist, auf

$$f_N = \pm f_0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} N_f = 2m + 1 \\ N_f = 2m \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.14})$$

setzt, ergibt sich der finale Hamiltonoperator

$$H = \Gamma \sum_{i=0}^{N-1} \left(f_i^\dagger f_i - \frac{1}{2} \right) - \frac{J}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(f_i^\dagger f_{i+1} + f_i^\dagger f_{i+1}^\dagger + \text{h.c.} \right) \quad (\text{A.15})$$

B. Fourier-Transformation des IMTF

Im Folgenden wird gezeigt, dass die in Abschnitt 2.2.4.2 zur exakten Diagonalisierung des IMTF verwendete Fourier-Transformation die fermionische Algebra erhält und es werden die Zwischenschritte der Transformation des Hamiltonoperators gezeigt.

Die fermionischen Antikommutator-Relationen aus Anhang A ergeben nach Einsetzen der Transformationsvorschrift für die Operatoren (2.2.23)

$$\begin{aligned} \bar{f}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ikx_j} f_j & f_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k^{1.BZ} e^{-ikx_j} \bar{f}_k \\ \bar{f}_k^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ikx_j} f_j^\dagger & f_j^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k^{1.BZ} e^{ikx_j} \bar{f}_k^\dagger \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

die Form

$$\{\bar{f}_k, \bar{f}_{k'}\} = \{\bar{f}_k^\dagger, \bar{f}_{k'}^\dagger\} = 0 \quad (\text{B.2a})$$

$$\begin{aligned} \{\bar{f}_k, \bar{f}_{k'}^\dagger\} &= \frac{1}{N} \sum_{j,l=0}^{N-1} \exp[i(kx_j - k'x_l)] \underbrace{\{f_j, f_l^\dagger\}}_{\delta_{j,l}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \exp[i(k - k')x_j] \\ &\stackrel{(3.2.47)}{=} \delta_{k,k'}. \end{aligned} \quad (\text{B.2b})$$

Die Algebra der Fermionen bleibt damit durch die Fourier-Transformation erhalten.

Die Vorschrift zur Transformation der Operatoren ist durch (2.1.5a) und (2.1.5b) gegeben. Dabei kann k aufgrund der Translationsinvarianz auf die 1. Brillouin-Zone $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ eingeschränkt werden und ferner aufgrund der periodischen Randbedingungen nur diskrete Werte annehmen:

$$\exp(ikx_{j+N}) = \exp(ikx_j) \quad \Leftrightarrow \quad e^{ikNa} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{2\pi}{Na}n, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.3})$$

Werden die transformierten Operatoren in den Hamiltonoperator (2.2.22) eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
H &= \Gamma \sum_{k,k'}^{1.BZ} \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} e^{i(k-k')x_j} \bar{f}_k^\dagger \bar{f}_{k'}}_{(3.2.47) \delta_{k,k'}} - \frac{\Gamma N}{2} \\
&\quad - \frac{J}{4} \sum_{k,k'}^{1.BZ} \left[\underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{i(k-k')x_j}}_{(3.2.47) \delta_{k,k'}} e^{-ik'a} \bar{f}_k^\dagger \bar{f}_{k'} + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{i(k+k')x_j} e^{ik'a} \bar{f}_k^\dagger \bar{f}_{k'} + \text{h.c.} \right] \\
&= \sum_k^{1.BZ} \left[\left(\Gamma - \frac{J}{2} \cos(ka) \right) \bar{f}_k^\dagger \bar{f}_k - \frac{\Gamma}{2} \right] + \frac{iJ}{2} \sum_k^{1.BZ} \sin(ka) \left(\bar{f}_k^\dagger \bar{f}_{-k}^\dagger - \text{h.c.} \right) \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$

C. KUT für einfache Bosonen

Im Folgenden wird gezeigt, dass eine KUT den Hamiltonoperators des IMTF für gewöhnliche Bosonen korrekt diagonalisiert und sogar analytisch gelöst werden kann.

Für normale Bosonen ist die Algebra (2.1.7a) deutlich einfacher als für Hardcore-Bosonen:

Bosonische Algebra (Impulsraum)

$$\begin{aligned} [b_k, b_{k'}^\dagger] &= \delta_{k,k'} \\ [b_k, b_{k'}] &= [b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger] = 0 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Damit ergeben sich in der Flussgleichung (3.2.32) die wesentlich einfacheren Kommutatoren

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= [b_k^\dagger b_{-k}^\dagger, b_{k'}^\dagger b_{k'}] = b_k^\dagger b_{k'}^\dagger [b_{-k}^\dagger, b_{k'}] + b_{k'}^\dagger [b_k^\dagger, b_{k'}] b_{-k}^\dagger \\ &\stackrel{\text{(C.1)}}{=} -\delta_{-k,k'} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger - \delta_{k,k'} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \end{aligned} \tag{C.2}$$

und

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= [b_k^\dagger b_{-k}^\dagger, b_{-k'} b_{k'}] \\ &\stackrel{\text{(C.1)}}{=} -\delta_{k',k} b_k^\dagger b_k - \delta_{k',k} b_{-k}^\dagger b_{-k} - \delta_{k',-k} b_k^\dagger b_k - \delta_{k',-k} b_{-k}^\dagger b_{-k}. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Unter Ausnutzung der Isotropie $A_k = A_{-k}$ und $B_k = B_{-k}$ sowie Beachtung des Faktors 0.5 vor A_k in der Definition von $\bar{H}^{(0)}$ in Gleichung (3.2.29) ergeben sich durch Koeffizienten-Vergleich der beiden Seiten von (3.2.32) die

Flussgleichungen für Bosonen

$$\begin{aligned} \partial_l A_k &= -8B_k^2 \\ \partial_l B_k &= -2B_k A_k. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Durch geschickte Multiplikation der Gleichungen mit entsprechenden Vorfaktoren und

Subtraktion ergibt sich

$$0 = A_k \partial_l A_k - 4B_k \partial_l B_k = \frac{1}{2} \partial_l (A_k^2 - 4B_k^2), \quad (\text{C.5})$$

woraus die Erhaltungsgröße

$$\begin{aligned} C &:= A_k^2 - 4B_k^2 \\ &= A_k^2(0) - 4B_k^2(0) \stackrel{(3.2.35)}{=} \Gamma^2 [1 - 2x \cos(ka)] \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

ergibt. Diese lässt sich in die Flussgleichung für A_k in (C.4) einsetzen, um die einfache Differentialgleichung

$$\partial_l A_k = -2 (A_k^2 - C) \quad (\text{C.7})$$

zu erhalten, durch Separation gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^l dl' \frac{\partial_l A_k(l')}{-2(A_k^2(l') - C)} &= -2l \\ \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{artanh} \left(\frac{A_k(l')}{\sqrt{C}} \right) \Big|_0^l &= -2l. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Daraus ergibt sich die Dispersion

$$\begin{aligned} \epsilon(k) = A_k &= \sqrt{C} \tanh \left[2\sqrt{C}l + \operatorname{artanh} \left(\frac{A_k(0)}{\sqrt{C}} \right) \right] \\ &\xrightarrow{l \rightarrow \infty} \sqrt{C} = \Gamma \sqrt{1 - 2x \cos(ka)}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

die genau der analytischen Lösung für Bosonen nach (2.2.42) entspricht. Durch Einsetzen dieser Lösung in die Erhaltungsgröße (C.6) und Umstellen nach B_k ergibt sich der nicht-diagonale Teil zu

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{\sqrt{C}}{2} \sqrt{\tanh^2 \left[2\sqrt{C}l + \operatorname{artanh} \left(\frac{A_k(0)}{\sqrt{C}} \right) \right] - 1} \\ &\xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

im Grenzfall $l \rightarrow \infty$ verschwindet er also wie für die KUT zu erwarten.

D. Kommutatoren der KUT für Hardcore-Bosonen

Hier finden sich die Kommutatoren, die für die Flussgleichung (3.2.48) im Impulsraum beziehungsweise (3.2.49) im Ortsraum berechnet worden sind. Hierzu wurde der in Abschnitt 3.2.6.2 beschriebene Algorithmus verwendet.

4.1. Impulsraum

Kommutator ①:

$$\begin{aligned}
& [b_k^\dagger b_{-k}^\dagger, b_{k'}^\dagger b_{k'}] \\
= & -\delta_{k',-k} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1+k'+k} \\
& - \delta_{k',k} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} b_{k'}^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{-k}^\dagger b_{k'_1+k'-k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_{k'}^\dagger b_{-k'}^\dagger \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_{k'}^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k_1+k'_1+k'}
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 6 Summanden.

Kommutator ②:

$$\begin{aligned}
& [b_k^\dagger b_{-k}^\dagger, b_{-k'} b_{k'}] \\
= & -\delta_{k',-k} b_k^\dagger b_k \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} b_k^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{-k'} b_{k'_1+k'+k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_k^\dagger b_k \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_k^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k_1-k'-k'_1} b_{k'_1+k'+k} \\
& - \delta_{k',k} b_k^\dagger b_k \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} b_k^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1-k'+k} b_{k'} \\
& - \delta_{k',k} b_{-k}^\dagger b_{-k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} \delta_{k',k} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} b_{k'}^\dagger b_{-k}^\dagger b_{-k'} b_{k'_1+k'-k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{k'_1} \delta_{k',k} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k_1-k'+k} b_{k'_1+k'-k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_{-k'}^\dagger b_{-k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{-k'} b_{k_1+k'_1+k'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k'_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{k'_1, k_1, k_2} b_{k'_1}^\dagger b_{k_2}^\dagger b_{k_2 - k' - k_1} b_{k_1 + k'_1 + k'} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) b_{-k}^\dagger b_{-k} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k_1} b_{k_1}^\dagger b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_{k_1}^\dagger b_{-k}^\dagger b_{k_1 - k' - k'_1} b_{k'_1 + k' - k} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k'_1} b_{-k + k' + k'_1}^\dagger b_{k'_1 + k' - k} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{k'_1, k_1, k_2} b_{k_1}^\dagger b_{k_2}^\dagger b_{k_2 + k_1 - k' - k'_1} b_{k'_1 + k' - k} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k_1} b_{k_1}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{k'_1, k_1, k_2} b_{k_1}^\dagger b_{k_2}^\dagger b_{k_1 - k' - k'_1} b_{k_2 + k'_1 + k'} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{k'_1, k_1} b_{k_1}^\dagger b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{\substack{k'_1, k_1, \\ k_2, k_3}} b_{k_1}^\dagger b_{k_3}^\dagger b_{k_3 + k_1 - k' - k'_1 - k_2} b_{k_2 + k'_1 + k'} \\
& - \delta_{k', -k} b_{-k}^\dagger b_{-k} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \sum_{k'_1} \delta_{k', -k} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \sum_{k'_1} b_{k'_1}^\dagger b_{-k}^\dagger b_{k'_1 - k' - k} b_{k'} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) b_{k'}^\dagger b_{k'} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k_1 + k'_1 - k'} b_{k'} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \sum_{k'_1} \delta_{k', -k} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k'_1, k_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k'_1 - k' - k} b_{k_1 + k' + k} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k'_1} b_{k'_1}^\dagger b_{k'_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{k'_1, k_1, k_2} b_{k'_1}^\dagger b_{k_2}^\dagger b_{k_2 + k'_1 - k' - k - k_1} b_{k_1 + k' + k}
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 33 Summanden.

Darüber hinaus wurden 3 konstante Terme (Operator $\hat{1}$) ausgelassen.

Kommutator ③:

$$\begin{aligned}
& [b_{k_1}^\dagger b_{-k_1}^\dagger, b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k'} b_k] \\
& = -\delta_{k_1, -k} b_{-k}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k'} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) b_{k_1}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k+k_1+k'} \\
& - \delta_{k_1, -k'} b_{-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_k \\
& - \delta_{k_1, k} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{-k}^\dagger b_{k'} \\
& - \delta_{k_1, k} \delta_{k', -k} b_{k-q}^\dagger b_{q-k}^\dagger \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \sum_{q'} \delta_{k_1, k} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+k'+k} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \sum_{q'} \delta_{k_1, -k'} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+k+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{-k}^\dagger b_{k'} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q'} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+k+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{-k_1}^\dagger b_{k-k_1+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{k', -k} b_{k-q}^\dagger b_{q-k}^\dagger \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_1} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q_1+k+k'} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q'} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{-k_1-k'+q'}^\dagger b_{q'+k-k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_1} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q_1+k'+k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q', q_1} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{k+q_1+k'} \\
& - \delta_{k_1, k'} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{-k'}^\dagger b_k \\
& - \delta_{k_1, -k} \delta_{k', -k} b_{k-q}^\dagger b_{q-k}^\dagger \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q'} \delta_{k_1, k'} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+k+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{-k'}^\dagger b_k \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q'} \delta_{k_1, -k} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+k'+k} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q'} b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{k+q'+k'}
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 21 Summanden.

Ferner wurden 15 Terme von mindestens hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen.

Kommutator ④:

$$\begin{aligned}
& [b_{k_1}^\dagger b_{-k_1}^\dagger, b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k-q}] \\
= & - \delta_{q, k_1+k} b_{k_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+k_1+k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_{k_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k+k_1+k'} \\
& - \delta_{q, -k_1-k'} b_{k_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k+k_1+k'} \\
& - \delta_{q, -k_1+k} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k_1}^\dagger b_{k'-k_1+k} \\
& - \delta_{q, -k_1+k} \delta_{k', -k} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q'} \delta_{q, -k_1+k} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+k'+k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q'} \delta_{q, -k_1-k'} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+k+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k+q}^\dagger b_{k'+q} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q'} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+k+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k_1}^\dagger b_{k-k_1+k'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{k', -k} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_1} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q_1+k+k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q'} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k_1-k'-q+q'}^\dagger b_{q'+k-q-k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_1} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q_1+k'+k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q', q_1} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{k+q_1+k'} \\
& - \delta_{q, k_1-k'} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k_1}^\dagger b_{k-k_1+k'} \\
& - \delta_{q, k_1+k} \delta_{k', -k} b_k^\dagger b_{-k}^\dagger \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q'} \delta_{q, k_1-k'} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+k+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k'-q}^\dagger b_{k-q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q'} \delta_{q, k_1+k} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+k'+k} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q'} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{q'}^\dagger b_{k+q'+k'}
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 21 Summanden.

Ferner wurden 15 Terme von mindestens hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen.

Kommutator ⑤:

$$\begin{aligned}
& [b_{k_1}^\dagger b_{-k_1}^\dagger, b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k'+q}^\dagger b_{k-q}] \\
= & - \delta_{q, k_1+k} b_{k_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k'+k_1+k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_{k_1}^\dagger b_k^\dagger b_{-k'+q}^\dagger b_{k-q+k_1+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_{k_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k+k_1-k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q'} b_{k_1}^\dagger b_k^\dagger b_{q-q'}^\dagger b_{q'+k-q+k_1} \\
& - \delta_{q, -k_1+k'} b_{k_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k+k_1-k'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_{k_1}^\dagger b_k^\dagger b_{q+k_1} b_{k-q} \\
& - \delta_{k_1, -k'} b_{-k'}^\dagger b_k^\dagger b_{-k'+q} b_{k-q} \\
& - \delta_{q, -k_1+k} b_k^\dagger b_{-k_1}^\dagger b_{k'} b_{-k'-k_1+k} \\
& - \delta_{q, k+k'} \delta_{k_1, -k'} b_k^\dagger b_k \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q'} \delta_{q, -k_1+k} b_k^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q'+k'+k_1} b_{-k'-k_1+k} \\
& - \delta_{q, -k_1+k} \delta_{k', k} b_k^\dagger b_k \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q'} \delta_{q, -k_1+k} b_k^\dagger b_{q'}^\dagger b_{k'} b_{q'-k'+k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q, -k_1+k} b_k^\dagger b_k \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q', q_1} \delta_{q, -k_1+k} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q_1+k'-q'} b_{q'-k'+k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q'} \delta_{k_1, -k'} b_k^\dagger b_{q'}^\dagger b_{-k'+q} b_{q'+k-q+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q'} \delta_{q, -k_1+k'} b_k^\dagger b_{q'}^\dagger b_{k'} b_{q'+k-k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q'} b_k^\dagger b_{q'}^\dagger b_{q+k_1} b_{q'+k-q-k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_k^\dagger b_{-k+q}^\dagger b_{k'} b_{-k'+q} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q'} b_k^\dagger b_{q'}^\dagger b_{-k'+q} b_{q'+k-q+k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q'} b_k^\dagger b_{q'}^\dagger b_{k'} b_{q'+k-k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q', q_1} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q-q_1} b_{q_1+q'+k-q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_k^\dagger b_{-k_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{k-q-k_1+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q, -k_1+k'} b_k^\dagger b_k \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_1} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q_1-k'+q+k_1} b_{k-q-k_1+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q, k'+k} b_k^\dagger b_k \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_1} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{q_1+k-q+k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_1} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{q_1+k-q+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_1, q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2-k'+q-q_1} b_{q_1+k-q+k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q'} b_k^\dagger b_{-k_1-k'+q}^\dagger b_{-k'+q} b_{q'+k-q-k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q', q_1} \delta_{q, -k_1+k'} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q_1+k'-q'} b_{q'+k-k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q', q_1} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q+k_1+q_1-q'} b_{q'+k-q-k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_1} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q_1+k'+k-q} b_{-k'+q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q', q_1} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{k-q+q_1+k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q', q_1} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q_1+k'-q'} b_{q'+k-k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q', q_1, q_2} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q-q_2+q_1-q'} b_{q_2+q'+k-q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) b_k^\dagger b_{-k_1}^\dagger b_{k'} b_{k-k_1-k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{k_1, -k'} b_k^\dagger b_k \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_1} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q_1+k'+k_1} b_{k-k_1-k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{k', k} b_k^\dagger b_k \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_1} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{k'} b_{q_1+k-k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_k \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_1, q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k'-q_1} b_{q_1+k-k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q', q_1} \delta_{k_1, -k'} b_k^\dagger b_{q_1}^\dagger b_{q_1-k'+q-q'} b_{q'+k-q+k'}
\end{aligned}$$

lassen.

Kommutator ⑦:

$$\begin{aligned}
& [b_{k_1-q_1}^\dagger b_{-k'_1+q_1}^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}, b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k'}^\dagger b_k] \\
= & -\delta_{q_1, k+k'} \delta_{k'_1, k'} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, k'+k} b_{k_1-k'-k}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, k'+k} \delta_{k'_1, k} b_{k_1-k'-k}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k+k_1} \delta_{k'_1, k'} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k+k_1} \delta_{q_1, k'+k_1} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, -k+k_1} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, k'+k_1} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{k'_1, k'} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, -k'+k_1-k+k_1} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{k_1, k'+k_1+k} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k'+k_1} \delta_{k'_1, k} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k'+k_1} \delta_{q_1, k+k_1} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, -k'+k_1} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{k'_1, k} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, k+k_1} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k_1}
\end{aligned}$$

$$- \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_{k-q}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{-k-k'+k_1} b_{k_1}$$

Dies sind insgesamt 21 Summanden.

Ferner wurden 153 Terme von mindestens hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen.

Kommutator ⑧:

$$\begin{aligned}
& [b_{k_1-q_1}^\dagger b_{-k'_1+q_1}^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}, b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k-q}] \\
= & -\delta_{q_1, k+k'} \delta_{q, k'_1-k'} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k-q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, k'+k} b_{k_1-k'-k}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k-q} \\
& - \delta_{q_1, k'+k} \delta_{q, -k'_1+k} b_{k_1-k'-k}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k-q} \\
& - \delta_{q_1, -k+q+k_1} \delta_{q, k'_1-k'} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k-q} \\
& - \delta_{q_1, q+k'+k_1} \delta_{k_1, k'+k'_1+k} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k-q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, -k+q+k_1} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k-q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, k'+q+k_1} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k-q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q, k'_1-k'} b_{k_1-k-k'}^\dagger b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'+q}^\dagger b_{k-q} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k-k'+k_1} b_{k-q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, -k'+k_1-k+k_1} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k-k'+k_1} b_{k-q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{k_1, k'+k_1+k} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k-k'+k_1} b_{k-q} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k-k'+k_1} b_{k-q} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k-k'+k_1} b_{k-q} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k-k'+k_1} b_{k-q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k-k'+k_1} b_{k-q} \\
& - \delta_{q_1, -k'-q+k_1} \delta_{q, -k'_1+k} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k-k'+k_1} b_{k-q} \\
& - \delta_{q_1, -q+k+k_1} \delta_{k_1, k+k_1+k'} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k-k'+k_1} b_{k-q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q_1, -k' - q + k_1} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k - k' + k_1}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q, -k'_1 + k} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k' + k_1 - k}^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q_1, k - q + k'_1} b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k' + k_1 - k}^\dagger b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{-k - k' + k_1}^\dagger b_{k_1}
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 21 Summanden.

Ferner wurden 153 Terme von mindestens hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen.

Kommutator ⑨:

$$\begin{aligned}
& [b_{k_1 - q_1}^\dagger b_{-k'_1 + q_1}^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}, b_{k - q}^\dagger b_{-k' + q}^\dagger b_{k'}^\dagger b_k] \\
& = 0
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 0 Summanden.

Hierbei wurden 28 Terme von mindestens hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen.

Kommutator ⑩:

$$\begin{aligned}
& [b_{k_1 - q_1}^\dagger b_{-k'_1 + q_1}^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k_1}, b_k^\dagger b_{k'} b_{-k' + q} b_{k - q}] \\
& = - \delta_{q_1, k - q + k'} \delta_{k'_1, k'} b_{k_1 - k + q - k'}^\dagger b_k^\dagger b_{-k' + q} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, k - k'} \delta_{q, k'_1 + k} b_{k_1 - k + k'}^\dagger b_k^\dagger b_{k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q_1, k - q + k'_1} b_{k_1 - k + q - k'_1}^\dagger b_k^\dagger b_{q - k'_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q, k'_1 + k'} b_{k_1 - q_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k - q_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q_1, k' + k - q} b_{k_1 - k' - k + q}^\dagger b_k^\dagger b_{-k' + q} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 b_{k_1 - q_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k - q_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{k'_1, k'} b_{k_1 - q_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k - q_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q_1, -k' + k} b_{k_1 + k' - k}^\dagger b_k^\dagger b_{k'} b_{k_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 b_{k_1 - q_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k - q_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 b_{k_1 - q_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k - q_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 b_{k_1 - q_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k - q_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2} b_{k_1 - q_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k - q_1} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, q} \delta_{k'_1, k'} b_{k_1 - q}^\dagger b_k^\dagger b_{k - q} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k' + k} \delta_{q, -k'_1 + k} b_{k_1 + k' - k}^\dagger b_k^\dagger b_{k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q_1, -k' + q + k'_1} b_{k_1 + k' - q - k'_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k - q - k'_1 + k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q_1, q} b_{k_1 - q}^\dagger b_k^\dagger b_{k - q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q, -k'_1 + k} b_{k_1 - q_1}^\dagger b_k^\dagger b_{-q_1 + k} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 b_{k_1 - q_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k - q_1} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, k' + k'_1} \delta_{q, k'_1 + k'} b_{k_1 - k' - k'_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k - k'_1 - k'} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, k' + k'_1} \delta_{q, -k'_1 + k} b_{k_1 - k' - k'_1}^\dagger b_k^\dagger b_{-k' - k'_1 + k} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q_1, k' + k'_1} b_{k_1 - k' - k'_1}^\dagger b_k^\dagger b_{k - k'_1 - k'} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k + q + k_1} \delta_{k'_1, k'} b_k^\dagger b_{-k + q + k_1 - k'}^\dagger b_{-k' + q} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k + q + k_1} \delta_{q, k'_1 + k'} b_k^\dagger b_{-k + k_1 + k'}^\dagger b_{k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q_1, -k + q + k_1} b_k^\dagger b_{-k'_1 - k + q + k_1}^\dagger b_{q - k'_1} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k + q + k_1} \delta_{q_1, k' + k'_1} b_k^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{-k' + q} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k + q + k_1} \delta_{q, k'_1 + k'} b_k^\dagger b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k + q + k_1} \delta_{q_1, k' + k'_1} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2 - k' + q - k'_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q_1 + k, \frac{b_k^\dagger b_{-k' - k}^\dagger}{q + k_1} b_{-k' + q}} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k + q + k_1} \delta_{q, k'_1 + k'} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2 + k - k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k + q + k_1} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2 + k - k_1} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, q - k' + k'_1} \delta_{k_1, -k' + k'_1 + k} b_k^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k'} b_{-k' + k'_1 + k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\delta_{q_1,q}\delta_{k_1,k}\delta_{k'_1,k'}b_k^\dagger b_k \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q_2} \delta_{q_1+k',q+k'_1} \delta_{k_1+k',k'_1+k} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k'_1} b_{-k'+k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q_2} \delta_{q_1,-k+q+k_1} \delta_{k'_1,k'} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1,-k+q+k_1} b_k^\dagger b_{k'_1-k+k_1}^\dagger b_{k'} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1,-k+q+k_1} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1,-k+q+k_1} b_k^\dagger b_{k'_1+k-k_1}^\dagger b_{k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1,q}\delta_{k_1,k} b_k^\dagger b_k \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q_1,-k+q+k_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1+k,q+k_1} b_k^\dagger b_{k'_1-k'+q_2}^\dagger b_{q_2-k'+k'_1+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q_1,-k+q+k_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2,q_3} \delta_{q_1,-k+q+k_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q_2} \delta_{q_1,k'+k'_1} \delta_{q,k'_1+k'} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1,k'+k'_1} b_k^\dagger b_{-k+q+k_1-k'}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1,k'+k'_1} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q_2} \delta_{q_1,q}\delta_{k'_1,k'} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1,-k'+q+k'_1} b_k^\dagger b_{-k+k_1+k'}^\dagger b_{k'} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1,-k'+q+k'_1} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1,q} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{k'_1-k+q+k_1-q_1}^\dagger b_{q+k'_1-q_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{k'_1,k'} b_k^\dagger b_{-k+q+k_1-k'}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q,k'_1+k'} b_k^\dagger b_{-k+k_1+k'}^\dagger b_{k'} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-k'_1-k+q+k_1}^\dagger b_{q-k'_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q,k'_1+k'} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-k'_1-k+q+k_1}^\dagger b_{q-k'_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q,k'_1+k'} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-k'_1-k+q+k_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q,k'_1+k'} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-k'_1-k+q+k_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q,k'_1+k'} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-k'_1-k+q+k_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2,q_3} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q,k'_1+k'} b_k^\dagger b_{-k'_1+q_1}^\dagger b_{k-k_1+q_1-k'_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1+k'+k,k'_1+q+k_1} b_k^\dagger b_{-k'-k}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-k'_1+q_1}^\dagger b_{k-k_1+q_1-k'_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1,-k'+q+k'_1} b_k^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k-k_1+k'_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1,-k'+q+k'_1} \delta_{k_1,k} b_k^\dagger b_k \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q_1+k',q+k'_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 b_k^\dagger b_{k'-q+q_1}^\dagger b_{k-q-k_1+q_1+k'} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q_1+k'+k, k_1+q+k_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q, k'+k_1+k-k_1} b_k^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k_1+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right) \delta_{q, k'+k_1} \delta_{k_1, k} b_k^\dagger b_k \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q, k'+k_1+k-k_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q, k_1+k'} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 b_k^\dagger b_{-k+q+k_1-k'}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 b_k^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k-k_1+k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \delta_{k_1, k} b_k^\dagger b_k \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_4} b_k^\dagger b_{q_4}^\dagger b_{q_4+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{k_1+k'}^\dagger b_{q_3+k-q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_4} b_k^\dagger b_{q_4}^\dagger b_{q_4+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q_3, q_4} b_k^\dagger b_{q_4}^\dagger b_{k-k_1+q_4} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q, k_1+k'} b_k^\dagger b_{-k_1+q_1}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 b_k^\dagger b_{-k'-k+q+k_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{-k_1+q_1}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1+k', b_{k_1+q+k_1}^\dagger} b_k^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q_1, -k'+q+k_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_3} \delta_{q_1, -k'+q+k_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{-q+q_1+q_2}^\dagger b_{q_2+k-q-k_1+q_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q_2, q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 b_k^\dagger b_{-k'-k+q+k_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q, k_1+k'} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_3} \delta_{q, k_1+k'} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{-k+q+k_1-k'}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q_2, q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{k_1-k'+q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1+k_1-k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q_2, q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q_2, q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q_2, q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{N}\right)^5 \sum_{q_2, q_3, q_4} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{k'_1, k'} b_k^\dagger b_{q_1-k'}^\dagger b_{k-k_1+q_1-k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, k'+k'_1-k+k_1} b_k^\dagger b_{k'-k+k_1}^\dagger b_{k'} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-k'_1+q_1}^\dagger b_{k-k_1+q_1-k'_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, k'+k'_1} b_k^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k-k_1+k'_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, k'+k'_1} \delta_{k_1, k} b_k^\dagger b_k \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q_1, k'+k'_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-k'+q_1}^\dagger b_{k-k_1+q_1-k'} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q_1, k'+k'_1-k+k_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{k_1, -k'+k'_1+k} b_k^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k'} b_{-k'+k'_1+k} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{k_1, k} \delta_{k'_1, k'} b_k^\dagger b_k \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{k_1+k', +k'_1+k} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3-k'_1} b_{-k'+k} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{k'_1, k'} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-k+k_1+k'}^\dagger b_{k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{k-k_1+k'_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \delta_{k_1, k} b_k^\dagger b_k \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_4} b_k^\dagger b_{q_4}^\dagger b_{q_4+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{k'_1-k'+q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1+k'_1-k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_4} b_k^\dagger b_{q_4}^\dagger b_{q_4+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_3, q_4} b_k^\dagger b_{q_4}^\dagger b_{k-k_1+q_4} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1, k'+k'_1} b_k^\dagger b_{k'_1+k'}^\dagger b_{q_2+k-q} b_{-k_1+k'+k'_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q_1, k'+k'_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2, q_3} \delta_{q_1, k'+k'_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{k'_1, k'} b_k^\dagger b_{q_1-q+q_2}^\dagger b_{q_2+k-q-k_1+q_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{k'-k+k_1}^\dagger b_{k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{-k'_1+q_1+k'}^\dagger b_{q_2+k-q-k_1} b_{+q_1-k'_1+k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{-q+q_2+q_1}^\dagger b_{q_2+k-q-k_1+q_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{k'_1, k'} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{k'-k+k_1}^\dagger b_{k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{k'_1+k'}^\dagger b_{q_2+k-q} b_{-k_1+k'_1+k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_4} b_k^\dagger b_{q_4}^\dagger b_{q_4-k_1+k} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_3, q_4} b_k^\dagger b_{q_4}^\dagger b_{k+q_4-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-q+k_1}^\dagger b_{k-q} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q, -k'_1+k} b_k^\dagger b_{-k'_1+q_1}^\dagger b_{q_2-k'-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{-k'_1+q_1}^\dagger b_{k-k'_1+q_2} b_{-k'-k_1+q_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-q+k_1}^\dagger b_{k-q} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q, -k'_1+k} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3-k_1+k} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k+q_3-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{-q+k_1}^\dagger b_{k-q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2, q_3} \delta_{q, -k'_1+k} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{-k_1+q_3+k} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1+q, k+k'_1} b_k^\dagger b_{k'_1-k'+q_2}^\dagger b_{q_2-k'-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q_1, k-q+k'_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3-k_1+k} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2, q_3} \delta_{q_1, k-q+k'_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{-k_1+q_3+k} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k+q_3-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{-k+q+q_1}^\dagger b_{q_2-k'+q} b_{-k_1+q_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{k'_1-k'+q_2}^\dagger b_{k+k'_1+q_2} b_{k+k'_1-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{k'_1-k'+q_2}^\dagger b_{k+k'_1+q_2} b_{k+k'_1-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k+q_3-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_3} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{-k_1+q_3+k} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^5 \sum_{q_2, q_3, q_4} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k-k_1+q_3} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k'+k_1} \delta_{q, k'_1+k} b_k^\dagger b_{-k'_1-k'+k_1}^\dagger b_{k-k'_1-k'} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k'+k_1} \delta_{q, -k'_1+k} b_k^\dagger b_{-k'_1-k'+k_1}^\dagger b_{-k'-k'_1+k} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, -k'+k_1} b_k^\dagger b_{-k'_1-k'+k_1}^\dagger b_{k-k'_1-k'} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k'+k_1} \delta_{q, k_1-k'_1} b_k^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k-k_1+k'_1} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k'+k} \delta_{q, k-k'_1} \delta_{k_1, k} b_k^\dagger b_k \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k'+k_1} \delta_{q, k_1-k'_1} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, -k'+k_1} b_k^\dagger b_{-q+k_1}^\dagger b_{k-q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k'+k_1} \delta_{q, -k'_1+k} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2-k_1+k} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k'+k_1} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{k+q_2-k_1} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k'+k_1} \delta_{q_1, k-q+k'_1} b_k^\dagger b_{k'_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& - \delta_{q_1, -k'+k} \delta_{k_1, k} \delta_{q, k'_1+k} b_k^\dagger b_k \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k'+k_1} \delta_{q_1+q, k+k'_1} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2-k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k'+k_1} \delta_{q, k'_1+k} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, -k'+k_1} b_k^\dagger b_{-k+q-k'+k_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k'+k_1} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2+k-k_1} b_{k_1} & + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{k+q_2-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, -k'+k_1} b_k^\dagger b_{k_1}^\dagger b_{k+k_1-k_1} b_{k_1} & + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, k-q+k_1} b_k^\dagger b_{-k'+k_1-k+q}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, -k'+k} \delta_{k_1, k} b_k^\dagger b_k & + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q_2} \delta_{q_1, k-k'} \delta_{q, k_1+k'} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2-k_1+k} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q_1, -k'+k_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} & - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1, k-q+k_1} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2-k_1+k} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k'+k_1} b_k^\dagger b_{k_1+k'}^\dagger b_{-q+q_2+k_1+k'} b_{k_1} & - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q, k_1+k'} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{k+q_2-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3} \delta_{q_1, -k'+k_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{q_3+k-k_1} b_{k_1} & - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-k+q-k'+k_1}^\dagger b_{-k'+q} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2, q_3} \delta_{q_1, -k'+k_1} b_k^\dagger b_{q_3}^\dagger b_{k+q_3-k_1} b_{k_1} & + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{k+q_2-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q, k_1+k'} b_k^\dagger b_{-k_1-k'+k_1}^\dagger b_{k-k_1-k'} b_{k_1} & - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{k_1-k'+k_1-q_1}^\dagger b_{k+k_1-q_1-k'} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q, -k_1+k} b_k^\dagger b_{-k_1-k'+k_1}^\dagger b_{-k'-k_1+k} b_{k_1} & - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k'+k} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2-k_1+k} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-k_1-k'+k_1}^\dagger b_{k-k_1-k'} b_{k_1} & + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{k+q_2-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \delta_{q_1, -k'+q+k_1} b_k^\dagger b_{k_1-q}^\dagger b_{k-q} b_{k_1} & + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{k+q_2-k_1} b_{k_1} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right) \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k'+k} \delta_{q, -k_1+k} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2-k_1+k} b_{k_1} & + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2-k_1+k} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q_1, -k'+q+k_1} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{k+q_2-k_1} b_{k_1} & - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_3} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{k+q_2-k_1} b_{k_1} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 b_k^\dagger b_{-q+k_1}^\dagger b_{k-q} b_{k_1} & \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2} \delta_{q, -k_1+k} b_k^\dagger b_{q_2}^\dagger b_{q_2-k_1+k} b_{k_1} &
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 315 Summanden.

Ferner wurden 1297 Terme von mindestens hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen.

4.2. Ortsraum

Kommutator ①:

$$\begin{aligned}
& [b_i^\dagger b_j^\dagger, b_a^\dagger b_b] \\
= & -\delta_{b,j} b_i^\dagger b_a^\dagger \\
& + 2\delta_{b,j} b_i^\dagger b_a^\dagger b_j^\dagger b_j \\
& - \delta_{b,i} b_a^\dagger b_j^\dagger \\
& + 2\delta_{b,i} b_a^\dagger b_i^\dagger b_j^\dagger b_i \\
& + 2\delta_{b,i} \delta_{i,j} b_a^\dagger b_i^\dagger
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 5 Summanden.

Hierbei wurde 1 Term gelöscht, weil er mehrere Anregungen an einem Platz erzeugt.

Kommutator ②:

$$\begin{aligned}
& [b_i^\dagger b_j^\dagger, b_b b_a] \\
= & -\delta_{a,j} b_i^\dagger b_b \\
& + 2\delta_{a,j} b_i^\dagger b_j^\dagger b_b b_j \\
& + 2\delta_{a,j} \delta_{b,j} b_i^\dagger b_j \\
& - 4\delta_{a,j} \delta_{b,j} b_i^\dagger b_j^\dagger b_j b_j \\
& - \delta_{b,j} b_i^\dagger b_a \\
& + 2\delta_{b,j} b_i^\dagger b_j^\dagger b_j b_a \\
& - \delta_{a,i} b_j^\dagger b_b \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{b,j} b_j^\dagger b_j \\
& + 2\delta_{a,i} b_i^\dagger b_j^\dagger b_b b_i \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{b,j} b_i^\dagger b_i \\
& - 4\delta_{a,i} \delta_{b,j} b_i^\dagger b_j^\dagger b_j b_i \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{i,j} b_i^\dagger b_b \\
& - 4\delta_{a,i} \delta_{i,j} \delta_{b,i} b_i^\dagger b_i \\
& + 8\delta_{a,i} \delta_{i,j} \delta_{b,i} b_i^\dagger b_i^\dagger b_i b_i \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{b,i} b_j^\dagger b_i \\
& - 4\delta_{a,i} \delta_{b,i} \delta_{i,j} b_i^\dagger b_i \\
& - 4\delta_{a,i} \delta_{b,i} b_i^\dagger b_j^\dagger b_i b_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4\delta_{a,i} \delta_{b,i} \delta_{i,j} b_i^\dagger b_i \\
& - 4\delta_{a,i} \delta_{b,i} \delta_{i,j} b_i^\dagger b_i \\
& + 8\delta_{a,i} \delta_{b,i} \delta_{i,j} b_i^\dagger b_i^\dagger b_i b_i \\
& + 8\delta_{a,i} \delta_{b,i} \delta_{i,j} \delta_{0,0} b_i^\dagger b_i \\
& - \delta_{b,i} b_j^\dagger b_a \\
& + 2\delta_{b,i} \delta_{a,j} b_j^\dagger b_j \\
& + 2\delta_{b,i} b_i^\dagger b_j^\dagger b_i b_a \\
& + 2\delta_{b,i} \delta_{i,j} b_i^\dagger b_a \\
& + 2\delta_{b,i} \delta_{a,j} b_i^\dagger b_i \\
& - 4\delta_{b,i} \delta_{a,j} b_i^\dagger b_j^\dagger b_i b_j \\
& - 4\delta_{b,i} \delta_{a,i} \delta_{i,j} b_i^\dagger b_i
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 28 Summanden.

Ferner wurden 3 konstante Terme (Operator $\hat{1}$) ausgelassen.

Darüber hinaus wurden 5 Terme gelöscht, weil sie mehrere Anregungen an einem Platz erzeugen.

Kommutator ③:

$$\begin{aligned}
& [b_i^\dagger b_j^\dagger, b_a^\dagger b_b^\dagger b_c b_d] \\
= & -\delta_{d,j} b_i^\dagger b_a^\dagger b_b^\dagger b_c \\
& + 2\delta_{d,j} \delta_{j,c} b_i^\dagger b_a^\dagger b_b^\dagger b_j \\
& - \delta_{c,j} b_i^\dagger b_a^\dagger b_b^\dagger b_d \\
& - \delta_{d,i} b_a^\dagger b_b^\dagger b_j^\dagger b_c \\
& - \delta_{d,i} \delta_{c,j} b_a^\dagger b_b^\dagger \\
& + 2\delta_{d,i} \delta_{c,j} b_a^\dagger b_b^\dagger b_j^\dagger b_j \\
& + 2\delta_{d,i} \delta_{c,j} b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& + 2\delta_{d,i} \delta_{i,j} b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_c \\
& - 4\delta_{d,i} \delta_{i,j} \delta_{i,c} b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& + 2\delta_{d,i} \delta_{i,c} b_a^\dagger b_b^\dagger b_j^\dagger b_i \\
& + 2\delta_{d,i} \delta_{i,c} \delta_{i,j} b_a^\dagger b_b^\dagger \\
& - 4\delta_{d,i} \delta_{i,c} \delta_{i,j} b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4\delta_{d,i}\delta_{i,c}\delta_{i,j}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& -4\delta_{d,i}\delta_{i,c}\delta_{i,j}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& +8\delta_{d,i}\delta_{i,c}\delta_{i,j}\delta_{0,0}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& -\delta_{c,i}b_a^\dagger b_b^\dagger b_j^\dagger b_d \\
& -\delta_{c,i}\delta_{d,j}b_a^\dagger b_b^\dagger \\
& +2\delta_{c,i}\delta_{d,j}b_a^\dagger b_b^\dagger b_j^\dagger b_j \\
& +2\delta_{c,i}\delta_{i,j}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_d \\
& +2\delta_{c,i}\delta_{d,j}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& -4\delta_{c,i}\delta_{d,i}\delta_{j,i}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& +2\delta_{b,i}\delta_{a,j}b_d^\dagger b_c^\dagger b_j^\dagger b_j \\
& +2\delta_{b,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_a \\
& +2\delta_{b,i}\delta_{a,j}b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& -4\delta_{b,i}\delta_{a,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_i
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 21 Summanden.

Ferner wurden 15 Terme von mindestens hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen.

Kommutator ④:

$$\begin{aligned}
& [b_i^\dagger b_j^\dagger, b_d^\dagger b_c^\dagger b_b b_a] \\
= & -\delta_{a,j}b_i^\dagger b_d^\dagger b_c^\dagger b_b \\
& +2\delta_{a,j}\delta_{b,j}b_i^\dagger b_d^\dagger b_c^\dagger b_j \\
& -\delta_{b,j}b_i^\dagger b_d^\dagger b_c^\dagger b_a \\
& -\delta_{a,i}b_d^\dagger b_c^\dagger b_j^\dagger b_b \\
& -\delta_{a,i}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_c^\dagger \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_c^\dagger b_j^\dagger b_j \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_b \\
& -4\delta_{a,i}\delta_{i,j}\delta_{b,i}b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{b,i}b_d^\dagger b_c^\dagger b_j^\dagger b_i \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_c^\dagger \\
& -4\delta_{a,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& -4\delta_{a,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& -4\delta_{a,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& +8\delta_{a,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}\delta_{0,0}b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_i \\
& -\delta_{b,i}b_d^\dagger b_c^\dagger b_j^\dagger b_a \\
& -\delta_{b,i}\delta_{a,j}b_d^\dagger b_c^\dagger
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 21 Summanden.

Ferner wurden 15 Terme von mindestens hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen.

Kommutator ⑤:

$$\begin{aligned}
& [b_i^\dagger b_j^\dagger, b_d^\dagger b_c b_b b_a] \\
= & -\delta_{a,j}b_i^\dagger b_d^\dagger b_c b_b \\
& +2\delta_{a,j}\delta_{c,j}b_i^\dagger b_d^\dagger b_b b_j \\
& +2\delta_{a,j}\delta_{b,j}b_i^\dagger b_d^\dagger b_c b_j \\
& -4\delta_{a,j}\delta_{b,j}\delta_{c,j}b_i^\dagger b_d^\dagger b_j b_j \\
& -\delta_{b,j}b_i^\dagger b_d^\dagger b_c b_a \\
& +2\delta_{b,j}\delta_{c,j}b_i^\dagger b_d^\dagger b_j b_a \\
& -\delta_{c,j}b_i^\dagger b_d^\dagger b_b b_a \\
& -\delta_{a,i}b_d^\dagger b_j^\dagger b_c b_b \\
& -\delta_{a,i}\delta_{c,j}b_d^\dagger b_b \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{c,j}b_d^\dagger b_j^\dagger b_j b_b \\
& -\delta_{a,i}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_c \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_j^\dagger b_c b_j \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{b,j}\delta_{c,j}b_d^\dagger b_j \\
& -4\delta_{a,i}\delta_{b,j}\delta_{c,j}b_d^\dagger b_j^\dagger b_j b_j \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{c,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_b b_i \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_c b_i \\
& -4\delta_{a,i}\delta_{b,j}\delta_{c,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_j b_i \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_c b_b \\
& -4\delta_{a,i}\delta_{i,j}\delta_{c,i}b_d^\dagger b_i^\dagger b_b b_i \\
& -4\delta_{a,i}\delta_{i,j}\delta_{b,i}b_d^\dagger b_i^\dagger b_c b_i \\
& -4\delta_{a,i}\delta_{i,j}\delta_{b,i}b_d^\dagger b_i^\dagger b_c b_i \\
& +8\delta_{a,i}\delta_{i,j}\delta_{b,i}\delta_{0,0}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_i \\
& +8\delta_{a,i}\delta_{i,j}\delta_{b,i}\delta_{c,i}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_i \\
& +2\delta_{a,i}\delta_{c,i}b_d^\dagger b_j^\dagger b_b b_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8\delta_{b,i}\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_i \\
& + 8\delta_{b,i}\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_i \\
& - 16\delta_{b,i}\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{i,j}\delta_{0,0}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_i \\
& - \delta_{c,i}b_d^\dagger b_j^\dagger b_b b_a \\
& - \delta_{c,i}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_a \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_j^\dagger b_j b_a \\
& - \delta_{c,i}\delta_{a,j}b_d^\dagger b_b \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{a,j}b_d^\dagger b_j^\dagger b_b b_j \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{a,j}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_j \\
& - 4\delta_{c,i}\delta_{a,j}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_j^\dagger b_j b_j \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_b b_a \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_a \\
& - 4\delta_{c,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_a \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{a,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_b \\
& - 4\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_b b_i \\
& - 4\delta_{c,i}\delta_{a,j}\delta_{b,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_j \\
& + 8\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_i
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 105 Summanden.

Ferner wurden 63 Terme von mindestens hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen.

Kommutator ⑥:

$$\begin{aligned}
& [b_a^\dagger b_b^\dagger b_c^\dagger b_d, b_i^\dagger b_j] \\
= & \delta_{d,i}b_a^\dagger b_b^\dagger b_c^\dagger b_j \\
& - \delta_{c,j}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_d \\
& - \delta_{b,j}b_a^\dagger b_i^\dagger b_c^\dagger b_d \\
& + 2\delta_{b,j}\delta_{c,j}b_a^\dagger b_i^\dagger b_j^\dagger b_d \\
& - \delta_{a,j}b_i^\dagger b_b^\dagger b_c^\dagger b_d \\
& + 2\delta_{a,j}\delta_{c,j}b_i^\dagger b_j^\dagger b_b^\dagger b_d \\
& + 2\delta_{a,j}\delta_{b,j}b_i^\dagger b_j^\dagger b_c^\dagger b_d
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 7 Summanden.

Ferner wurden 8 Terme von mindestens

hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen. Darüber hinaus wurde 1 Term gelöscht, weil er mehrere Anregungen an einem Platz erzeugt.

Kommutator ⑦:

$$\begin{aligned}
& [b_i^\dagger b_j^\dagger b_m^\dagger b_n, b_a^\dagger b_b^\dagger b_c b_d] \\
= & - \delta_{d,j}\delta_{c,m}b_i^\dagger b_a^\dagger b_b^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{d,j}\delta_{j,c}\delta_{j,m}b_i^\dagger b_a^\dagger b_b^\dagger b_n \\
& - \delta_{c,j}\delta_{d,m}b_i^\dagger b_a^\dagger b_b^\dagger b_n \\
& - \delta_{d,i}\delta_{c,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_j^\dagger b_n \\
& - \delta_{d,i}\delta_{c,j}b_a^\dagger b_b^\dagger b_m^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{d,i}\delta_{c,j}\delta_{j,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_j^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{d,i}\delta_{c,j}\delta_{i,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{d,i}\delta_{i,j}\delta_{c,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& - 4\delta_{d,i}\delta_{i,j}\delta_{i,c}\delta_{i,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{d,i}\delta_{i,c}\delta_{i,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_j^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{d,i}\delta_{i,c}\delta_{i,j}b_a^\dagger b_b^\dagger b_m^\dagger b_n \\
& - 4\delta_{d,i}\delta_{i,c}\delta_{i,j}\delta_{i,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& - 4\delta_{d,i}\delta_{i,c}\delta_{i,j}\delta_{i,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& - 4\delta_{d,i}\delta_{i,c}\delta_{i,j}\delta_{i,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& + 8\delta_{d,i}\delta_{i,c}\delta_{i,j}\delta_{0,0}\delta_{i,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& - \delta_{c,i}\delta_{d,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_j^\dagger b_n \\
& - \delta_{c,i}\delta_{d,j}b_a^\dagger b_b^\dagger b_m^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{d,j}\delta_{j,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_j^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{i,j}\delta_{d,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{d,j}\delta_{i,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& - 4\delta_{c,i}\delta_{d,i}\delta_{j,i}\delta_{i,m}b_a^\dagger b_b^\dagger b_i^\dagger b_n
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 21 Summanden.

Ferner wurden 153 Terme von mindestens hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen.

Kommutator ⑧:

$$\begin{aligned}
& [b_i^\dagger b_j^\dagger b_m^\dagger b_n, b_d^\dagger b_c^\dagger b_b b_a] \\
= & -\delta_{a,j} \delta_{b,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_c^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{a,j} \delta_{b,j} \delta_{j,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_c^\dagger b_n \\
& - \delta_{b,j} \delta_{a,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_c^\dagger b_n \\
& - \delta_{a,i} \delta_{b,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_j^\dagger b_n \\
& - \delta_{a,i} \delta_{b,j} b_d^\dagger b_c^\dagger b_m^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{b,j} \delta_{j,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_j^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{b,j} \delta_{i,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{i,j} \delta_{b,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& - 4\delta_{a,i} \delta_{i,j} \delta_{b,i} \delta_{i,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{b,i} \delta_{i,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_j^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{b,i} \delta_{i,j} b_d^\dagger b_c^\dagger b_m^\dagger b_n \\
& - 4\delta_{a,i} \delta_{b,i} \delta_{i,j} \delta_{i,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& - 4\delta_{a,i} \delta_{b,i} \delta_{i,j} \delta_{i,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& - 4\delta_{a,i} \delta_{b,i} \delta_{i,j} \delta_{i,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& + 8\delta_{a,i} \delta_{b,i} \delta_{i,j} \delta_{0,0} \delta_{i,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& - \delta_{b,i} \delta_{a,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_j^\dagger b_n \\
& - \delta_{b,i} \delta_{a,j} b_d^\dagger b_c^\dagger b_m^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{b,i} \delta_{a,j} \delta_{j,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_j^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{b,i} \delta_{i,j} \delta_{a,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{b,i} \delta_{a,j} \delta_{i,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_n \\
& - 4\delta_{b,i} \delta_{a,i} \delta_{i,j} \delta_{i,m} b_d^\dagger b_c^\dagger b_i^\dagger b_n
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 21 Summanden.

Ferner wurden 153 Terme von mindestens hexatischer Ordnung (bbbbbb) ausgelassen.

Kommutator ⑨:

$$\begin{aligned}
& [b_i^\dagger b_j^\dagger b_m^\dagger b_n, b_a^\dagger b_b^\dagger b_c^\dagger b_d] \\
= & 0
\end{aligned}$$

Kommutator ⑩:

$$\begin{aligned}
& [b_i^\dagger b_j^\dagger b_m^\dagger b_n, b_d^\dagger b_c b_b b_a] \\
= & -\delta_{a,j} \delta_{c,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_b b_n \\
& - \delta_{a,j} \delta_{b,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_c b_n \\
& + 2\delta_{a,j} \delta_{b,m} \delta_{c,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_m b_n \\
& + 2\delta_{a,j} \delta_{c,j} \delta_{b,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_j b_n \\
& + 2\delta_{a,j} \delta_{c,j} \delta_{j,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_b b_n \\
& - 4\delta_{a,j} \delta_{c,j} \delta_{j,m} \delta_{b,j} b_i^\dagger b_d^\dagger b_j b_n \\
& + 2\delta_{a,j} \delta_{b,j} \delta_{c,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_j b_n \\
& + 2\delta_{a,j} \delta_{b,j} \delta_{j,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_c b_n \\
& - 4\delta_{a,j} \delta_{b,j} \delta_{j,m} \delta_{c,j} b_i^\dagger b_d^\dagger b_j b_n \\
& - 4\delta_{a,j} \delta_{b,j} \delta_{c,j} \delta_{j,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_j b_n \\
& - 4\delta_{a,j} \delta_{b,j} \delta_{c,j} \delta_{j,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_j b_n \\
& + 8\delta_{a,j} \delta_{b,j} \delta_{c,j} \delta_{j,m} \delta_{0,0} b_i^\dagger b_d^\dagger b_j b_n \\
& - \delta_{b,j} \delta_{c,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_a b_n \\
& - \delta_{b,j} \delta_{a,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_c b_n \\
& + 2\delta_{b,j} \delta_{a,m} \delta_{c,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_m b_n \\
& + 2\delta_{b,j} \delta_{c,j} \delta_{j,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_a b_n \\
& + 2\delta_{b,j} \delta_{c,j} \delta_{a,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_j b_n \\
& - 4\delta_{b,j} \delta_{c,j} \delta_{a,j} \delta_{j,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_j b_n \\
& - \delta_{c,j} \delta_{b,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_a b_n \\
& - \delta_{c,j} \delta_{a,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_b b_n \\
& + 2\delta_{c,j} \delta_{a,m} \delta_{b,m} b_i^\dagger b_d^\dagger b_m b_n \\
& - \delta_{a,i} \delta_{c,m} b_d^\dagger b_j^\dagger b_b b_n \\
& - \delta_{a,i} \delta_{b,m} b_d^\dagger b_j^\dagger b_c b_n \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{b,m} \delta_{c,m} b_d^\dagger b_j^\dagger b_m b_n \\
& - \delta_{a,i} \delta_{c,j} b_d^\dagger b_m^\dagger b_b b_n \\
& - \delta_{a,i} \delta_{c,j} \delta_{b,m} b_d^\dagger b_n \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{c,j} \delta_{b,m} b_d^\dagger b_m^\dagger b_m b_n \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{c,j} \delta_{j,m} b_d^\dagger b_j^\dagger b_b b_n \\
& + 2\delta_{a,i} \delta_{c,j} \delta_{b,m} b_d^\dagger b_j^\dagger b_j b_n \\
& - 4\delta_{a,i} \delta_{c,j} \delta_{b,j} \delta_{j,m} b_d^\dagger b_j^\dagger b_j b_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\delta_{c,i}\delta_{i,j}\delta_{b,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_a b_n & - 4\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{i,j}\delta_{b,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{i,j}\delta_{a,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_b b_n & - 4\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{i,j}\delta_{i,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_b b_n \\
& - 4\delta_{c,i}\delta_{i,j}\delta_{a,m}\delta_{b,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_m b_n & + 8\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{i,j}\delta_{i,m}\delta_{b,i}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{b,j}\delta_{i,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_a b_n & - 4\delta_{c,i}\delta_{a,j}\delta_{b,j}\delta_{i,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_j b_n \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{b,j}\delta_{a,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n & - 4\delta_{c,i}\delta_{a,j}\delta_{b,j}\delta_{j,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n \\
& - 4\delta_{c,i}\delta_{b,j}\delta_{a,i}\delta_{i,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n & + 8\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{b,i}\delta_{i,m}\delta_{i,j}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n \\
& - 4\delta_{c,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}\delta_{i,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_a b_n & + 8\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}\delta_{i,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n \\
& - 4\delta_{c,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}\delta_{a,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n & + 8\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}\delta_{i,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n \\
& + 8\delta_{c,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}\delta_{a,i}\delta_{i,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n & - 16\delta_{c,i}\delta_{a,i}\delta_{b,i}\delta_{i,j}\delta_{i,m}\delta_{0,0}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{a,j}\delta_{i,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_b b_n & \\
& + 2\delta_{c,i}\delta_{a,j}\delta_{b,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n & \\
& - 4\delta_{c,i}\delta_{a,j}\delta_{b,i}\delta_{i,m}b_d^\dagger b_i^\dagger b_i b_n &
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt 315 Summanden.

Ferner wurden 1297 Terme von mindestens hexatischer Ordnung ($bbbbbb$) ausgelassen.

E. Flussgleichungen der KUT für Hardcore-Bosonen

Hier finden sich die ausgeschriebenen Flussgleichungen, die durch Einsetzen der Kommutatoren aus Anhang D in die Flussgleichung (3.2.48) im Impulsraum beziehungsweise (3.2.49) im Ortsraum bestimmt worden sind.

Diese Gleichungen lassen sich durch geschickte Klammersetzung und Umbenennung der Indizes weiter vereinfachen. Hier soll jedoch die Form der Flussgleichungen dargestellt werden, welche das für diese Arbeit entwickelte Programm zur Integration der Flussgleichungen erzeugt hat.

5.1. Impulsraum

$$\begin{aligned}
\partial_t A_k = & -4B_k B_k \\
& + 2\frac{2}{N} \sum_{k'} B_k B_{k'} \\
& + 4\frac{2}{N} \sum_{k_1} B_{k_1} B_{k_1} \\
& + 2\frac{2}{N} \sum_{k'_1} B_{k'_1} B_k \\
& - 2\left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k_1, k'} B_{k_1} B_{k'} \\
& - 2\left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k_2, k'} B_{k_2} B_{k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1, k'} B_{k'+k'_1-k} B_{k'} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{k'_1, k_2, k'} B_{k_2} B_{k'} \\
& - 4 \sum_{k'} B_{k'} D_{k, k', k+k'} \\
& - 2 \sum_q B_{-q+k} D_{k, k, q} \\
& + 2\frac{2}{N} \sum_{k', q} B_{-q+k} D_{k, k', q} \\
& + 2\frac{2}{N} \sum_{k', q} B_{-q+k'} D_{k, k', q} \\
& + 2\frac{2}{N} \sum_{k', k_1} B_{k_1} D_{k, k', k'+k} \\
& - 10\left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k', q, k_1} B_{k_1} D_{k, k', q} \\
& + 4\frac{2}{N} \sum_{k', q} B_{k'} D_{k, k', q} \\
& + 2\frac{2}{N} \sum_{q, k_1} B_{k_1} D_{k, k, q} \\
& + 2\left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q', k', q, k_1} B_{k_1} D_{k, k', q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4 \sum_{k'} B_{k'} D_{k,k',0} & + \frac{2}{N} \sum_{k',q,k'_1} D_{k,k'_1,k'+k'_1} D_{k,k',q} \\
& -2 \sum_q B_{q-k} D_{k,k,q} & + \frac{2}{N} \sum_{k',q,q_1} D_{k,k',q_1} D_{k,k',q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{k',q} B_{q-k'} D_{k,k',q} & + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2,k',q,k'_1,q_1} D_{k,k'_1,q_1} D_{k,k',q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{k',k_1} B_{k_1} D_{k,k',0} & - \sum_{k',q} D_{k,-q+k,k'-q+k} D_{k,k',q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{k',q} B_{q-k} D_{k,k',q} & - \sum_{k',q} D_{k,k',-q+k+k'} D_{k,k',q} \\
& - \sum_{k',q} D_{k,q-k',q} D_{k,k',q} & + \frac{2}{N} \sum_{k',q,k'_1} D_{k,k'_1,k'-q+k} D_{k,k',q} \\
& - \sum_{k',q} D_{k,k',q} D_{k,k',q} & + \frac{2}{N} \sum_{k',q,q_1} D_{k,-q+k,q_1} D_{k,k',q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{k',q,k'_1} D_{k,k'_1,q} D_{k,k',q} & + \frac{2}{N} \sum_{k',q,k'_1} D_{k,k'_1,k-q+k'_1} D_{k,k',q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{k',q,k'_1} D_{k,k'_1,-k'+q+k'_1} D_{k,k',q} & - \sum_{k',q} D_{k,-q+k,-k'+k} D_{k,k',q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{k',q,q_1} D_{k,q-k',q_1} D_{k,k',q} & - \sum_{k',q} D_{k,q-k',-k'+k} D_{k,k',q} \\
& - 5 \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k',q,k'_1,q_1} D_{k,k'_1,q_1} D_{k,k',q} & + \frac{2}{N} \sum_{k',q,k'_1} D_{k,k'_1,-k'+k} D_{k,k',q}
\end{aligned}$$

$$\partial_l B_k = -2B_k A_k$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{N} \sum_{k'_1} B_{k'_1} A_k \\
& - \sum_q B_{q+k} C_{q+k,-q-k,q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q,k_1} B_{k_1} C_{q+k,-q-k,q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_q B_{-q-k} C_{q+k,-q-k,q} \\
& - \sum_q B_{-q+k} C_{k,-k,q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q,k_1} B_{k_1} C_{k,-k,q} \\
& - \sum_q B_{q-k} C_{k,-k,q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_l C_{k,k',q} & = + \frac{2}{N} B_{k-q} B_{k'} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{k'_1} B_{k-q} B_{-k'_1+q} \\
& + \frac{2}{N} B_{k-q} B_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{N} B_{-k'-q} B_{k'} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k_2} B_{k_2-q} B_{k_2} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k_2} B_{k_2} B_{k'} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{k_1, k_3} B_{k_3} B_{-k_1+q} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k'_1} B_{-k'-q} B_{-k'_1-k'+k-q} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{k'_1, k_3} B_{k'_1-k+k_3} B_{k_3} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{k'_1, k_3} B_{k_3} B_{-k'_1+k-k'-q} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{k'_1, k_2, k_4} B_{k_4} B_{-k_2-k'_1+k} \\
& + \frac{2}{N} B_{-k'-q} B_k \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k_2} B_{k_2} B_k \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k_2} B_{k-k_2-k'-q} B_{k_2} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{k_1, k_3} B_{-k_1+k-k_3} B_{k_3} \\
& - 2B_{k-q} D_{k'+q, k', k+k'} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q'} B_{k-q} D_{k'+q, -k'+q', q'} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q'} B_{k-q} D_{k'+q, k', q'} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_1} B_{k-q} D_{k'+q, q_1, q'+k'} \\
& - 2B_{k-q} D_{k'+q, k', k'-k+q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q'} B_{k-q} D_{k'+q, q', -k+k'+q} \\
& - 2B_{k-q} D_{k'+q, -k+q, -k+k'+q} \\
& - 2B_{-k'-q} D_{k-q, k', k+k'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q_2} B_{k-q_2-q} D_{k-q, -k+q_2, q_2} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{k-q_1-q} D_{k-q, k', q_1} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_2} B_{k-q_2-q} D_{k-q, q'-q, q_2} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{k'-q_1} D_{k-q, -k'+q_1, q_1} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{k'-q_1} D_{k-q, k', q_1} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_1, q_2} B_{k'-q_2} D_{k-q, q_1, q_2} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{k_1} B_{k_1} D_{k-q, k', k+k'} \\
& - 4 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_1, k_1} B_{k_1} D_{k-q, -k'+q_1, q_1} \\
& - 4 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_1, k_1} B_{k_1} D_{k-q, k', q_1} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_1, q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q_2, q_1+k'} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q'} B_{-k'-q} D_{k-q, -k'+q', q'} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, k_1+q_2+q, q_2} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, -k'+q_2, q_2} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_1, q_3, k_1} B_{k_1} D_{k-q, -q_1+q_3+q, q_3} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_1} B_{q'-q_1-q} D_{k-q, -k'+q_1, q_1} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_2} B_{q'-q_2-q} D_{k-q, q'-q, q_2} \\
& + 4 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_2, q_3} B_{q'-q_3-q} D_{k-q, q_2, q_3} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k_1} B_{k_1} D_{k-q, -k+q_3, q_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, -k'+q_2, q_2} \\
& + 4 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q'-q, q_2} \\
& - 4 \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q', q_2, q_3, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q_3, q_2+q'-q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q'} B_{-k'-q} D_{k-q, k', q'} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, -k_1-q, q_2} \\
& - 4 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, k', q_2} \\
& + 4 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_1, q_3, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q_1-q, q_3} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_2} B_{q'-q_2-q} D_{k-q, -q'+q_2+q, q_2} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_1} B_{q'-q_1-q} D_{k-q, k', q_1} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, -q'+q_2+q, q_2} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, k', q_2} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_1} B_{-k'-q} D_{k-q, q_1, q'+k'} \\
& + 4 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_3, q_4} B_{q'-q_4-q} D_{k-q, q_3, q_4} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_3, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q_3, q'+k'} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q', q_2, q_4, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q_4, q'+q_2-q} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_1, q_2} B_{q'-q_2-q} D_{k-q, q_1-q'-k'+q_2, q_2} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q', q_1, q_3, q_4} B_{q'-q_4-q} D_{k-q, q_3, q_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q', q_1, q_3, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q_1 - q' - k' + q_3, q_3} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q', q_1, q_3, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q_1 - q, q_3} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^5 \sum_{q', q_1, q_3, q_4, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q_4, q' + q_3 - q} \\
& - 2 B_{-k' - q} D_{k-q, k', -q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{-q_1 - q} D_{k-q, q_1, -q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{-k' + q_1} D_{k-q, k', q_1} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_2} B_{-q' + q_2 + q} D_{k-q, q' - q, q_2} \\
& + 4 \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{q_1} D_{k-q, q_1, -q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{k_1} B_{k_1} D_{k-q, k', -q} \\
& - 4 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_1, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q_1, -q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{-k + q_1 + q} D_{k-q, k', q_1} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_1, k_1} B_{k_1} D_{k-q, -k_1 + q_1 + q, q_1} \\
& + 4 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_1, q_2, q_3} B_{-q_1 + q_3 + q} D_{k-q, q_2, q_3} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q'} B_{-k' - q} D_{k-q, q', -q} \\
& - 4 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q_2, -q} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, q_3} B_{-k' + q_3} D_{k-q, q_2, q_3} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_1, q_3, q_4} B_{-q_1 + q_4 + q} D_{k-q, q_3, q_4} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', k_1} B_{k_1} D_{k-q, q' - k_1 - k' - q, -q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q_2, -q} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_2} B_{-k+q_2+q} D_{k-q, q'-q, q_2} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_2, k_1} B_{k_1} D_{k-q, q'-k_1-k'+q_2, q_2} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q', q_2, q_3, q_4} B_{-q_2+q_4+q} D_{k-q, q_3, q_4} \\
& - 2 B_{-k'-q} D_{k-q, -k'-q, -q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{-k'+q_1} D_{k-q, -k'+q_1, q_1} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_2} B_{-q'+q_2+q} D_{k-q, -q'+q_2+q, q_2} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{k_1} B_{k_1} D_{k-q, -k'-q, -q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{q_1+q} D_{k-q, q_1, -q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q_2} B_{-k+q_2+q} D_{k-q, -k+q_2, q_2} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_1, k_1} B_{k_1} D_{k-q, k_1-q, q_1} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, -k'+q_1, q} D_{k'+q, -k'+q_1, q_1} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, -k'+q_1, q} D_{k'+q, k', q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, q_2} D_{k, -k'+q_2, q} D_{k'+q, q_1, q_2} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_4} D_{k, -q_3+q_4, q} D_{k'+q, q_3, q_4} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, q} D_{k'+q, -k'+q_1, q_1} \\
& - 5 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, q_4, k'_1} D_{k, k'_1, q} D_{k'+q, q_3, q_4} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_4} D_{k, q_3, q} D_{k'+q, q_3, q_4} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, q} D_{k'+q, k', q_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2, q_4, q_5, k'_1} D_{k, k'_1, q} D_{k'+q, q_4, q_5} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, q_1, q} D_{k'+q, q_1, q} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k'-q_1+q, q} D_{k'+q, k', q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, q} D_{k'+q, k'_1+q_1-q, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, q} D_{k'+q, q_1, q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_4} D_{k, k'-q_4+q, q} D_{k'+q, q_3, q_4} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, -q_1+q, q} D_{k'+q, q_1, q} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k'-q_1+q, q} D_{k'+q, -k'+q_1, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, q} D_{k'+q, -k'_1+q, q_1} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, -k'+q_1, q_1+q} D_{k-q, -k'+q_1, q_1} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, -k'+q_1, q_1+q} D_{k-q, k', q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, q_2} D_{k, -k'+q_2, q_2+q} D_{k-q, q_1, q_2} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k'+q, q_1+q} D_{k-q, -k'+q_1, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, -q_4+q_5+q, q_5+q} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, q_1+q} D_{k-q, -k'+q_1, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, -q_4+q_5, q_5+q} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_4, q_5, k'_1} D_{k, k'_1, q_5+q} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k'+q, q_1+q} D_{k-q, k', q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, q_4+q, q_5+q} D_{k-q, q_4, q_5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, q_4, q_5 + q} D_{k - q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, q_1 + q} D_{k - q, k', q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, q_2} D_{k, k' + q, q_2 + q} D_{k - q, q_1, q_2} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, q_6 + q} D_{k - q, q_5, q_6} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, q_4, k'_1} D_{k, k'_1, q_4 + q} D_{k - q, q_2 + k'_1 - k' - q, q_4} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, q_6 + q} D_{k - q, q_5, q_6} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, -q_4 + q_5, q_5} D_{k - q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 - k' + q_1} D_{k - q, -k' + q_1, q_1} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_4, q_5, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + q_4} D_{k - q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, q_4, q_5} D_{k - q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, -k' + k'_1 + q_1} D_{k - q, k', q_1} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_4, q_5, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 - q_4 + q_5} D_{k - q, q_4, q_5} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_4, q_5, k'_1} D_{k, k'_1, q_5} D_{k - q, q_4, q_5} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, q_4, q_1} D_{k, q_1 + k' - q_4, q_1} D_{k - q, q_3, q_4} \\
& + 15 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_4, q_5, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, -k' + q_3, q_1} D_{k - q, -k' + q_3, q_3} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, -k' + q_3, q_1} D_{k - q, k', q_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, q_4, q_1} D_{k, -k' + q_4, q_1} D_{k-q, q_3, q_4} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_4, q_5, q_1} D_{k, -q_4 + q_5, q_1} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& - 5 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, -k' + q_3, q_3} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_4, q_5, q_1} D_{k, q_4, q_1} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& - 5 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, k', q_3} \\
& - 3 \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q_3, q_5, q_6, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, q_1 - k' - q, q_1} D_{k-q, -q_1 + k' + q_3 + q, q_3} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + k' + q} D_{k-q, -k' + q_1, q_1} \\
& - 5 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, q_4, q_1} D_{k, q_1 - k' - q, q_1} D_{k-q, q_3, q_4} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, q_2} D_{k, k' + q, -q_1 + k' + q_2 + q} D_{k-q, q_1, q_2} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 - q_5 + q_6} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, -q_1 + k' + q_3 + q, q_3} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 - q_5 + q_6 + q} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& + 15 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_5, q_6, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, k' + q, q_1} D_{k-q, -k' + q_3, q_3} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, q_1} D_{k, -q_5 + q_6 + q, q_1} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, q_1} D_{k, -q_5 + q_6, q_1} D_{k-q, q_5, q_6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 5 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, q_4, q_1} D_{k, k' + q, q_1} D_{k - q, q_3, q_4} \\
& + 12 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_6, q_7, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, q_6, q_7} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_3, q_5, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, -q_3 - k'_1 + k' + q_5 + q, q_5} \\
& - 5 \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q_3, q_6, q_7, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, q_6, q_7} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, q_4, q_1} D_{k, q_2 + q_1 - q_4 - k' - q, q_1} D_{k - q, q_4, q_2 + q_1 - k' - q} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_4, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, q_2 + q_1 - k'_1 - k' - q, q_4} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, q_4, k'_1} D_{k, k'_1, -q_2 + k' + q_4 + q} D_{k - q, q_2 + k'_1 - k' - q, q_4} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 - q_5 + q_6} D_{k - q, q_5, q_6} \\
& + 5 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_4, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, q_4, q_2 + q_1 - k' - q} \\
& - 15 \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q_2, q_5, q_6, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, q_5, q_6} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_5, q_6, q_1} D_{k, -q_5 + q_6, q_1} D_{k - q, q_5, q_6} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_4, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, -k' + q_4, q_4} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_4, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, q_2 + k'_1 - k' - q, q_4} \\
& + 3 \left(\frac{2}{N} \right)^5 \sum_{q_2, q_4, q_6, q_7, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, q_6, q_7} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, q_1 - k' - q, q_1} D_{k - q, q_1 - k' - q, q_3} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k' + k'_1 + q} D_{k - q, k', q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, q_2} D_{k, k' + q, q_1 + k' + q} D_{k - q, q_1, q_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + q_5} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_1 - k' - q, q_3} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + q_5 + q} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, k' + q, q_1} D_{k-q, k', q_3} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, q_1} D_{k, q_5 + q, q_1} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, q_1} D_{k, q_5, q_1} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& + 2 \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_3, q_5, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_3 + k'_1 - k' - q, q_5} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, q_4, k'_1} D_{k, k'_1, -q_2 + k' + q_4 + q} D_{k-q, -q_2 - k'_1 + k' + q_4 + q, q_4} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + q_5} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, q_4, q_1} D_{k, q_4, q_1} D_{k-q, q_4, q_2 + q_1 - k' - q} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_4, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, -q_2 - q_1 + k'_1 + k' + q_4 + q, q_4} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_4, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, -q_2 - k'_1 + k' + q_4 + q, q_4} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_5, q_6, q_1} D_{k, q_5, q_1} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_4, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, k', q_4} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_4, q_5, q_1} D_{k, q_1 - k' - q, q_1} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& - 5 \left(\frac{2}{N} \right)^4 \sum_{q_2, q_6, q_7, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_6, q_7} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_4, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_4, q_2 + k'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2, q_4, q_5, q_1} D_{k, k'+q, q_1} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_7, q_8, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_7, q_8} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_4, q_6, q_7, q_1} D_{k, -q_4 - q_2 + k' + q_7 + q, q_1} D_{k-q, q_6, q_7} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^5 \sum_{q_2, q_4, q_7, q_8, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_7, q_8} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_3, q_5, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_3 - k'_1 + q_1 - k' - q, q_5} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_3, q_5, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_1 - k'_1 + q_3 - k' - q, q_5} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_3, q_5, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_5, q_2 + q_1 - k' - q} \\
& + 5 \left(\frac{2}{N}\right)^5 \sum_{q_2, q_3, q_6, q_7, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_6, q_7} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_3, q_5, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_3 - q_2 - k' + q_5, q_5} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^4 \sum_{q_2, q_3, q_5, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, k'_1 + q_3 - k' - q, q_5} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^6 \sum_{q_2, q_3, q_5, q_7, q_8, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_7, q_8} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, q_1, q_1 + k' + q} D_{k-q, q_1, -k' + k - q} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k - q_1 - q, k' + k - q_1} D_{k-q, k', q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + k' + q} D_{k-q, k'_1 + k' - k + q_1 + q, q_1} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k' + q, q_1 + k' + q} D_{k-q, q_1, -k' + k - q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, k - q_5, k + q_4 - q_5} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, q_1 + k' + q} D_{k-q, q_1, -k' + k - q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, k - q_5 - q, k + q_4 - q_5} D_{k-q, q_4, q_5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_4, q_5, k'_1} D_{k, k'_1, k+q_4-q_5} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k'+q, k'+k-q_1} D_{k-q, k', q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, q_4+q, k+q_4-q_5} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, q_4, k+q_4-q_5} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'+k-q_1} D_{k-q, k', q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, q_2} D_{k, k'+q, k+q_1-q_2} D_{k-q, q_1, q_2} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k+q_5-q_6} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, q_4, k'_1} D_{k, k'_1, q_2+k'_1-k'+k-q_4-q} D_{k-q, q_2+k'_1-k'-q, q_4} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k+q_5-q_6} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1+q_1} D_{k-q, q_1, -k'+k-q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, k-q_5-q, q_4+k-q_5-q} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, q_3, q_1} D_{k-q, q_3, -k'+k-q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, k-q_3-q, q_1} D_{k-q, k', q_3} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, k'_1+k'-k+q_3+q, q_3} \\
& - 5 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_3, -k'+k-q} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_4, q_5, q_1} D_{k, k-q_5-q, q_1} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, q_4, q_4+k-q_5-q} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1+k-q_1-q} D_{k-q, k', q_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_4, q_5, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + k - q_5 - q} D_{k - q, q_4, q_5} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, -k'_1 + q_1 + k' - k + q_3 + q, q_3} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_4, q_5, k'_1} D_{k, k'_1, q_4 + k - q_5 - q} D_{k - q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + k' + q} D_{k - q, q_1, -k' + k - q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, q_1 - k' - q, q_1} D_{k - q, q_3, -q_1 + k + k'} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, k' + q, q_1} D_{k - q, q_3, -k' + k - q} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, q_1} D_{k, k - q_6, q_1} D_{k - q, q_5, q_6} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, q_1} D_{k, k - q_6 - q, q_1} D_{k - q, q_5, q_6} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, q_2} D_{k, k' + q, k + k' - q_2} D_{k - q, q_1, q_2} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + k - q_6 - q} D_{k - q, q_5, q_6} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + k - q_6} D_{k - q, q_5, q_6} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, q_3, -q_1 + k + k'} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_3, q_5, q_6, q_1} D_{k, -q_3 + q_1 + k' - k + q_6 + q, q_1} D_{k - q, q_5, q_6} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, q_4, q_1} D_{k, k - q_4 - q, q_1} D_{k - q, q_2 + q_1 - k - k' + q_4, q_4} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_4, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k - q, q_4, -k' + k - q} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q_2, q_5, q_6, q_1} D_{k, k - q_6 - q, q_1} D_{k - q, q_5, q_6} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, q_4, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + k - q_4 - q} D_{k - q, q_2 + k'_1 - k' - q, q_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2, q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1+k-q_6-q} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2, q_4, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, q_2+q_1-k-k'+q_4, q_4} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, -q_1-k'+k-q, k-q_1} D_{k-q, q_1, -k'+k-q} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k-q_1-q, k+k'-q_1} D_{k-q, -k'+q_1, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1+k'+q} D_{k-q, -k'_1-k'+k-q, q_1} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k'+q, k-q_1} D_{k-q, q_1, -k'+k-q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, k-q_5, k-q_4} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k-q_1} D_{k-q, q_1, -k'+k-q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, k-q_5-q, k-q_4} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_4, q_5, k'_1} D_{k, k'_1, k-q_4} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k'+q, k+k'-q_1} D_{k-q, -k'+q_1, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, -q_4+q_5+q, k-q_4} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, -q_4+q_5, k-q_4} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k+k'-q_1} D_{k-q, -k'+q_1, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, q_2} D_{k, k'+q, k-q_1} D_{k-q, q_1, q_2} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k-q_5} D_{k-q, q_5, q_6} \\
& - \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_2, q_4, k'_1} D_{k, k'_1, q_2+k'_1-k'+k-q_4-q} D_{k-q, -q_2-k'_1+k'+q_4+q, q_4} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2, q_5, q_6, k'_1} D_{k, k'_1, k-q_5} D_{k-q, q_5, q_6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, -q_3 - k' + k - q, q_1} D_{k-q, q_3, -k' + k - q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, k - q_3 - q, q_1} D_{k-q, -k' + q_3, q_3} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, -k'_1 - k' + k - q, q_3} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 - q_1 - k' + k - q} D_{k-q, q_1, -k' + k - q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, k - q_5 - q, -q_4 + k - q} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + k - q_1 - q} D_{k-q, -k' + q_1, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_4, q_5} D_{k, -q_4 + q_5, -q_4 + k - q} D_{k-q, q_4, q_5} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} D_{k-q, k'_1 - q_1 - k' + k - q, q_3} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_4, q_5, k'_1} D_{k, k'_1, -q_4 + k - q} D_{k-q, q_4, q_5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_l D_{k, k', q} = & + \frac{2}{N} B_{k-q} A_{-k' + q} \\
& + \frac{2}{N} B_{k'} A_{k-q} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{k_2} B_{k_2} A_{k-q} \\
& - B_{k-q} C_{-k+q, k, -k+k'} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q'} B_{k-q} C_{-k'+q'+q, k'-q', q'} \\
& - B_{k-q} C_{k, -k+q, k+k'-q} \\
& - B_{k'} C_{-k', k, -k-k'+q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{k-q_1-k'} C_{k-q_1-k', q_1, -q_1-k'+q} \\
& + 2 \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{q_1} C_{k-q_1-k', q_1, -q_1-k'+q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{k_1} B_{k_1} C_{-k', k, -k-k'+q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_1, k_1} B_{k_1} C_{k-q_1-k', q_1, -q_1-k'+q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q'} B_{k'} C_{k-q'-k', q', -q'-k'+q} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, k_1} B_{k_1} C_{k-q_2-k', q_2, -q_2-k'+q} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_1} B_{q'+q_1-q} C_{k+q_1-q, -k'-q_1+q, q_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_2, k_1} B_{k_1} C_{k-q_2-k', q_2, -q_2-k'+q} \\
& - B_{k'} C_{k, -k', q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{k_1} B_{k_1} C_{k, -k', q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{-k+q_1+k'} C_{k-q_1-k', q_1, -q_1-k'+q} \\
& - B_{k-q} C_{-k'+q, k', k-k'} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q'} B_{k-q} C_{-k'+q, k', q'} \\
& - B_{k-q} C_{-k'+q, k', -k'-k+q} \\
& - B_{k'} C_{k-q, -k'+q, k'+k-q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_2} B_{k-q_2-q} C_{k-q, -k'+q, q_2} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_2} B_{k'-q_2-q} C_{k-q, -k'+q, q_2} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{k_1} B_{k_1} C_{k-q, -k'+q, k'+k-q} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, k_1} B_{k_1} C_{k-q, -k'+q, q_2} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1} B_{k'} C_{k-q, -k'+q, q_1} \\
& - 2 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_3, k_1} B_{k_1} C_{k-q, -k'+q, q_3} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q', q_1} B_{q'-q_1-q} C_{k-q, -k'+q, q_1} \\
& + \left(\frac{2}{N} \right)^3 \sum_{q', q_3, k_1} B_{k_1} C_{k-q, -k'+q, q_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - B_{k'} C_{k-q, -k'+q, -q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_2} B_{-k'+q_2+q} C_{k-q, -k'+q, q_2} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{k_1} B_{k_1} C_{k-q, -k'+q, -q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_2} B_{-k+q_2+q} C_{k-q, -k'+q, q_2} \\
& - A_{k-q} D_{k, k-q, k+k'-q} \\
& - A_{k-q} D_{k, k', k+k'-q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q'} A_{k-q} D_{k, q', k+k'-q} \\
& - A_{-q+k} D_{k, k', q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q'} A_{k-q} D_{k, -k'+q', q'} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q'} A_{k-q} D_{k, k', q'} \\
& - \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_1, q_2} A_{k-q} D_{k, q_1, q_2} \\
& + A_k D_{k, k', q} \\
& - \sum_{q'} D_{k, -q'+q, q} C_{q', -q'+q, q'+k'-q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q', k'_1} D_{k, k'_1, q} C_{q', -q'+q, q'+k'-q} \\
& - \sum_{q'} D_{k, q', q} C_{q', -q'+q, q'+k'-q} \\
& - \sum_{q'} D_{k, -q'+k-k', -q'+k} C_{q', -q'+k-k', q'-k+q} \\
& - \sum_{q'} D_{k, k', -q'+k} C_{q', -q'+k-k', q'-k+q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q', k'_1} D_{k, k'_1, -q'+k} C_{q', -q'+k-k', q'-k+q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q', k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 - q'+k-k'} C_{q', -q'+k-k', q'-k+q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_2, q_1} D_{k, -q_2+k-k', q_1} C_{q_2, -q_2+k-k', q_2-k+q} \\
& - 5 \left(\frac{2}{N} \right)^2 \sum_{q_2, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} C_{q_2, -q_2+k-k', q_2-k+q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{N} \sum_{q', k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + k'} C_{q', -q' + k - k', q' - k + q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_2, q_1} D_{k, k', q_1} C_{q_2, -q_2 + k - k', q_2 - k + q} \\
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2, q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} C_{q_3, -q_3 + k - k', q_3 - k + q} \\
& - \sum_{q'} D_{k, q', q' + k'} C_{q', -q' + k - k', q' - k + q} \\
& - \sum_{q'} D_{k, k', q' + k'} C_{q', -q' + k - k', q' - k + q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q', k'_1} D_{k, k'_1, q' + k'} C_{q', -q' + k - k', q' - k + q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_2, q_1} D_{k, q_2, q_1} C_{q_2, -q_2 + k - k', q_2 - k + q} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q', k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + q'} C_{q', -q' + k - k', q' - k + q} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k' + q_1, q} C_{-k' + q, k', q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, q} C_{-k' + q, k', q_1} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, -k' - q_1 + q, q} C_{-k' + q, k', q_1} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, -k' + q_1 + q, q_1 + q} C_{k - q, -k' + q, q_1} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k', q_1 + q} C_{k - q, -k' + q, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, q_1 + q} C_{k - q, -k' + q, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 - k' + q_1 + q} C_{k - q, -k' + q, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, -k' + q_3 + q, q_1} C_{k - q, -k' + q, q_3} \\
& - 5 \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sum_{q_3, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} C_{k - q, -k' + q, q_3} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1 + k'} C_{k - q, -k' + q, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, k', q_1} C_{k - q, -k' + q, q_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{N}\right)^3 \sum_{q_2, q_4, k'_1, q_1} D_{k, k'_1, q_1} C_{k-q, -k'+q, q_4} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k-q_1-q, k'+k-q_1-q} C_{k-q, -k'+q, q_1} \\
& - \sum_{q_1} D_{k, k', k'+k-q_1-q} C_{k-q, -k'+q, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'+k-q_1-q} C_{k-q, -k'+q, q_1} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_3, q_1} D_{k, k-q_3-q, q_1} C_{k-q, -k'+q, q_3} \\
& + \frac{2}{N} \sum_{q_1, k'_1} D_{k, k'_1, k'_1+k-q_1-q} C_{k-q, -k'+q, q_1}
\end{aligned}$$

5.2. Ortsraum

$$\begin{aligned}
\partial_l A_{a,b} = & - \sum_j B_{a,j} B_{j,b} & - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{i,b,j,a} \\
& + 2B_{a,b} B_{b,b} & - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{i,j,b,a} \\
& - \sum_j B_{a,j} B_{b,j} & + 2 \sum_i B_{i,b} D_{i,b,b,a} \\
& - \sum_i B_{i,a} B_{i,b} & + 2 \sum_j B_{b,j} D_{b,j,b,a} \\
& + 2 \sum_i \delta_{b,a} B_{i,a} B_{i,a} & + 2 \sum_i B_{i,i} D_{i,b,i,a} \\
& + 2 \sum_j \delta_{b,a} B_{a,j} B_{a,j} & - 20B_{b,b} D_{b,b,b,a} \\
& + 2B_{a,a} B_{a,b} & + 2 \sum_j B_{b,j} D_{b,b,j,a} \\
& - 20\delta_{b,a} B_{a,a} B_{a,a} & + 2 \sum_i B_{i,i} D_{i,i,b,a} \\
& + 2B_{b,a} B_{b,b} & + 8\delta_{0,0} B_{b,b} D_{b,b,b,a} \\
& + 8\delta_{0,0} \delta_{b,a} B_{a,a} B_{a,a} & - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{b,i,j,a} \\
& - \sum_i B_{i,a} B_{b,i} & - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{j,i,b,a} \\
& + 2 \sum_i \delta_{b,a} B_{i,a} B_{a,i} & + 2 \sum_i B_{i,b} D_{b,i,b,a} \\
& + 2B_{a,a} B_{b,a} & + 2 \sum_i B_{i,i} D_{b,i,i,a} \\
& + 2 \sum_j \delta_{b,a} B_{a,j} B_{j,a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_j B_{b,j} D_{j,b,b,a} \\
& - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{b,j,i,a} \\
& - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{j,b,i,a} \\
& + 2 \sum_i B_{i,b} D_{b,b,i,a} \\
& - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{a,i,j,b} \\
& + 2 \sum_i B_{i,i} D_{a,i,i,b} \\
& - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{a,j,i,b} \\
& - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{i,a,j,b} \\
& - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{i,j,a,b} \\
& + 2 \sum_i B_{i,a} D_{i,a,a,b} \\
& + 2 \sum_j B_{a,j} D_{a,j,a,b} \\
& + 2 \sum_j B_{a,j} D_{a,a,j,b} \\
& - 20 B_{a,a} D_{a,a,a,b} \\
& + 2 \sum_i B_{i,i} D_{i,a,i,b} \\
& + 2 \sum_i B_{i,i} D_{i,i,a,b} \\
& + 8 \delta_{0,0} B_{a,a} D_{a,a,a,b} \\
& - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{j,a,i,b} \\
& - \sum_{i,j} B_{i,j} D_{j,i,a,b} \\
& + 2 \sum_j B_{a,j} D_{j,a,a,b} \\
& + 2 \sum_i B_{i,a} D_{a,a,i,b} \\
& + 2 \sum_i B_{i,a} D_{a,i,a,b} \\
& - \sum_{i,j,m} D_{i,j,m,b} D_{i,m,j,a} \\
& - \sum_{i,j,m} D_{i,j,m,b} D_{i,j,m,a} \\
& + 2 \sum_{i,j} D_{i,j,j,b} D_{i,j,j,a} \\
& + 2 \sum_{i,j} D_{i,j,i,b} D_{i,j,i,a} \\
& + 2 \sum_{i,m} D_{i,i,m,b} D_{i,m,i,a} \\
& - 20 \sum_i D_{i,i,i,b} D_{i,i,i,a} \\
& + 2 \sum_{i,j} D_{i,j,i,b} D_{i,i,j,a} \\
& + 2 \sum_{i,m} D_{i,i,m,b} D_{i,i,m,a} \\
& + 8 \sum_i \delta_{0,0} D_{i,i,i,b} D_{i,i,i,a} \\
& - \sum_{i,j,m} D_{i,j,m,b} D_{m,i,j,a} \\
& - \sum_{i,j,m} D_{i,j,m,b} D_{j,i,m,a} \\
& + 2 \sum_{i,j} D_{i,j,j,b} D_{j,i,j,a} \\
& + 2 \sum_{i,m} D_{i,i,m,b} D_{m,i,i,a} \\
& + 2 \sum_{i,j} D_{i,j,i,b} D_{j,i,i,a} \\
& - \sum_{i,j,m} D_{i,j,m,b} D_{m,j,i,a} \\
& - \sum_{i,j,m} D_{i,j,m,b} D_{j,m,i,a} \\
& + 2 \sum_{i,j} D_{i,j,j,b} D_{j,j,i,a} \\
& - \sum_i B_{i,b} A_{a,i} \\
& + 2 B_{b,b} A_{a,b}
\end{aligned}$$

$$\partial_t B_{a,b} = - \sum_j B_{a,j} A_{b,j}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i,j} B_{i,j} C_{a,b,j,i} & - \sum_{i,j} B_{i,j} C_{i,j,b,a} \\
& + 2 \sum_i B_{i,i} C_{a,b,i,i} & + 2 \sum_i B_{i,i} C_{i,i,b,a} \\
& - \sum_{i,j} B_{i,j} C_{a,b,i,j} & - \sum_{i,j} B_{i,j} C_{j,i,b,a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_l C_{a,b,c,d} = & 2\delta_{d,b} B_{a,b} B_{b,c} & - 4\delta_{d,b} B_{b,c} D_{b,c,c,a} \\
& - 4\delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{a,b} B_{b,b} & + 2B_{b,b} D_{b,d,c,a} \\
& + 2\delta_{c,b} B_{a,b} B_{d,b} & - 16\delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,c,b,a} \\
& + 2\delta_{d,a} B_{a,b} B_{a,c} & - 20\delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,b,c,a} \\
& - 4\delta_{c,b} \delta_{d,a} B_{a,b} B_{a,b} & + 136\delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,b,b,a} \\
& - 4\delta_{c,a} \delta_{d,a} B_{a,b} B_{a,a} & + 2B_{d,b} D_{d,c,d,a} \\
& + 2\delta_{c,a} B_{a,b} B_{d,a} & - 4\delta_{c,b} B_{d,b} D_{d,b,d,a} \\
& - 4\delta_{c,a} \delta_{d,b} B_{a,b} B_{b,a} & - 4 \sum_j \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{b,j} D_{b,j,b,a} \\
& - \sum_j B_{a,j} D_{j,d,c,b} & - 4\delta_{c,b} B_{b,b} D_{b,d,b,a} \\
& + 2B_{a,d} D_{d,c,d,b} & + 8\delta_{0,0} \delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,c,b,a} \\
& + 2B_{a,d} D_{d,d,c,b} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,b,b,a} \\
& - 4\delta_{d,c} B_{a,c} D_{c,c,c,b} & + 2B_{d,b} D_{d,d,c,a} \\
& - \sum_j B_{a,j} D_{d,j,c,b} & - 4\delta_{c,b} B_{d,b} D_{d,d,b,a} \\
& + 2B_{a,c} D_{d,c,c,b} & - 4 \sum_j \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{b,j} D_{b,b,j,a} \\
& - \sum_j B_{a,j} D_{d,c,j,b} & + 8\delta_{0,0} \delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,b,c,a} \\
& - \sum_i B_{i,b} D_{i,d,c,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,b,b,a} \\
& + 2 \sum_i \delta_{c,b} B_{i,b} D_{i,d,b,a} & - 4\delta_{d,c} B_{c,b} D_{c,c,c,a} \\
& + 2 \sum_i \delta_{d,b} B_{i,b} D_{i,b,c,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,b,b,a} \\
& - 4 \sum_i \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{i,b} D_{i,b,b,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,b,b,a} \\
& + 2 \sum_j \delta_{d,b} B_{b,j} D_{b,c,j,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,b,b,a} \\
& + 2 \sum_j \delta_{d,b} B_{b,j} D_{b,j,c,a} & + 32\delta_{0,0} \delta_{0,0} \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,b,b,a} \\
& & - \sum_i B_{i,b} D_{d,i,c,a} \\
& & + 2 \sum_i \delta_{c,b} B_{i,b} D_{d,i,b,a} \\
& & + 2 \sum_i \delta_{d,b} B_{i,b} D_{b,i,c,a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4 \sum_i \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{i,b} D_{b,i,b,a} & + 2 \sum_j \delta_{c,b} B_{b,j} D_{a,b,j,d} \\
& + 2 \sum_j \delta_{c,b} B_{b,j} D_{d,b,j,a} & + 2 B_{b,c} D_{a,b,b,d} \\
& + 2 B_{b,b} D_{d,b,c,a} & - 20 \delta_{c,b} B_{b,b} D_{a,b,b,d} \\
& - 20 \delta_{c,b} B_{b,b} D_{d,b,b,a} & + 2 B_{c,c} D_{a,c,b,d} \\
& + 2 \sum_j \delta_{d,b} B_{b,j} D_{j,b,c,a} & + 8 \delta_{0,0} \delta_{c,b} B_{b,b} D_{a,b,b,d} \\
& - 4 \delta_{c,b} B_{b,d} D_{d,b,d,a} & - \sum_j B_{c,j} D_{a,j,b,d} \\
& + 2 B_{c,b} D_{d,c,c,a} & + 2 \sum_j \delta_{c,b} B_{b,j} D_{a,j,b,d} \\
& - 4 \delta_{d,b} B_{c,b} D_{b,c,c,a} & + 2 B_{c,b} D_{a,b,b,d} \\
& + 8 \delta_{0,0} \delta_{c,b} B_{b,b} D_{d,b,b,a} & + 2 \sum_i \delta_{c,b} B_{i,b} D_{a,b,i,d} \\
& - 4 \sum_j \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{b,j} D_{j,b,b,a} & - \sum_i B_{i,c} D_{i,a,b,d} \\
& - 16 \delta_{0,0} \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{b,b} D_{b,b,b,a} & + 2 \sum_i \delta_{c,b} B_{i,b} D_{i,a,b,d} \\
& - \sum_i B_{i,b} D_{d,c,i,a} & + 2 \sum_i \delta_{c,a} B_{i,a} D_{i,a,b,d} \\
& + 2 \sum_i \delta_{c,b} B_{i,b} D_{d,b,i,a} & + 2 \sum_j \delta_{c,a} B_{a,j} D_{a,b,j,d} \\
& + 2 \sum_i \delta_{d,b} B_{i,b} D_{b,c,i,a} & + 2 B_{a,c} D_{a,b,a,d} \\
& - 4 \sum_i \delta_{c,b} \delta_{d,b} B_{i,b} D_{b,b,i,a} & - 16 \delta_{c,a} B_{a,a} D_{a,b,a,d} \\
& + 2 B_{b,b} D_{d,c,b,a} & + 2 \sum_j \delta_{c,a} B_{a,j} D_{a,j,b,d} \\
& + 2 \sum_j \delta_{c,b} B_{b,j} D_{d,j,b,a} & - 4 \delta_{c,a} B_{a,b} D_{a,b,b,d} \\
& + 2 \sum_j \delta_{c,b} B_{b,j} D_{j,d,b,a} & - 4 \delta_{c,b} B_{a,b} D_{a,b,a,d} \\
& - 4 \delta_{c,b} B_{b,d} D_{d,d,b,a} & + 2 B_{a,c} D_{a,a,b,d} \\
& - \sum_i B_{i,c} D_{a,b,i,d} & - 4 \delta_{c,b} B_{a,b} D_{a,a,b,d} \\
& + 2 B_{c,c} D_{a,b,c,d} & - 20 \delta_{c,a} B_{a,a} D_{a,a,b,d} \\
& - \sum_j B_{c,j} D_{a,b,j,d} & + 2 B_{c,c} D_{c,a,b,d} \\
& - \sum_i B_{i,c} D_{a,i,b,d} & - 4 \delta_{c,b} B_{b,b} D_{b,a,b,d} \\
& + 2 \sum_i \delta_{c,b} B_{i,b} D_{a,i,b,d} & + 8 \delta_{0,0} \delta_{c,a} B_{a,a} D_{a,b,a,d} \\
& & + 8 \delta_{0,0} \delta_{c,a} B_{a,a} D_{a,a,b,d} \\
& & - \sum_j B_{c,j} D_{j,a,b,d} \\
& & + 2 \sum_j \delta_{c,b} B_{b,j} D_{j,a,b,d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_j \delta_{c,a} B_{a,j} D_{j,a,b,d} \\
& + 2 B_{c,a} D_{a,b,a,d} \\
& + 2 \sum_i \delta_{c,a} B_{i,a} D_{a,b,i,d} \\
& + 2 B_{c,a} D_{a,a,b,d} \\
& - 4 \delta_{c,b} B_{b,a} D_{a,a,b,d} \\
& + 2 \sum_i \delta_{c,a} B_{i,a} D_{a,i,b,d} \\
& - 4 \delta_{c,b} B_{b,a} D_{a,b,a,d} \\
& - 4 \delta_{c,a} B_{b,a} D_{a,b,b,d} \\
& - \sum_{j,m} D_{a,j,m,d} D_{j,c,m,b} \\
& - \sum_{j,m} D_{a,j,m,d} D_{j,m,c,b} \\
& + 2 \sum_j D_{a,j,c,d} D_{j,c,c,b} \\
& + 2 \sum_m D_{a,c,m,d} D_{c,m,c,b} \\
& + 2 \sum_j D_{a,j,j,d} D_{j,c,j,b} \\
& - 20 D_{a,c,c,d} D_{c,c,c,b} \\
& + 2 \sum_m D_{a,c,m,d} D_{c,c,m,b} \\
& + 2 \sum_j D_{a,j,j,d} D_{j,j,c,b} \\
& + 8 \delta_{0,0} D_{a,c,c,d} D_{c,c,c,b} \\
& - \sum_{j,m} D_{a,j,m,d} D_{c,j,m,b} \\
& - \sum_{j,m} D_{a,j,m,d} D_{m,j,c,b} \\
& + 2 \sum_j D_{a,j,c,d} D_{c,j,c,b} \\
& + 2 \sum_j D_{a,j,j,d} D_{c,j,j,b} \\
& + 2 \sum_m D_{a,c,m,d} D_{m,c,c,b} \\
& - \sum_{j,m} D_{a,j,m,d} D_{c,m,j,b} \\
& - \sum_{j,m} D_{a,j,m,d} D_{m,c,j,b} \\
& + 2 \sum_j D_{a,j,c,d} D_{c,c,j,b} \\
& - \sum_{i,m} D_{i,b,m,d} D_{i,c,m,a} \\
& - \sum_{i,m} D_{i,b,m,d} D_{i,m,c,a} \\
& + 2 \sum_i D_{i,b,c,d} D_{i,c,c,a} \\
& - \sum_{i,j} D_{i,j,b,d} D_{i,c,j,a} \\
& + 2 \sum_{i,j} \delta_{c,b} D_{i,j,b,d} D_{i,b,j,a} \\
& + 2 \sum_i D_{i,b,b,d} D_{i,c,b,a} \\
& + 2 \sum_{i,m} \delta_{c,b} D_{i,b,m,d} D_{i,m,b,a} \\
& - 20 \sum_i \delta_{c,b} D_{i,b,b,d} D_{i,b,b,a} \\
& - \sum_{i,j} D_{i,j,b,d} D_{i,j,c,a} \\
& + 2 \sum_{i,j} \delta_{c,b} D_{i,j,b,d} D_{i,j,b,a} \\
& + 2 \sum_{i,m} \delta_{c,b} D_{i,b,m,d} D_{i,b,m,a} \\
& + 2 \sum_i D_{i,b,b,d} D_{i,b,c,a} \\
& + 2 \sum_i D_{i,c,b,d} D_{i,c,c,a} \\
& + 8 \sum_i \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{i,b,b,d} D_{i,b,b,a} \\
& + 2 \sum_{j,m} \delta_{c,b} D_{b,j,m,d} D_{b,m,j,a} \\
& + 2 \sum_j D_{b,j,b,d} D_{b,c,j,a} \\
& - 20 \sum_j \delta_{c,b} D_{b,j,b,d} D_{b,b,j,a} \\
& + 2 \sum_{j,m} \delta_{c,b} D_{b,j,m,d} D_{b,j,m,a} \\
& + 2 \sum_j D_{b,j,b,d} D_{b,j,c,a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 20 \sum_j \delta_{c,b} D_{b,j,b,d} D_{b,j,b,a} & + 8\delta_{0,0} D_{b,b,b,d} D_{b,c,b,a} \\
& - 4 \sum_j \delta_{c,b} D_{b,j,j,d} D_{b,j,j,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& - 4D_{b,c,b,d} D_{b,c,c,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& + 480\delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& + 2 \sum_m D_{b,b,m,d} D_{b,c,m,a} & + 32\delta_{0,0} \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& + 2 \sum_m D_{b,b,m,d} D_{b,m,c,a} & + 2 \sum_m D_{c,b,m,d} D_{c,c,m,a} \\
& - 4D_{b,b,c,d} D_{b,c,c,a} & + 2 \sum_i D_{i,b,i,d} D_{i,i,c,a} \\
& - 20 \sum_m \delta_{c,b} D_{b,b,m,d} D_{b,m,b,a} & + 2 \sum_j D_{c,j,b,d} D_{c,c,j,a} \\
& - 20D_{b,b,b,d} D_{b,c,b,a} & - 4D_{c,b,b,d} D_{c,c,b,a} \\
& - 20 \sum_m \delta_{c,b} D_{b,b,m,d} D_{b,b,m,a} & - 4 \sum_i \delta_{c,b} D_{i,b,i,d} D_{i,i,b,a} \\
& - 20D_{b,b,b,d} D_{b,b,c,a} & + 2 \sum_i D_{i,i,b,d} D_{i,i,c,a} \\
& - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & - 4 \sum_i \delta_{c,b} D_{i,i,b,d} D_{i,i,b,a} \\
& + 2 \sum_m D_{c,b,m,d} D_{c,m,c,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& + 2 \sum_i D_{i,b,i,d} D_{i,c,i,a} & + 8 \sum_j \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,j,b,d} D_{b,b,j,a} \\
& - 20D_{c,b,c,d} D_{c,c,c,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& + 2 \sum_j D_{c,j,b,d} D_{c,j,c,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& - 4D_{c,b,b,d} D_{c,b,c,a} & + 8 \sum_m \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,m,d} D_{b,b,m,a} \\
& - 4 \sum_i \delta_{c,b} D_{i,b,i,d} D_{i,b,i,a} & + 8\delta_{0,0} D_{b,b,b,d} D_{b,b,c,a} \\
& + 2 \sum_i D_{i,i,b,d} D_{i,c,i,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& - 4 \sum_i \delta_{c,b} D_{i,i,b,d} D_{i,b,i,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& - 20D_{c,c,b,d} D_{c,c,c,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & + 32\delta_{0,0} \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& + 8 \sum_j \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,j,b,d} D_{b,j,b,a} & + 8\delta_{0,0} D_{c,b,c,d} D_{c,c,c,a} \\
& - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& + 8 \sum_m \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,m,d} D_{b,m,b,a} & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& & + 8\delta_{0,0} D_{c,c,b,d} D_{c,c,c,a} \\
& & - 16\delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -16\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & +2\sum_{i,j}\delta_{c,b}D_{i,j,b,d}D_{j,i,b,a} \\
& -16\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & +2\sum_{i,m}\delta_{c,b}D_{i,b,m,d}D_{b,i,m,a} \\
& +32\delta_{0,0}\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & +2\sum_i D_{i,b,b,d}D_{b,i,c,a} \\
& -16\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & +2\sum_i D_{i,c,b,d}D_{c,i,c,a} \\
& -16\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & +8\sum_i \delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{i,b,b,d}D_{b,i,b,a} \\
& -16\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & +2\sum_j D_{b,j,b,d}D_{c,b,j,a} \\
& -16\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & +2\sum_{j,m}\delta_{c,b}D_{b,j,m,d}D_{m,b,j,a} \\
& +32\delta_{0,0}\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & +2\sum_m D_{b,b,m,d}D_{c,b,m,a} \\
& -16\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & +2\sum_m D_{b,b,m,d}D_{m,b,c,a} \\
& -16\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & -4D_{b,b,c,d}D_{c,b,c,a} \\
& +32\delta_{0,0}\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & -20D_{b,b,b,d}D_{c,b,b,a} \\
& +32\delta_{0,0}\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & -20\sum_m \delta_{c,b}D_{b,b,m,d}D_{m,b,b,a} \\
& +32\delta_{0,0}\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & +2\sum_{j,m}\delta_{c,b}D_{b,j,m,d}D_{j,b,m,a} \\
& -64\delta_{0,0}\delta_{0,0}\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} & +2\sum_j D_{b,j,b,d}D_{j,b,c,a} \\
& -\sum_{i,m} D_{i,b,m,d}D_{c,i,m,a} & -20\sum_j \delta_{c,b}D_{b,j,b,d}D_{j,b,b,a} \\
& -\sum_{i,m} D_{i,b,m,d}D_{m,i,c,a} & -4D_{b,c,b,d}D_{c,b,c,a} \\
& +2\sum_i D_{i,b,c,d}D_{c,i,c,a} & -4\sum_j \delta_{c,b}D_{b,j,j,d}D_{j,b,j,a} \\
& -\sum_{i,j} D_{i,j,b,d}D_{c,i,j,a} & -16\delta_{0,0}\delta_{c,b}D_{b,b,b,d}D_{b,b,b,a} \\
& +2\sum_{i,j}\delta_{c,b}D_{i,j,b,d}D_{b,i,j,a} & +2\sum_i D_{i,b,i,d}D_{c,i,i,a} \\
& +2\sum_i D_{i,b,b,d}D_{c,i,b,a} & +2\sum_m D_{c,b,m,d}D_{m,c,c,a} \\
& +2\sum_{i,m}\delta_{c,b}D_{i,b,m,d}D_{m,i,b,a} & +2\sum_i D_{i,i,b,d}D_{c,i,i,a} \\
& -20\sum_i \delta_{c,b}D_{i,b,b,d}D_{b,i,b,a} & -4\sum_i \delta_{c,b}D_{i,i,b,d}D_{b,i,i,a} \\
& -\sum_{i,j} D_{i,j,b,d}D_{j,i,c,a} &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_j D_{c,j,b,d} D_{j,c,c,a} & - 20 \sum_i \delta_{c,b} D_{i,b,b,d} D_{b,b,i,a} \\
& - 4 \sum_i \delta_{c,b} D_{i,b,i,d} D_{b,i,i,a} & - \sum_{i,j} D_{i,j,b,d} D_{j,c,i,a} \\
& - 4 D_{c,b,b,d} D_{b,c,c,a} & + 2 \sum_{i,j} \delta_{c,b} D_{i,j,b,d} D_{j,b,i,a} \\
& - 16 \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & + 2 \sum_{i,m} \delta_{c,b} D_{i,b,m,d} D_{b,m,i,a} \\
& + 8 \delta_{0,0} D_{b,b,b,d} D_{c,b,b,a} & + 2 \sum_i D_{i,b,b,d} D_{b,c,i,a} \\
& + 8 \sum_m \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,m,d} D_{m,b,b,a} & + 2 \sum_i D_{i,c,b,d} D_{c,c,i,a} \\
& - 16 \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & + 8 \sum_i \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{i,b,b,d} D_{b,b,i,a} \\
& + 8 \sum_j \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,j,b,d} D_{j,b,b,a} & + 2 \sum_m D_{b,b,m,d} D_{c,m,b,a} \\
& - 16 \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & + 2 \sum_m D_{b,b,m,d} D_{m,c,b,a} \\
& - 16 \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & - 4 D_{b,b,c,d} D_{c,c,b,a} \\
& - 16 \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & + 2 \sum_j D_{b,j,b,d} D_{c,j,b,a} \\
& - 16 \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & + 2 \sum_{j,m} \delta_{c,b} D_{b,j,m,d} D_{m,j,b,a} \\
& - 16 \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & + 2 \sum_j D_{b,j,b,d} D_{j,c,b,a} \\
& + 32 \delta_{0,0} \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} & + 2 \sum_{j,m} \delta_{c,b} D_{b,j,m,d} D_{j,m,b,a} \\
& - \sum_{i,m} D_{i,b,m,d} D_{c,m,i,a} & - 4 D_{b,c,b,d} D_{c,c,b,a} \\
& - \sum_{i,m} D_{i,b,m,d} D_{m,c,i,a} & - 4 \sum_j \delta_{c,b} D_{b,j,j,d} D_{j,j,b,a} \\
& + 2 \sum_i D_{i,b,c,d} D_{c,c,i,a} & - 16 \delta_{0,0} \delta_{c,b} D_{b,b,b,d} D_{b,b,b,a} \\
& - \sum_{i,j} D_{i,j,b,d} D_{c,j,i,a} & \\
& + 2 \sum_{i,j} \delta_{c,b} D_{i,j,b,d} D_{b,j,i,a} & \\
& + 2 \sum_i D_{i,b,b,d} D_{c,b,i,a} & \\
& + 2 \sum_{i,m} \delta_{c,b} D_{i,b,m,d} D_{m,b,i,a} & \\
\end{aligned}$$

$$\partial_t D_{a,b,c,d} = 2\delta_{d,c} B_{a,c} A_{b,c}$$

$$+ 2\delta_{d,b} B_{b,c} A_{a,b}$$

$$- \sum_j B_{a,j} C_{b,c,d,j}$$

$$+ 2B_{a,d} C_{b,c,d,d}$$

$$- \sum_j B_{a,j} C_{b,c,j,d}$$

$$- \sum_i B_{i,c} C_{a,b,d,i}$$

$$+ 2 \sum_i \delta_{d,c} B_{i,c} C_{a,b,c,i}$$

$$+ 2 \sum_j \delta_{d,c} B_{c,j} C_{a,b,j,c}$$

$$\begin{aligned}
& + 2B_{c,c}C_{a,b,d,c} & + 2A_{b,c}D_{a,c,c,d} \\
& - 20\delta_{d,c}B_{c,c}C_{a,b,c,c} & - \sum_j A_{a,j}D_{j,b,c,d} \\
& + 2B_{d,c}C_{a,b,d,d} & + 2A_{a,b}D_{b,c,b,d} \\
& + 8\delta_{0,0}\delta_{d,c}B_{c,c}C_{a,b,c,c} & + 2A_{a,b}D_{b,b,c,d} \\
& - \sum_i B_{i,c}C_{a,b,i,d} & - \sum_{j,m} D_{a,j,m,d}C_{b,c,m,j} \\
& + 2 \sum_i \delta_{d,c}B_{i,c}C_{a,b,i,c} & + 2 \sum_j D_{a,j,j,d}C_{b,c,j,j} \\
& + 2B_{c,c}C_{a,b,c,d} & - \sum_{j,m} D_{a,j,m,d}C_{b,c,j,m} \\
& + 2 \sum_j \delta_{d,c}B_{c,j}C_{a,b,c,j} & - \sum_{i,m} D_{i,c,m,d}C_{a,b,m,i} \\
& - \sum_j B_{a,j}C_{j,d,c,b} & - \sum_{i,j} D_{i,j,c,d}C_{a,b,j,i} \\
& + 2B_{a,d}C_{d,d,c,b} & + 2 \sum_i D_{i,c,c,d}C_{a,b,c,i} \\
& - \sum_j B_{a,j}C_{d,j,c,b} & + 2 \sum_j D_{c,j,c,d}C_{a,b,j,c} \\
& - \sum_i B_{i,c}C_{i,d,b,a} & + 2 \sum_m D_{c,c,m,d}C_{a,b,m,c} \\
& + 2 \sum_i \delta_{d,c}B_{i,c}C_{i,c,b,a} & - 20D_{c,c,c,d}C_{a,b,c,c} \\
& + 2 \sum_j \delta_{d,c}B_{c,j}C_{c,j,b,a} & + 2 \sum_i D_{i,c,i,d}C_{a,b,i,i} \\
& + 2B_{c,c}C_{c,d,b,a} & + 2 \sum_i D_{i,i,c,d}C_{a,b,i,i} \\
& - 20\delta_{d,c}B_{c,c}C_{c,c,b,a} & + 8\delta_{0,0}D_{c,c,c,d}C_{a,b,c,c} \\
& + 2B_{d,c}C_{d,d,b,a} & - \sum_{i,m} D_{i,c,m,d}C_{a,b,i,m} \\
& + 8\delta_{0,0}\delta_{d,c}B_{c,c}C_{c,c,b,a} & - \sum_{i,j} D_{i,j,c,d}C_{a,b,i,j} \\
& - \sum_i B_{i,c}C_{d,i,b,a} & + 2 \sum_i D_{i,c,c,d}C_{a,b,i,c} \\
& + 2 \sum_i \delta_{d,c}B_{i,c}C_{c,i,b,a} & + 2 \sum_m D_{c,c,m,d}C_{a,b,c,m} \\
& + 2B_{c,c}C_{d,c,b,a} & + 2 \sum_j D_{c,j,c,d}C_{a,b,c,j} \\
& + 2 \sum_j \delta_{d,c}B_{c,j}C_{j,c,b,a} & - \sum_{j,m} D_{a,j,m,d}C_{j,m,c,b} \\
& + \sum_i A_{i,d}D_{a,b,c,i} & + 2 \sum_j D_{a,j,j,d}C_{j,j,c,b} \\
& - \sum_j A_{c,j}D_{a,b,j,d} & \\
& - \sum_j A_{b,j}D_{a,j,c,d} &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j,m} D_{a,j,m,d} C_{m,j,c,b} & + 2 \sum_i D_{i,c,i,d} C_{i,i,b,a} \\
& - \sum_{i,m} D_{i,c,m,d} C_{i,m,b,a} & + 2 \sum_i D_{i,i,c,d} C_{i,i,b,a} \\
& - \sum_{i,j} D_{i,j,c,d} C_{i,j,b,a} & + 8\delta_{0,0} D_{c,c,c,d} C_{c,c,b,a} \\
& + 2 \sum_i D_{i,c,c,d} C_{i,c,b,a} & - \sum_{i,m} D_{i,c,m,d} C_{m,i,b,a} \\
& + 2 \sum_j D_{c,j,c,d} C_{c,j,b,a} & - \sum_{i,j} D_{i,j,c,d} C_{j,i,b,a} \\
& + 2 \sum_m D_{c,c,m,d} C_{c,m,b,a} & + 2 \sum_i D_{i,c,c,d} C_{c,i,b,a} \\
& - 20 D_{c,c,c,d} C_{c,c,b,a} & + 2 \sum_m D_{c,c,m,d} C_{m,c,b,a} \\
& & + 2 \sum_j D_{c,j,c,d} C_{j,c,b,a}
\end{aligned}$$

Abbildungsverzeichnis

1.1.	Schematische Phasendiagramm in der Nähe eines quantenkritischen Punktes. Bei verschwindender Temperatur findet abhängig von einem hier nicht näher definierten Quantenparameter (Dotierung, Kopplungsstärke, ...) ein Phasenübergang statt.	2
1.2.	Typisches Phasendiagramm eines Hochtemperatur-Supraleiters für verschiedene Temperaturen T und Dotierungsstärken δ	3
2.1.	Schematische Darstellung von Hardcore-Bosonen in 1D: Obwohl es sich um Bosonen handelt, kann wie bei Fermionen jeder Gitterplatz mit Index i maximal einmal besetzt werden, was hier durch die achteckigen Plätze symbolisiert ist, die mit einem einzigen rundem Teilchen bereits ausgefüllt sind.	5
2.2.	Schematische Darstellung eines Dimers: Die beiden Spins mit Wert $1/2$ sind gekoppelt und bilden ein Spin-1-Teilchen.	9
2.3.	Schematische Darstellung von IMTF in 1D. Mehrere Spins mit Wert $1/2$ sind mit ihrer z -Komponente an das externe Magnetfeld Γ gekoppelt, während die x -Komponenten nächster Nachbarn über J gekoppelt sind.	10
2.4.	Schematische Darstellung der Analogie des IMTF und des Hardcore-Bosonen-Modells. Die beiden Spinrichtungen entsprechen Besetzung/Nicht-Besetzung und auch die Wechselwirkung J und das externe Feld Γ lassen sich zu bilinearen Termen für die Hardcore-Bosonen umschreiben. Die Terme beschreiben die Energie eines Hardcore-Bosons, Sprünge zu benachbarten Plätzen und Paarerzeugungen/-vernichtungen.	12
2.5.	Plot der Dispersionsrelation $\epsilon_x(k)$ (2.2.32b) des IMTF in Einheiten von Γ . Sie ist abhängig vom Impuls k und dem Störparameter $x := J/\Gamma$ aufgetragen.	18
2.6.	Plot der Dispersionsrelation $\epsilon_x(k)$ des IMTF abhängig vom Impuls k für verschiedene Störparameter x nach Gleichung (2.2.34). Am QKP $x = 1$ schließt die Energielücke $\Delta(x) = \epsilon_x(k = 0)$	18
2.7.	Plot der Energielücke $\Delta(x) = \epsilon_x(k = 0)$ des IMTF abhängig vom Störparameter x nach Gleichung (2.2.37). Es zeigt sich ein lineares Schließen der Energielücke.	20

- 2.8. Blauer Plot der Magnetisierung M des IMTF abhängig vom Störparameter x nach Gleichung (2.2.39). Für $x < 1$ ist das System ungeordnet und $M = 0$, doch ab dem QKP bei $x = 1$ steigt die Magnetisierung an und das System ordnet sich in einer ferromagnetischen Phase. Die Farben markieren zusätzlich zum Wert von M die Werte von x , für welche die jeweilige Farbe vorliegt. 21
- 2.9. Vergleich der Energielücke $\Delta(x) = \epsilon_x(k = 0)$ des IMTF zwischen dem Fall von Hardcore-Bosonen (2.2.37) und Bosonen (2.2.43). Für Hardcore-Bosonen verschiebt sich der QKP von $x = 0.5$ nach $x = 1$ und die Energielücke schließt linear. 21
- 3.1. Schematische Gegenüberstellung einer KUT im Vergleich zu einer einfachen unitären Transformation (UT). Bei der KUT wird durch Lösen der Flussgleichung mit numerischem Vorgehen schrittweise der Hamiltonoperator transformiert, anstatt wie bei einer einfachen UT direkt die finale Transformation anzuwenden. 25
- 3.2. Schematische Darstellung des Flusses von $H(l)$ mit dem MKU-Generator oben und für den Generator von Wegner unten, wobei vorhandene Diagonalelemente grün, vorhandene Nichtdiagonalelemente rot und leere Beiträge weiß gekennzeichnet sind. Nur für den MKU-Generator bleibt bei $l > 0$ die Banddiagonalität erhalten und im Grenzfall $l \rightarrow \infty$ werden auch die entarteten Unterräume diagonalisiert. 28
- 3.3. Diagramm zum Finden der relevanten Terme in H und η . Für weitere Terme könnte mit $n \geq 2$ weiter iteriert werden, doch hier wird sich auf die quartische Ordnung beschränkt. 34
- 3.4. Feynman-Diagramme zur physikalischen Bedeutung der Terme im Hamiltonoperator (3.2.34). Von links einlaufende Pfeile entsprechen Vernichtern und nach rechts auslaufende Pfeile Erzeugern. B_k und D_k beschreiben Paarerzeugungen oder komplex konjugiert Vernichtungen, während A_k ein diagonaler Term ist und C_k eine Wechselwirkung. 40
- 3.5. Übersicht der Teilschritte des Algorithmus zum Auflösen von komplizierten Hardcore-Kommutatoren. Es ist die Hardcore-Algebra im Impulsraum notiert, doch derselbe Algorithmus kann auch im Ortsraum verwendet werden. 46
- 3.6. Diagramm zur Übersicht, welche Terme bei der KUT für das IMTF in erster Ordnung in welche anderen Terme hinein fließen. Die Zeile gibt an wieviele Operatoren in dem Term vorkommen und die Spalte, wie sich die Teilchenzahl n durch Anwendung dieses Operatorterms ändert. Die hexatische Ordnung wird trunziert und Terme, welche mehr als zwei Teilchen erzeugen/vernichten, werden in der quartischen Ordnung nicht erzeugt - daher sind diese Terme mit einem schwächeren Farbton dargestellt. 47

4.1.	Fluss der KUT im Impulsraum für $x = 0.9$ und $N = 5$ für die Kopplungen mit Indizes 0 und der ROD. Bei der Kopplung A sind die Stellen l eingetragen, an welchen die Integration ausgewertet wurde.	52
4.2.	Fluss der KUT im Impulsraum für $x = 0.9$ und $N = 5$ wie in Abbildung 4.1, jedoch für Kopplungen C und D , welche divergieren. Unten sind D und die ROD logarithmisch aufgetragen.	53
4.3.	Maximaler Störparameter x , bei welchem die KUT im Ortsraum bei der Diskretisierung N noch konvergiert. Die Punkte wurden dabei so aufgenommen, dass je für ein feste x die Systemgröße N so lange erhöht wurde, bis das System nicht mehr konvergiert. Daher liegen bei $N = 5$ mehrere Punkte übereinander: Für diese Werte von x war die Integration bei $N = 7$ bereits instabil.	54
4.4.	Dispersion bei $l = 2.5$ für die Ortsraum-KUT mit Diskretisierung $N = 15$ für den Störparameter $x = 0.65$. Oben ist A_i im Ortsraum aufgetragen, unten die tatsächliche Dispersion $\epsilon(k) = A_k$ im Impulsraum.	55
4.5.	Vergleich der Energielücke nach der Theorie von Bosonen und Hardcore-Bosonen für das IMTF sowie der Ergebnisse der KUT im Orts- und Impulsraum. Die Vergleichswerte wurden für $N = 5$	56
4.6.	Abweichungen der über die KUT berechneten Energielücke für $N = 5$ von der Theoriekurve nach (2.2.37). Oben sind die Achsen linear skaliert, unten logarithmisch.	57
4.7.	Abweichungen der über die Ortsraum-KUT berechneten Energielücke von der Theoriekurve nach (2.2.37) für verschiedene N . Oben sind die Achsen linear skaliert, unten logarithmisch.	58

Glossar

- Äquivalenzklasse, 41, 49
- Anfangsbedingung, 38–39
- BCS-Theorie, 3
- Bewegungsgleichungen, *siehe* Flussgleichung
- Bienenwaben-Gitter, 23
- Bilineare Ordnung, 33
- Bogoliubov-Trafo, 14, 15, 22

- Dimer, 9, 23
- Dispersion, 3, 17, 49
- Dotierung, 1
- Drehimpulsalgebra, 11

- Elementare Anregung, 2, 9, 13
- Elementare Anregungen, 10
- Elementarteilchen, 1
 - Anyonen, 1
 - Bosonen, 1
 - Fermionen, 1
- Emergenz, 2
- Energielücke, 3, 17, 30

- Feynman-Diagramme, 39
- Flussgleichung, *siehe auch* KUT, 4, 25
 - IMTF, 23, 29, 44, 95
 - Bosonen, 67
 - Lösung, 27, 49
 - Reduzierte, 36
 - sKUT, 27
- Flussparameter, 24
- Fourier-Trafo, 14, 15, 22, 65
- Frustration, 23

- Generator, *siehe auch* KUT, 4, 24, 26
- MKU, 23, 26, 28
 - IMTF, 35, 38–39
 - Wegner, 29
- Grundzustand, 2, 10
- Hardcore-Boson, 22
- Hardcore-Bosonen, 2–3, 5
 - Algebra, 2, 6–9, 12, 31, 41, 43, 46
 - Beispiele, 9
 - Zustandssumme, 22
- Heisenberg-Modell
 - Verallgemeinertes, 10
- Hexatische Ordnung, 33

- Impulserhaltung, 30, 39, 42
- IMTF, 3, 10
 - Analytisch, 14–22
 - Anwendungsbeispiele, 3
 - Hamiltonian, 11
 - Hardcore-Bosonen, 13
- Irrelevante Terme, 48
- Isotropie, 42

- Jordan-Wigner-Trafo, 14, 22, 61

- Kommutatorberechnung, 6–7, 44, 46, 69
- Kontinuumslimit, 31
- Korrelationslänge, 30
- Kritischer Punkt, 1
- KUT, 4, 23
 - dapKUT, 26
 - IMTF, 10, 11, 22
 - pKUT, 26
 - sKUT, 4, 23, 26, 38–39
 - vpKUT, 26

- Landau-Theorie, 1
- Magnetisierung
 - Ordnungsparameter, 20
- Magnetismus, 10
 - Antiferro, 19
 - Ferro, 19
- Matsubara-Matsuda-Trafo, 9
- Matsubara-Matsuda-Trafo, 13
- Molekularfeldnäherung, 11
- Notationssymmetrie, 40, 49
- Pauli-Prinzip, 5, 6, 31
- Phase, 1, 10
 - Phasenübergang, 1, 10
- Produktregel, 46
- Quantenkritischer Punkt, 17, 19, 30, 32
- Quantenkritischer Punkt (QKP), 1
- Quartische Ordnung, 31, 33
- Randbedingung, 64
 - Periodische, 42
- Randbedingungen, 14
 - Periodische, 11
- Repräsentant, 42, 49
- Residual Off Diagonality (ROD), 4, 49, 50
- Runge-Kutta, 49
- Skalierungsdimension, 33
- Spin-Leiter, 23
- Störparameter x , 17
- Startbedingung, 38–39
- Suprafluidität, 10
- Supraleiter, 3
- Suprasolidität, 10
- Tight Binding, 15
- Toric-Code-Modell, 23
- Translationsinvarianz, 39, 42
- Triplon, 9
- Trunkierung, 4, 26, 29, 31, 38, 46
 - Skalierungsargument, 29, 31–33
- Unitär, 16, 24
- Unphysikalische Terme, 4, 31, 43, 46, 50
- Unphysikalischer Term, 48
- Wechselwirkung, 40

Literaturverzeichnis

- [1] K. Wenz. Diagonalisierung von Systemen von Hardcore-Bosonen mit kontinuierlichen unitären Transformationen basierend auf Skalierungsargumenten. Master thesis, Physik Lehrstuhl T1, Technische Universität Dortmund, 2012.
- [2] A. Khare. *Fractional Statistics and Quantum Theory*. World Scientific, 2nd edition, 2005.
- [3] J. K. Pachos. *Introduction to Topological Quantum Computation*. Cambridge University Press, 2012.
- [4] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 7: Viel-Teilchen-Theorie*. Springer-Lehrbuch, Berlin Heidelberg, 8th edition, 2015.
- [5] L. D. Landau. On the theory of phase transitions. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 7(377):19–32, 1937.
- [6] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 6: Statistische Physik*. Springer-Lehrbuch, Berlin Heidelberg, 7th edition, 2014.
- [7] T. Fischer, S. Duffe, and G. S. Uhrig. Microscopic model for Bose-Einstein condensation and quasiparticle decay. *Europ. Lett.*, 96(4):47001, 2011.
- [8] T. Fischer. Description of quasiparticle decay by continuous unitary transformations. Dissertation, Physik Lehrstuhl T1, Technische Universität Dortmund, http://t1.physik.tu-dortmund.de/files/uhrig/phd/phd_Fischer_Tim_2011.pdf, 2011.
- [9] C. W. Chu, F. Chen, L. Gao, Z. J. Huang, R. L. Meng, and Y. Y. Xue. Superconductivity above 150 K in $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}(8+\delta)$ at high pressures. *Nature*, 365:323–325, September 1993.
- [10] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of Superconductivity. *Physical Review*, 108:1175–1204, December 1957.
- [11] A. J. Leggett. What do we know about high T_c ? *Nature Physics*, 2:134–136, März 2006.

- [12] H. Luetkens, H. H. Klauss, M. Kraken, F. J. Litterst, T. Dellmann, R. Klingeler, C. Hess, R. Khasanov, A. Amato, C. Baines, M. Kosmala, O. J. Schumann, M. Braden, J. Hamann-Borrero, N. Leps, A. Kondrat, G. Behr, J. Werner, and B. Büchner. The electronic phase diagram of the $\text{LaO}_{1-x}\text{F}_x\text{FeAs}$ superconductor. *Nature Materials*, 8:305–309, April 2009.
- [13] S. Sanna, G. Allodi, G. Concas, A. D. Hillier, and R. D. Renzi. Nanoscopic Coexistence of Magnetism and Superconductivity in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$ Detected by Muon Spin Rotation. *Physical Review Letters*, 93(20):207001, November 2004.
- [14] J. Orenstein and A. J. Millis. Advances in the Physics of High-Temperature Superconductivity. *Science*, 288(5465):468–474, 2000.
- [15] E. Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeit. für Phys.*, 31.1:253–258, 1925.
- [16] P. G. Gennes. Collective motions of hydrogen bonds. *Solid State Comm.*, 1:132–137, 1963.
- [17] D. Sherrington and S. Kirkpatrick. Solvable Model of a Spin-Glass. *Phys. Rev. Lett.*, 35(26):1792–1796, 1975.
- [18] D. Panchenko. The Sherrington-Kirkpatrick Model: An Overview. *Jour. of Stat. Phys.*, 149:2012, 362-383.
- [19] F. Wegner. Duality in generalized Ising models. *ArXiv e-prints*, 2014.
- [20] Y. Liu and J. P. Dilger. Application of the one- and two-dimensional Ising models to studies of cooperativity between ion channels. *Biophys. Jour.*, 64(1):26–35, 1993.
- [21] B. Fauseweh and G. S. Uhrig. Finite temperature line shapes of multi-flavored hardcore bosons by the Brückner approach. *ArXiv e-prints*, 2015.
- [22] O. P. Sushkov and V. N. Kotov. Bound States of Magnons in the $S = 1/2$ Quantum Spin Ladder. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1941–1944, 1998.
- [23] V. N. Kotov u. a. Novel Approach to Description of Spin-Liquid Phases in Low-Dimensional Quantum Antiferromagnets. *Phys. Rev. Lett.*, 80(26):5790–5793, 1998.
- [24] T. Matsubara and H. Matsuda. A Lattice Model of Liquid Helium, I. *Prog. of Theor. Phys.*, 16(6):569–582, 1956.
- [25] K. G. Balabanyan. Superfluid and superconducting transitions in low-dimensional systems, 2007.
- [26] P. Kapitza. Viscosity of Liquid Helium below the λ -Point. *Nature*, 141:74, 1938.
- [27] J. F. Allen and A. D. Misener. Flow of Liquid Helium II. *Nature*, 141:75, 1938.

- [28] S. Wessel and M. Troyer. Supersolid Hard-Core Bosons on the Triangular Lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 95(12):127205, September 2005.
- [29] D. J. Thouless. The flow of a dense superfluid. *Ann. of Phys.*, 52:403–427, 1969.
- [30] A. F. Andreev and L. M. Lifshitz. Quantum theory of defects in crystals. *Sov. Phys. JETP*, 29:1107–1113, 1969.
- [31] E. Kim and M. H. Chan. Observation of Superflow in Solid Helium. *Science*, 305(5692):1941–1944, 2004.
- [32] E. Kim and M. H. Chan. Probable observation of a supersolid helium phase. *Nature*, 427(6971):225–227, 2004.
- [33] W. Heisenberg. Zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik A*, 49:619–639, 1928.
- [34] R. B. Stinchcombe. Ising model in a transverse field. *Journal of Physics C*, 6(15):2549, 1973.
- [35] S. Suzuki, I. Inoue, and B. K. Chakrabarti. *Quantum Ising Phases and Transitions in Transverse Ising Models*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 862 edition, 2013.
- [36] P. Pfeuty. The one-dimensional Ising model with a transverse field. *Ann. of Phys.*, 57(1):79–90, 1970.
- [37] S. Sachdev. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2011.
- [38] H. M. Rønnow, R. Parthasarathy, J. Jensen, G. Aeppli, T. F. Rosenbaum, and D. F. McMorrow. Quantum Phase Transition of a Magnet in a Spin Bath. *Science*, 308(5720):389–392, 2005.
- [39] P. B. Chakraborty, P. Henelius, H. Kjønsgberg, A. W. Sandvik, and S. M. Girvin. Theory of the magnetic phase diagram of LiHoF₄. *Physical Review B*, 70(14):144411, October 2014.
- [40] B. Fauseweh and G. S. Uhrig. Multiparticle spectral properties in the transverse field Ising model by continuous unitary transformations. *Phys. Rev. B*, 87(18):184406, 2015.
- [41] P. Jordan and E. Wigner. über das Paulische Äquivalenzverbot. *Zeits. für Phys.*, 47(9-10):631–651, 1928.
- [42] N. N. Bogoliubov. On the Theory of Superfluidity. *Jour. of Phys.*, 11(1):23–32, 1947.

- [43] C. D. Batista and G. Ortiz. Generalized Jordan-Wigner Transformations. *Phys. Rev. Lett.* 86, page 1082, 2001.
- [44] M. Troyer, H. Tsunetsugu, and D. Würtz. Thermodynamics and spin gap of the Heisenberg ladder calculated by the look-ahead Lanczos algorithm. *Phys. rev. B*, 50:13515–13527, 1994.
- [45] F. Wegner. Flow-equations for Hamiltonians. *Ann.der Phys.*, 3:77–91, 1994.
- [46] S. D. Glazek and K. G. Wilson. Renormalization of Hamiltonians. *Phys. Rev. D*, 48:5863–5872, 1993.
- [47] S. Kehrein. *The Flow Equation Approach to Many-Particle Systems*. Springer Tracts in Modern Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 217 edition, 2006.
- [48] K. P. Schmidt, C. Knetter, and G. S. Uhrig. Spectral properties of the dimerized and frustrated $s = 1/2$ chain. *Phys. Rev. B*, 69(10):104417, 2004.
- [49] C. Knetter, K. P. Schmidt, and G. S. Uhrig. High order perturbation theory for spectral densities of multi-particle excitations: $s = 1/2$ two-leg Heisenberg ladder. *Europ. Phys. Jour. B*, 36:525–544, 2003.
- [50] J. Vidal, K. P. Schmidt, and S. Dusuel. Perturbative approach to an exactly solved problem: Kitaev honeycomb model. *Phys. Rev. B*, 78(24):245121, 2008.
- [51] J. Vidal, S. Dusuel, and K. P. Schmidt. Low-energy effective theory of the toric code model in a parallel magnetic field. *Phys. Rev. B*, 79(3):033109, 2009.
- [52] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 5/1: Quantenmechanik - Grundlagen*. Springer-Lehrbuch, Berlin Heidelberg, 8th edition, 2013.
- [53] S. Dusuel and G. S. Uhrig. The quartic oscillator: a non-perturbative study by continuous unitary transformations. *Jour. of Phys. A*, 37:9275–9294, 2004.
- [54] C. Knetter and G. S. Uhrig. Perturbation theory by flow equations: dimerized and frustrated $S = 1/2$ chain. *Europ. Phys. Jour. B*, 13:209–225, 2000.
- [55] H. Krull, N. A. Drescher, and G. S. Uhrig. Enhanced perturbative continuous unitary transformations. *Phys. Rev. B*, 86(12):125113, 2012.
- [56] H. Krull. Verbesserte perturbative kontinuierliche unitäre Transformation mit direkter Auswertung: Erläutert anhand der Spin $S = 1/2$ antiferromagnetischen Heisenberg-Leiter. Master thesis, Physik Lehrstuhl T1, Technische Universität Dortmund, http://t1.physik.tu-dortmund.de/files/uhrig/diploma/diploma_Holger_Krull_2011-08.pdf, 2011.
- [57] H. Y. Yang and K. P. Schmidt. Effective models for gapped phases of strongly correlated quantum lattice models. *Europ. Lett.*, 94:17004, 2011.

-
- [58] A. Mielke. Flow equations for band-matrices. *Europ. Phys. Jour. B*, 5:605–611, 1998.
- [59] G. Czycholl. *Theoretische Festkörperphysik*. Springer-Lehrbuch, Berlin Heidelberg, 3 edition, 2008.
- [60] P. Deuffhard and F. Bornemann. *Numerische Mathematik: Gewöhnliche Differentialgleichungen*. De Gruyter-Lehrbuch, 3 edition, 2008.
- [61] Odeint C++ Library. www.odeint.com (31.10.2017).
- [62] T. Fischer, S. Duffe, and G. S. Uhrig. Adapted continuous unitary transformation to treat systems with quasi-particles of finite lifetime. *New. Jour. of Phys.*, 12(3):033048, 2010.
- [63] B. Fauseweh. Analysis of the transverse field Ising model by continuous unitary transformations. Master thesis, Physik Lehrstuhl T1, Technische Universität Dortmund, http://t1.physik.tu-dortmund.de/files/uhrig/master/master_Benedikt_Fauseweh_2012.pdf, 2012.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich meinen Dank all den Menschen ausstellen, welche die Erstellung dieser Arbeit erst möglich gemacht haben.

Sehr herzlich möchte ich mich bei Prof. Dr. Götz S. Uhrig für die Vergabe dieses interessanten Themas und der hervorragenden Betreuung während der Arbeit bedanken. Dr. Jörg Bühnemann danke ich für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Meinen Bürokollegen Leanna Splinter, Philip Bleicker und Sascha Heußen möchte ich für die vielfältigen Diskussion innerhalb sowie außerhalb der Physik und der interessanten Zeit miteinander danken.

An Leanna Splinter, Philip Bleicker und Simon Ahlmann geht mein besonderer Dank für das Korrekturlesen meiner Arbeit und ihr sehr ausführliches und hilfreiches Feedback.

Weiterhin möchte ich meiner Familie danken, die in den letzten Wochen dieser Arbeit leider auf mich verzichten musste und mich außerhalb der Physik sehr unterstützt hat. Mara Schmiedinghoff möchte ich für die besondere Unterstützung in der Endphase meiner Arbeit danken.

Schließlich möchte ich der gesamten Arbeitsgruppe des Lehrstuhls T1a für das angenehme Klima und die anregenden Gespräche danken. Insbesondere Martin Sobottka, Andrea Bräutigam, Björn Lindhauer, Carolin Lüders und Elena Kolodzeiski möchte ich an dieser Stelle für die schöne Zeit miteinander danken. Ebenso geht mein Dank an alle Freunde und insbesondere Simon Ahlmann, welche mir die Zeit verschönert haben. Mein Dank geht auch an alle anderen Menschen, die meine Zeit während der Bearbeitung dieser Arbeit bereichert haben und die ich hier nicht alle nennen konnte.

Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Masterarbeit mit dem Titel "Kontinuierliche unitäre Transformationen für Hardcore-Bosonen im Ising-Modell im transversalen Feld" selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum

Unterschrift

Belehrung

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50.000,00€ geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz - HG -).

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird ggf. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z.B. die Software "turnitin") zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen.

Ort, Datum

Unterschrift